МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ________________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2a+4\beta)+\sin 2a = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$

По формуле суммы синусов:

$$\cancel{2}\cdot\sin\left(\frac{2a+4\beta+2a}{2}\right)\cos\left(\frac{2a+4\beta-2a}{2}\right) = -\frac{\cancel{4}\,2}{5}$$

$$\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

(2) : (1)

$$\frac{\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta}{\sin(2a+2\beta)} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Так как не сказано, в какой четверти находится $\angle\beta$, рассмотрим 2 случая.

I. $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ II. $\sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$$\sin(2a+2\beta) = \sin 2a\cdot\cos 2\beta + \cos 2a \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2a\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$2\sin 2a + \cos 2a = -1$$

Воспользуемся заменой:

$$\sin 2a = \frac{2\sin a\cos a}{\cos^2 a+\sin^2 a} = \frac{2\,tg\,a}{1+tg^2 a}$$

$tg\,a = t$

$$\cos 2a = \frac{\cancel{1-2\sin^2 a}\ \cos^2 a-\sin^2 a}{\cos^2 a+\sin^2 a} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin 2a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Big|\cdot\sqrt{5}$$

$$\frac{2\cdot 2t}{t^2+1} - \frac{1-t^2}{t^2+1} = -1$$

$$4t - 1 + t^2 = -t^2 - 1$$

$$2t^2 + 4t = 0$$

$$2t(t+2) = 0$$

$t = 0 \quad t = -2$

$$2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1 \qquad t=0 \quad t=-2$$

$$4t+1-\cancel{t^2}=-\cancel{t^2}-1$$

$$4t=-2$$

$$t=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $tg\, a\in\{-\frac{1}{2};0;-2\}$.

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2)\end{cases}$ $\qquad \underline{x-2y\geq 0}$ $\Downarrow$

(2): $x^2-4x+4+9y^2-2\cdot3\cdot3y+9=12+9+4$ $\qquad t-2n\geq 0$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$ $\qquad$ Замены:

$x-2=t$

$y-1=n$

$t-2n=x-2-2y+2=x-2y$

$\cancel{(t-2n)^2=}$

$(x-2y)^2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

$$\begin{cases}(t-2n)^2=tn\\ t^2+9n^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}t^2-4tn+4n^2=tn\\ t^2+9n^2=25\end{cases}$$

$$\begin{cases}t^2+4n^2=5tn & (1)\\ t^2+9n^2=25 & (2)\end{cases}$$

(2)-(1): $5n^2=25-5tn$

$n^2=5-tn$

$tn=5-n^2$

$t=\frac{5-n^2}{n}$

$$\left(\frac{5-n^2}{n}\right)^2+9n^2=25$$

$$\frac{25-10n^2+n^4}{n^2}+9n^2=25$$

$$25-10n^2+n^4+9n^4=25n^2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$25-10n^2+10n^4=25n^2$

$10n^4-35n^2+25=0 \mid :5$

$n^2=p$

$2p-7p+5=0$

$p=1 \quad p=\frac{5}{2}$

$n^2=1 \quad n^2=\frac{5}{2}$

$n=1$

$t=\frac{5-1}{1}=$

$=4$

$t-2n=$

$=4-2=2\geq 0$

$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$

$x=6$

$y=2$

$n=-1$

$t=\frac{5-1}{-1}=$

$=\frac{4}{-1}=-4$

$-4-2\cdot(-1)=$

$=-4+2=-2<0$

$\downarrow$

Не являются корнями

$n=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$t=\frac{5-\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}=$

$=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$t-2n=$

$=\sqrt{\frac{5}{2}}-2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=$

$=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$

$\downarrow$

Не явл. корнями

$n=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$t=\frac{5-\frac{5}{2}}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{5}{2}}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}=$

$=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$t-2n=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$

$\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$ $\qquad x^2+18x=t,\ t>0$

Тогда если $x^2+18x>0$ раскроем модуль:

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+t \geq 13^{\log_{12}t}$ $\qquad$ Пусть $\log_{12}t=2в$

$\qquad t=12^{2в}$

$5^{\cancel{\log_{12}}2в}+12^{2в} \geq 13^{2в}$

$25^{в}+144^{в} \geq 13^{2в}$

$25^{в}+\cancel{12}144^{в} \geq 169^{в}$

$25^{в}+144^{в} \geq (144+25)^{в}$

Заметим, что равенство достигается только при $в=1$, в противном случае либо график первой функции находится под другой, либо график второй лежит выше первой.

$-\infty<в<1$

При $в=\frac{1}{2}$ $\qquad 5+12\geq 13$ (Правда)

Но тогда весь график первой функции лежит ниже второй $\Rightarrow$ нам подходит $в\in(-\infty;1)$

$в=1$ - достигается равенство

$25+144\geq 169$ (Правда)

$1<в<+\infty$

$в=2$

$25^2+144^2<169^2$

Тогда весь график (на этом промеж.) второй функции выше первой.

$в\in(-\infty;1]$

$\log_{12}t\leq\log_{12}\cancel{12}144$

$0<t\leq\cancel{12}144$

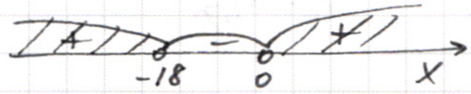
$\cancel{\begin{cases}x^2+18x-12\leq 0\\ x^2+18x>0\end{cases}}$

~~$0<x^2+18x\leq 12$~~

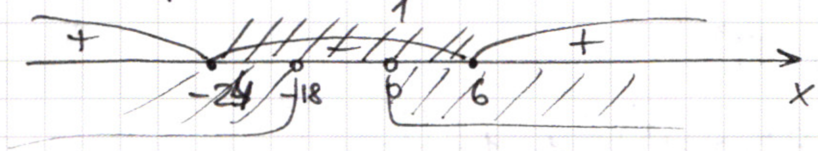
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 < x^2+18x \le 144$

$$\begin{cases} x(x+18) > 0 \\ x^2+18x-144 \le 0 \end{cases}$$



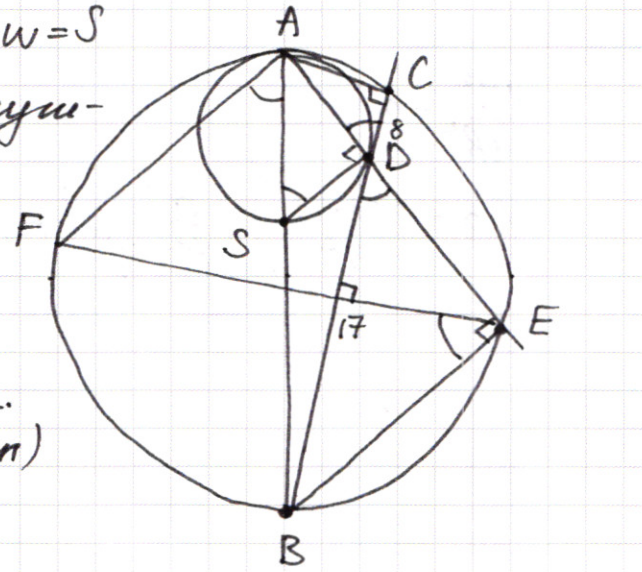
$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+144}}{1} = -9 \pm 15 = \begin{matrix} 6 \\ -24 \end{matrix}$$



Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

4. В силу симметрии $AD \cap w = S$ и AS — диаметр меньшей окружности $\Rightarrow \angle ADS = 90° = \angle AEB \Rightarrow$

$\triangle ADS \sim \triangle AEB$ (по трем углам $\angle A$ — общий)



$CD = 8$; $BD = 17$

$CD \cdot BD = \cancel{CD \cdot BD}\ AD \cdot DE$ (пер. хорды)

$AD \cdot DE = 8 \cdot 17$

~~из $\triangle BDE$: $BD^2 = 2R$~~

Пусть r — рад. малой, R — рад. большой

BD — касат. к малой окр.

$BD^2 = 2R(2R-2r) = 17^2$

Из $\triangle ACB$ (прямоуг.): $AC^2 + 25^2 = 4R^2$

Из $\triangle ADC$: $AD^2 = AC^2 + 64$

$BD^2 = DE^2 + BE^2$

$AD^2 + SD^2 = 4r^2$ (из $\triangle ADS$)

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{SD}{BE}$ (из под. $\triangle ADS$ и $\triangle AEB$)

$$2R-2r=\frac{17^2}{2R}$$

$$R-r=\frac{17^2}{4R}$$

$$r=R-\frac{17^2}{4R}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ +50 \\ \hline 625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 \\ -64 \\ \hline 521 \end{array}$$

$$(64+4R^2-25^2)^2\left(\frac{R}{R-\frac{17^2}{4R}}-1\right)^2+\left(\frac{R}{R-\frac{17^2}{4R}}\right)\left(4\left(R-\frac{17^2}{4R}\right)^2-64-4R^2+\right.$$

$$\left.+25^2\right)=17^2$$

$$(4R^2-521)^2\left(\frac{1}{1-\frac{17^2}{4R^2}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{1-\frac{17^2}{4R^2}}\right)\left(4\left(R^2-\frac{17^2}{2}+\frac{17^4}{4^2R^2}\right)-\right.$$

$$\left.-64-4R^2+625\right)=17^2$$

$$\cancel{(16R^4-2\cdot4\cdot521R^2+521^2)\left(\frac{1-1+\frac{17^2}{4R^2}}{1-\frac{17^2}{4R^2}}\right)^2}$$

$$\frac{17^2}{4R^2}=a$$

$$\left(\frac{a-521\cdot17^2}{17^2}\right)\left(\frac{a^2}{(1-a)^2}\right)+\left(\frac{1}{(1-a)^2}(a-87)\right)=17^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

$$\frac{\sqrt{a^2+64}}{\sqrt{a^2+64}+b} = \frac{SD}{c}$$

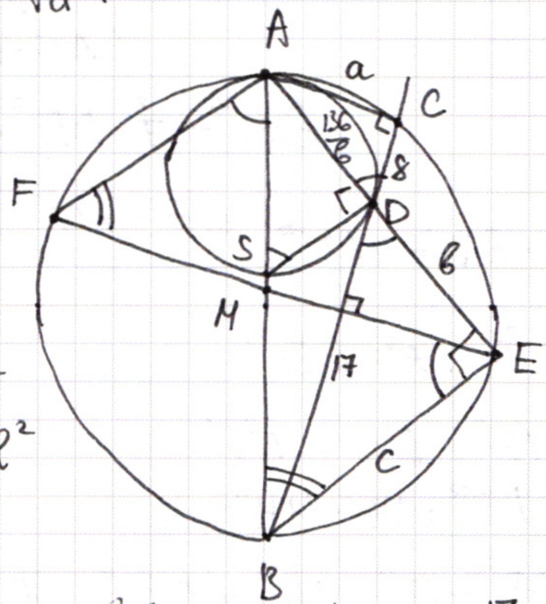
$$a^2+64+\frac{b^2+c^2}{17^2} = 4R^2$$

$CD = 8$ $\quad AD = \sqrt{a^2+64}$

$BD = 17$

$$\frac{SD}{c} = \frac{r}{R}$$

$$SD = \frac{cr}{R}$$



$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$AD \cdot DE = 8 \cdot 17$

$\triangle AFM \sim \triangle MEB$

$\triangle ACD \sim \triangle EBD$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE}$$

$$\cancel{\frac{8k}{17} = \frac{8}{17k}}$$

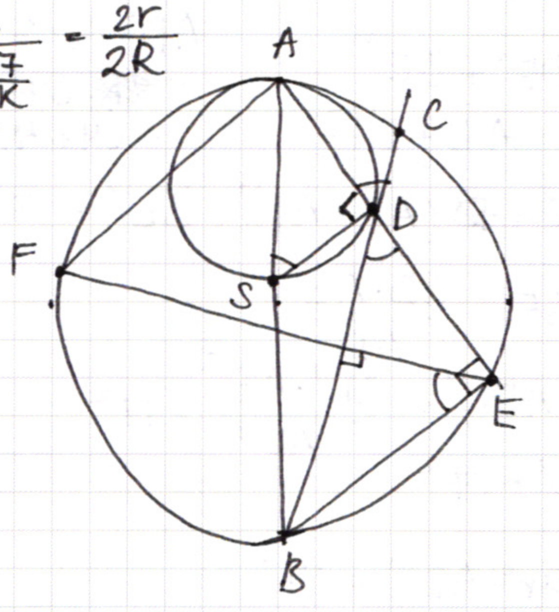
$\triangle ADM \sim \triangle ABE$

$CB = 8+17 = 25$

$CB^2 + AC^2 = 4R^2$

$\cancel{\triangle ADC \sim \triangle BDE}$ $\quad AD = 8k \quad DE = \frac{17}{k}$

$$\frac{8k}{8k+\frac{17}{k}} = \frac{2r}{2R}$$



AS - диаметр меньшей окружности

$CD = 8$

$BD = 17$

обозн.

$BD^2 = BS \cdot BA = 2R(2R-2r) = 17^2$

$AC^2 + 25^2 = 4R^2$

$AD^2 = AC^2 + 64$

$AD^2 + SD^2 = 4r^2$

$AD = a$

~~$DE = b$~~ $AE = b$

$$\frac{a}{b} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{SD}{BE}$$

$BD^2 = DE^2 + BE^2$

$17^2=2R(2R-2r)$ $\cancel{\#}$ R, r, AC, AD, SD, BE, AE

$AC^2=4R^2-25^2$

$\cancel{4r^2-SD^2=AD^2}$

$SD=\frac{BE\cdot r}{R}$

$AD^2=64+4R^2-25^2$

$64+4R^2-25^2 \; \cancel{\#} + SD=4r^2$

$\cancel{BD^2}$ $17^2=DE^2+BE^2$

$(AE-AD)^2$

$BE^2=17^2-DE^2=$

$BE=\sqrt{17^2-(AE-AD)^2}$

$\cancel{R\cdot SD}$ $AE^2+BE^2=AB^2=4R^2$

$BE^2=4R^2-AE^2=17^2-DE^2$

$AE^2+17^2=DE^2+4R^2$

$DE^2=AE^2+17^2-4R^2$

$BE^2=\cancel{AE^2}\; 17^2-AE^2-17^2+4R^2=AE^2+4R^2$

$17^2=2R(2R-2r)$ R, r, AC, AD, SD, AE, BE

$AC^2+25^2=4R^2$

$AD^2=\cancel{4r^2-SD^2}=$

$=\cancel{\#}\;64+AC^2=$

$=64+4R^2-25^2$

$AD^2=AC^2+64$

$\cancel{BD^2}=DE^2+BE^2$

$AE=AD+DE$

$AD^2+SD^2=4r^2$

$\cancel{BD^2}=\cancel{\#}(AE-AD)^2+BE^2=17^2$

$\frac{AD}{AE}=\frac{r}{R}=\frac{SD}{BE}$

$BE=\frac{SD\cdot AE}{AD}$

$AE=\frac{RAD}{r}$

$(AE-AD)^2+\frac{SD^2\cdot AE^2}{AD^2}=17^2$

$(AE-AD)^2+\frac{R^2}{r^2}\cdot SD^2=17^2$

$(AE-AD)^2+\frac{R^2}{r^2}\cdot(4r^2-AD^2)=17^2$

$\left(\frac{R\cdot AD}{r}-AD\right)^2+\frac{R^2}{r^2}(4r^2-AD^2)=17^2$

$AD^2\left(\frac{R}{r}-1\right)^2+\left(\frac{R}{r}\right)^2(4r^2-AD^2)=17^2$

$(64+4R^2-25^2)^2\left(\frac{R}{r}-1\right)^2+\left(\frac{R}{r}\right)^2(4r^2-64-4R^2+25^2)=17^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(4R^2-521)^2\left(\frac{\frac{17^2}{4R^2}}{1-\frac{17^2}{4R^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\frac{17^2}{4R^2}}\right)\left(4R^2-17^2\cdot 2+\frac{17^4}{4R^2}-\right.$$

$$\left.-64-4R^2+625\right)=17^2$$

$$\frac{17^2}{4R^2}=a$$

$$\left(\frac{a}{17^2}-521\right)^2\left(\frac{a}{1-a}\right)^2+\left(\frac{1}{1-a}\right)^2\left(a+521-17^2\cdot 2\right)=17^2$$

$$4R^2=\frac{a}{17^2}$$

$$\left(\frac{a-521\cdot 17^2}{17^2}\right)\left(\frac{a^2}{(1-a)^2}\right)+\left(\frac{1}{(1-a)^2}\cdot(a-97)\right)=17^2$$

$17 \times 17 = 139$, $+17$, $309 \times 2 = 618$; $618-521=97$

$$AC^2+CD^2=AD^2 \quad DE=b \quad BE=c$$

$AC = a$

$$a^2+64^2=AD^2$$

$$a^2+64^2+\underbrace{b^2+c^2}_{17^2}=4R^2$$

$$a^2+64^2+17^2=4R^2$$

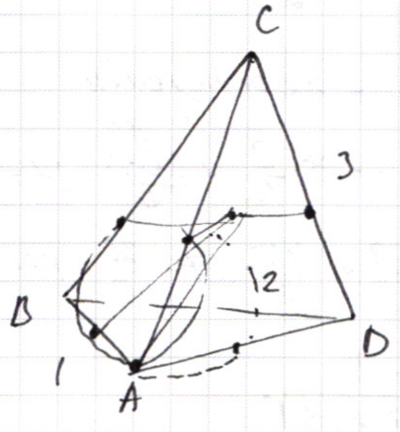
$$AD\cdot b=8\cdot 17$$

$$AD=\frac{8\cdot 17}{b}$$

$17 \times 8 = 136$

$$b^2+c^2=17^2$$

$$SD=\frac{cr}{R} \quad \left(\frac{cr}{R}\right)^2+\left(\frac{8\cdot 17}{b}\right)^2=4r^2$$



$BC=1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

6. $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $\quad \forall x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$

$y_1(x)=3+\frac{2}{4x+3}$ – гипербола

$\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

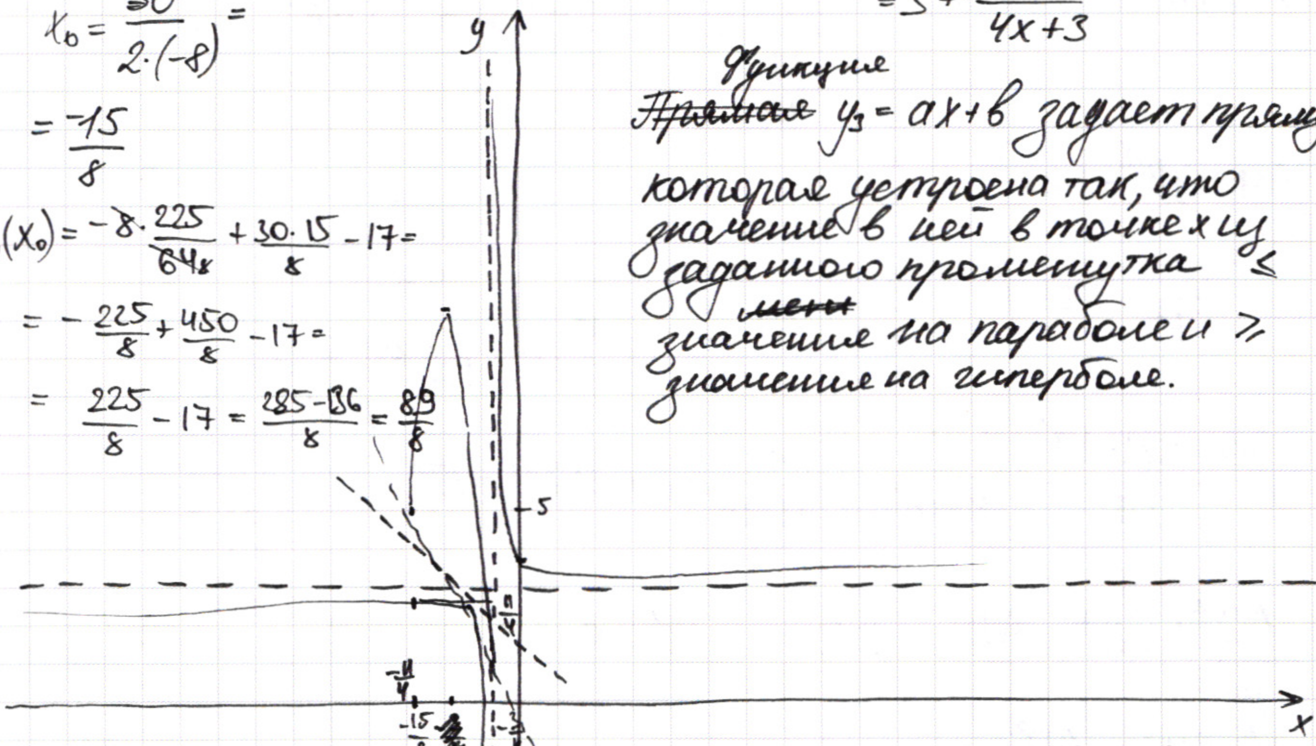
$y_2(x)=-8x^2-30x-17$ – парабола с ветвями вниз

$x_0=\frac{30}{2\cdot(-8)}=-\frac{15}{8}$

$y_2(x_0)=-8\cdot\frac{225}{64_8}+\frac{30\cdot 15}{8}-17=$

$=-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-17=$

$=\frac{225}{8}-17=\frac{285-136}{8}=\frac{89}{8}$



~~Прямая~~ Функция $y_3=ax+b$ задает прямую, которая устроена так, что значение в ней в точке x из заданного промежутка ≤ ~~мень~~ значение на параболе и ≥ значение на гиперболе.

$y_1\left(-\frac{11}{4}\right)=3+\frac{2}{-11+3}=3+\frac{2}{-8}=$

$=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$

$y_2\left(-\frac{11}{4}\right)=-8\cdot\frac{121}{16_2}+\frac{11\cdot 30}{4}-17=$

$=\frac{-121+165}{2}-17=\frac{44}{2}-17=$

$=5$

$y_1\left(-\frac{3}{4}\right)\to$ не определен

$y_2\left(-\frac{3}{4}\right)=-8\cdot\frac{9}{16_2}+\frac{30\cdot 3}{4_2}-17=$

$=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=\frac{36}{2}-17=18-17=1$

$(y_1)'=2\cdot\left(\frac{1}{4x+3}\right)'=$

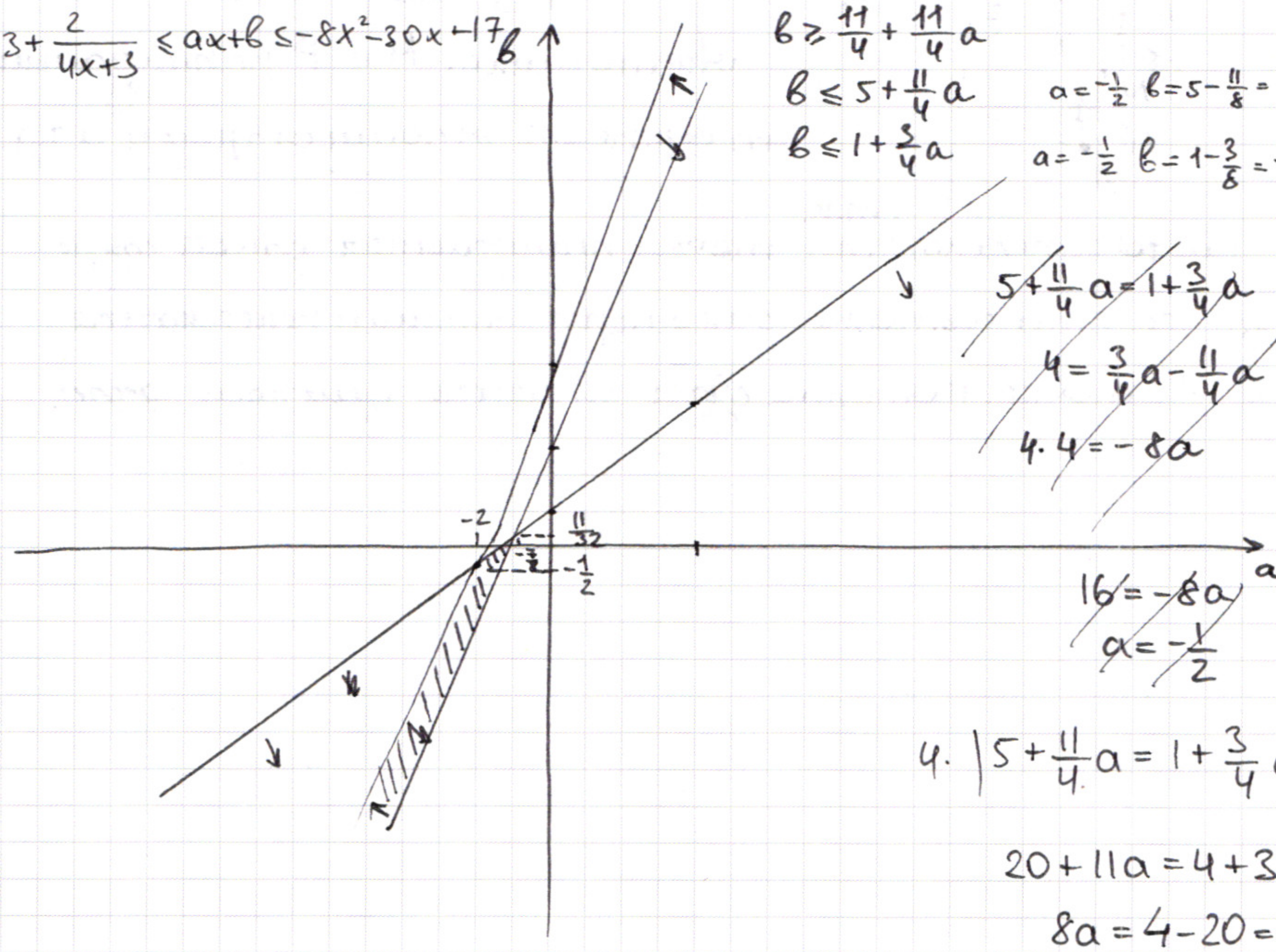
$=2\cdot\left(\frac{0-(4x+3)'}{(4x+3)^2}\right)=\frac{2\cdot -4}{(4x+3)^2}=\frac{-8}{(4x+3)^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$



$b \ge \frac{11}{4}+\frac{11}{4}a$

$b \le 5+\frac{11}{4}a$

$b \le 1+\frac{3}{4}a$

$a=-\frac{1}{2}$ $b=5-\frac{11}{8}=$

$a=-\frac{1}{2}$ $b=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$

$\cancel{5+\frac{11}{4}a=1+\frac{3}{4}a}$

$\cancel{4=\frac{3}{4}a-\frac{11}{4}a}$

$\cancel{4\cdot 4=-8a}$

$\cancel{16=-8a}$

$\cancel{a=-\frac{1}{2}}$

4.| $5+\frac{11}{4}a=1+\frac{3}{4}a$

$20+11a=4+3a$

$8a=4-20=-16$

$a=-2$

$b=1-\frac{3}{4}\cdot 2=$

$=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$

4.| $1+\frac{3}{4}a=\frac{11}{4}+\frac{11}{4}a$

$4+3a=11+11a$

$-7=8a$

$a=-\frac{7}{8}$

$b=\frac{11}{4}-\frac{77}{4\cdot 8}=\frac{88-77}{32}=\frac{11}{32}$

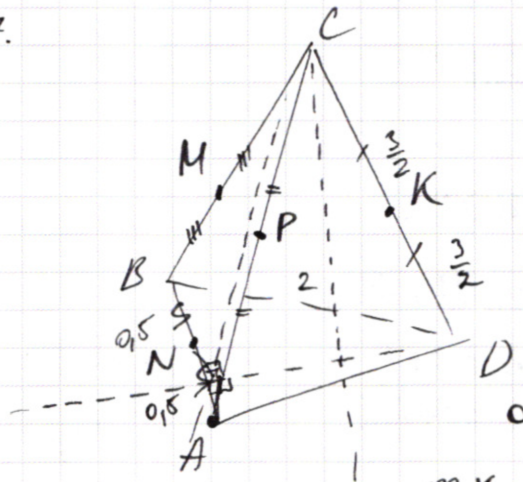
Ответ: ~~Тогда $a \le \frac{11}{32}$~~ Тогда нам подходит $a\in(-\infty;-2)$ и

$\frac{11a}{4}+\frac{11}{4} \le b \le 5+\frac{11a}{4}$ и если $a\in[-2;\frac{11}{32}]$ то

$\frac{11a}{4}+\frac{11}{4} \le b \le 5+\frac{11a}{4}$ и $b \le 1+\frac{3}{4}a$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

7.



Заметим, что
N - сер. AB
точки A и ~~B~~ N равноудалены от перпендикуляра к AN, проходящего через середину AN.

Аналогично, M и P равноудалены от сер. пер. к этому отрезку и т.д.

Следовательно, т.к. эти точки принадлежат одной сфере, то все эти сер. перпендикуляры должны пересекаться в 1 точке, которая будет являться центром сферы.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $3+\frac{2}{3}=\frac{9+2}{3}=\frac{11}{3}$

$450-225=225$

$17\cdot 8=136$

$225-136=89$

$\frac{12x+11}{4x+3}=-8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3}=-8x^2-30x-17 \quad |\cdot 4x+3$

$12x+9+2=(-8x^2-30x-17)(4x+3)$

$17\cdot 4=68$

$68+90=158$

$158+12=170$

$17\cdot 3=51$

$\cancel{\frac{12x+11}{4x+3}}=-8x^2-30x-17$

$170:2=85$

$12x+11=-32x^3-24x^2-120x^2-90x-17\cdot 4x-51$

$32x^3+144x^2-170x-62=0 \quad |:2$

$16x^3+72x^2-85x-31=0$

16 72 −85 −31

$-\frac{11}{4}$

$\frac{-33+11}{-11+3}=\frac{-22}{-8}=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}$

$15\cdot 11=165$

$165-121=44$

$-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17=\frac{-121}{2}+\frac{165}{2}-17=\frac{44}{2}-17=22-17=5$

$$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\begin{cases} \frac{11}{4} \le a \cdot \left(-\frac{11}{4}\right)+b \le 5 \\ -\frac{3}{4}a+b \le 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \ge \frac{11}{4} \quad \Big| \cdot \frac{4}{11} \\ -\frac{11}{4}a+b \le 5 \\ -\frac{3}{4}a+b \le 1 \end{cases}$$

$$-a+\frac{4}{11}b \ge 1$$

$\cancel{a=4k}$

$\cancel{b=4n}$

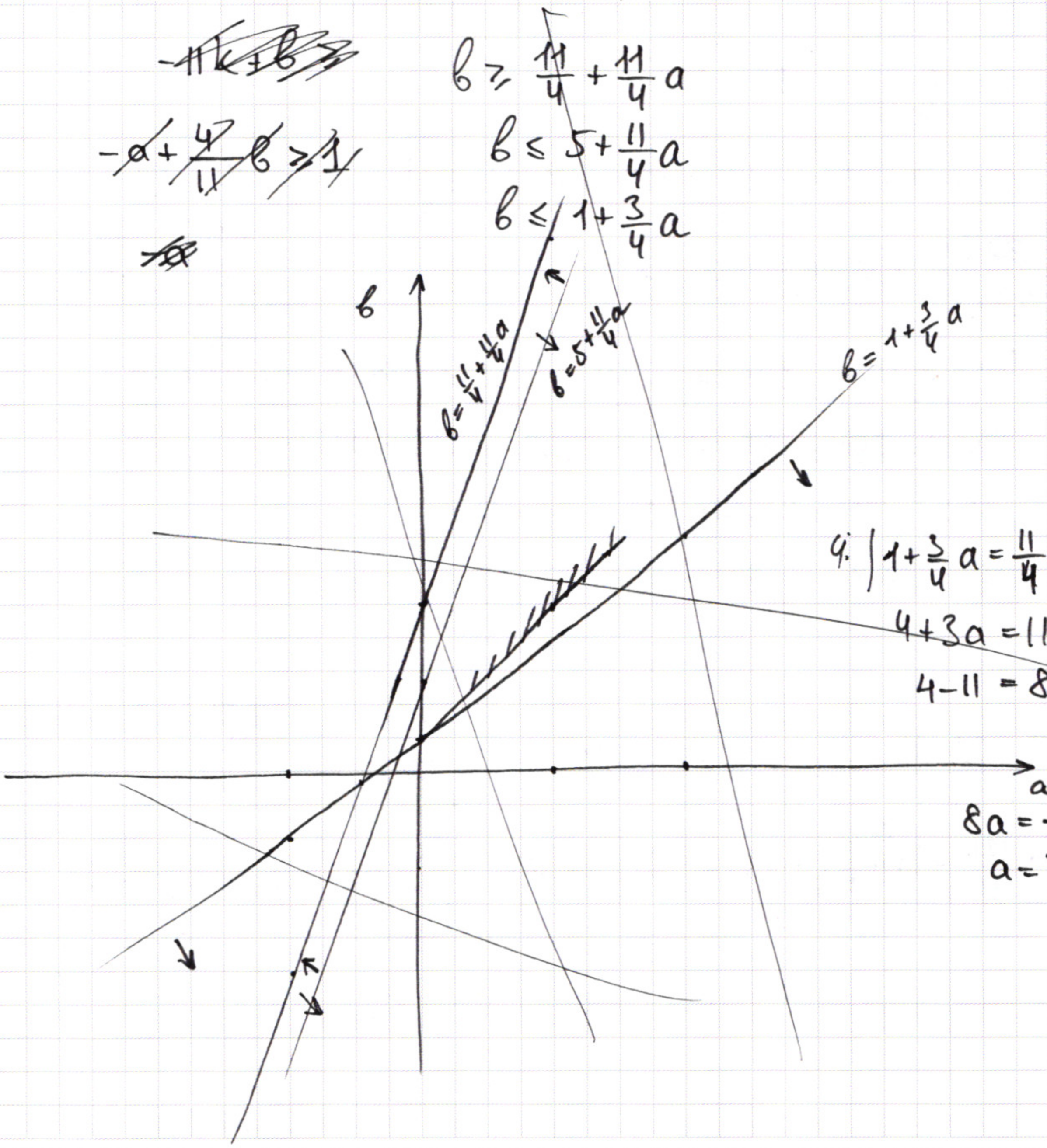
$\cancel{-11k+b \ge}$

$\cancel{-a+\frac{4}{11}b \ge 1}$

$$b \ge \frac{11}{4}+\frac{11}{4}a$$

$$b \le 5+\frac{11}{4}a$$

$$b \le 1+\frac{3}{4}a$$



$$4. \quad \Big| 1+\frac{3}{4}a=\frac{11}{4}+\frac{11}{4}a$$

$$4+3a=11+11a$$

$$4-11=8a$$

$$8a=-7$$

$$a=-\frac{7}{8}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Не менее 3

1. $\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = -\frac{4}{5}$

$2\sin\left(\frac{2a+2a+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2a+4\beta-2a}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin(2a+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{\cos 2\beta}$

$\frac{\sin(2a+2\beta)\cdot\cos(2\beta)}{\sin(2a+2\beta)} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $\sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2a+2\beta) = \sin 2a\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2a$

$\cancel{\sin 2a}$

I. $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \;\Big|\cdot\sqrt{5}$

$\operatorname{tg} a = t$

$\sin 2a = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos 2a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

II. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2a\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \;\Big|\cdot\sqrt{5}$

$\operatorname{tg} a = t$

$\frac{2t}{1+t^2}\cdot 2 - \frac{(1-t^2)}{1+t^2} = -1$

$4t - 1 + t^2 = -t^2 - 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$t^2+9\cdot\frac{5}{2}=25$

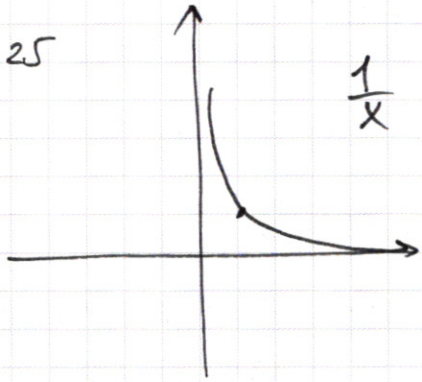
$t^2=25-\frac{45}{2}=\frac{50-45}{2}=\frac{5}{2}$

$t=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad n=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\frac{5}{2}+4\cdot\frac{5}{2}=5\cdot\frac{5}{2}$ $\qquad t=-\sqrt{\frac{5}{2}}:$ $\qquad t=\sqrt{\frac{5}{2}}:$

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{2}$ $\qquad \frac{5}{2}+4\cdot\frac{5}{2}=5\cdot\frac{5}{2}$

$\cancel{3\sqrt{\frac{5}{2}}}$ $\qquad \frac{5}{2}+9\cdot\frac{5}{2}=25$



$\cancel{(t-2n)^2=1}$

$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=\cancel{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot2=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\sqrt{\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}+2\sqrt{\frac{5}{2}}+2}=\sqrt{2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-2\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}+3\sqrt{\frac{5}{2}}+2}=$

$=\cancel{\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$x(y-1)-2(y-1)=$
$=(x-2)(y-1)$

$(x-2)(y-1)=tn=\frac{5}{2}$

$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}=2+\frac{5}{2}-3\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad \sqrt{\frac{5}{2}}=a$

$y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(2-a)(1-a)=2-a-2a+a^2=a^2-3a+2=$

$\cancel{=(a-1)(a-2)=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)}$

$(x-2)=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(y-1)=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\qquad x=-\frac{\sqrt{5}}{2}+2$ $\qquad -\sqrt{\frac{5}{2}}+2+2\sqrt{\frac{5}{2}}-2=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1$

$(x-2)(y-1)=\frac{5}{2}$

$\left(\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}+2\right)\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)-2\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)-\left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+2\right)=$

$=\frac{5}{2}+1$ $\qquad =\frac{5}{2}-2\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}+3-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}+2=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin 2a + \cos 2a = -1$

$2\cdot\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{t^2+1} = -1$

$\frac{4t+1-t^2}{t^2+1} = -1$

$4t+1-t^2 = -t^2-1$

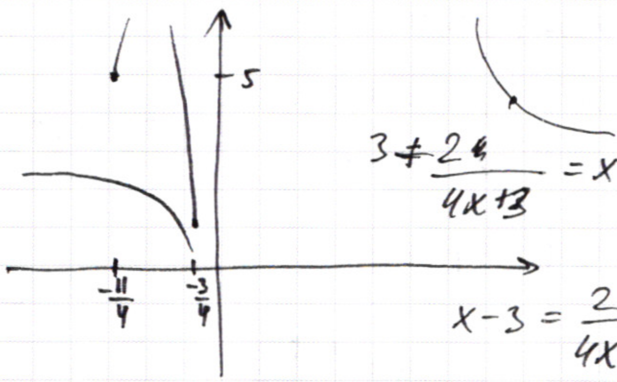
$4t = -2$

$t = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$2t^2+4t=0$

$2t(t+2)=0$

$t=0 \quad t=-2$



$\frac{3 \pm 2a}{4x+3} = x$

$x-3 = \frac{2}{4x+3}$

2.

$x^2-4xy+y^2 = xy-x-2y+2$

$\cancel{x^2-5xy+x+2y-2+y^2=0}$

$x-2y \geq 0$

$(4x+3)(x-3)=2$

$(x-2y)^2 = xy-x-2y+2 = x(y-1)-2(y-1) = (x-2)(y-1)$

$x^2+9y^2-4x+4\underbrace{-18y}_{3\cdot2\cdot3}+9 = 12+4+9=25$

$4x^2-12x+3x-9=2$

$4x^2-9x-11=0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81+4\cdot 11\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{9\pm\sqrt{257}}{8}$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2=t$

$y-1=n$

$x-2-2y+2 = t-2n$

$\times\frac{16}{11}$ 16, 16, 176, 81, 257

$(t-2n)^2 = tn$

$t^2+9n^2=25$

$\cancel{t^2=25-9n^2}$

$t^2-4tn+n^2=tn$

$\begin{cases} t^2+n^2=5tn \\ t^2+9n^2=25 \end{cases}$

$9n^2-n^2=25-5tn$

$8n^2=25-5tn$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Проверка:

$x=6 \quad y=2$

$2=\sqrt{12-6-4+2}$

$36+9\cdot 4-4\cdot 6-18\cdot 2=12$

$\frac{3\cdot 4}{12}$

$48-36=12$

$\left(\frac{5-n^2}{n}\right)^2+9n^2=25$

$\frac{25-10n^2+n^4}{n^2}+9n^2=25 \quad |\cdot n^2$

$25-10n^2+n^4+9n^4=25n^2$

$10n^4-35n^2+25=0$

$2n^4-7n^2+5=0$

$n^2=p,\ p\geq 0$

$2p^2-7p+5=0$

$p=1 \quad p=\frac{5}{2}$

$2\cdot\frac{25}{4_2}-\frac{7\cdot 5}{2}+5=\frac{25-35}{2}+5=-5+5=0$

$n^2=1 \quad n^2=\frac{5}{2}$

$t-2n\geq 0$

$n=\pm 1 \quad n=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$n=1 \quad n=-1 \quad n=\sqrt{\frac{5}{2}} \quad n=-\sqrt{\frac{5}{2}}=t$

$t=\frac{5-1}{1}=$ $=4$

$t=-4$

$t=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=2+(-4)=2$

$y=n+1=$ $=0$

$\frac{5}{2}+10=5\cdot\frac{5}{2}$

$\frac{25}{2}=\cancel{\frac{25}{2}}$

$4-2\cdot 1\geq 0$

$x-2=4$

$x=6$

$y-1=1$

$y=2$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot 2=$

$=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}+2=$

$=3\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{9}{2}$

$\left(t+2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=-t\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\frac{125-25}{2}=$ $=\frac{100}{2}$

$t^2+4t\sqrt{\frac{5}{2}}+4\cdot\frac{5}{2}=-t\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2=9\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

$t^2+5t\sqrt{\frac{5}{2}}+4\cdot\frac{5}{2}=0$

$t_{1,2}=\frac{-5\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{25\cdot\frac{5}{2}-4\cdot\frac{5}{2}}}{2}=\frac{-5\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{50}}{2}=$

$=-5\sqrt{\frac{5}{2}}\pm 5\sqrt{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4-4\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}+9\cdot\left(1-2\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}\right)-4\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)-18\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=$$

$$=\frac{16+5}{2}-4\sqrt{\frac{5}{2}}+9-18\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{45}{2}-8+4\sqrt{\frac{5}{2}}-18+18\sqrt{\frac{5}{2}}=$$

$$\begin{array}{r}-33\\17\end{array}$$

$$=\frac{21}{2}+1-18+\frac{45}{2}=\frac{66}{2}-18+1=33-17=$$

$\cancel{(t-2n)^2}$

$$t-2n=\sqrt{(tn)}\quad=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$x-2y=2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$(x-2)=-\sqrt{\frac{5}{2}}\qquad \sqrt{\frac{5}{2}}=a$$

$$(y-1)=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\cancel{(x-2)y}\quad xy-x-2y+2=\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$$

$$(2-a)(1-a)-2+a-2+2a+2=$$

$$=2-2a-a+a^2-2+a-2+2a+2=a^2$$

$$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot2=\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\cancel{2-3\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{5}{2}}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}-1+2}}$$

$$2-3\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{5}{2}-2+\sqrt{\frac{5}{2}}-2+2\sqrt{\frac{5}{2}}+2$$

$$\cancel{x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+12}}{}}$$

$15+9$

144×81 225

15×15: 75, 15, 225

$25+144=169$

$18\times6=108$

$36+18\cdot6\cdot4\cdot12\cdot12$

$36+108$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$x^2+18x=t,\ t>0$

↓ раскроем модуль

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}\ |:t,\ t>0$

$a^b+a^c \geq a^d$

$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13} \geq 0$

$t\left(1+t^{\log_{12}5-1}-t^{\log_{12}13-1}\right) \geq 0$

$t^{\log_{12}5}$

$\log_{12}t=a$

$t=12^a$

$t^{\log_{12}5-1}+1 \geq t^{\log_{12}13-1}$

$5^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}-t$

$a=2b$

$5^a \geq 13^a-12^a$

$t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13}-t$

$(5^a)'=$

$t=12^{2b}$

$13^2-25=$

$=169-25=$

$=144$

$12^{2b\log_{12}5} \geq 12^{2b\log_{12}13}-12^{2b}$

$5^{2b} \geq 13^{2b}-12^{2b}$

$25^b \geq 169^b-144^b$

$25^b \geq 169^b-144^b$

$b=1$ – прикол

$25^b+144^b \geq 169^b$

$b=0$ правда

$169^b=(144+25)^b$

$a=2\cdot1=2$

$k^b+d^b \geq (k+d)^b$

$0<b<1$

$b=\frac{1}{2}$

$t=144$

$(k+d)(k^a-k\ldots$

$5+12 \geq 13$ правда

$12^{2\log_{12}5} \geq 12^{2\log_{12}13}-12^2$

$b=1$ правда

$5^2 \geq 13^2-12^2$

$1<b<+\infty$:

$25^b \geq 13^{2b}-12^{2b}$

$b=2 \quad 625+144^2 \vee 169^2$

$25^b \geq (13^b-12^b)(13^b+12^b)$

$169^b-144^b=13^{2b}-12^{2b}=$

$(25^b+144^b)'=25^b\cdot\ln b+144^b\ln b$

$((169)^b)'=169^b\cdot\ln 8=(13^b-12^b)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)