МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \quad (2) \end{cases}$$

Преобразуем (1) и (2) выражения:

(1): $y-6x=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}$

$\underset{\geq 0}{y-6x}=\sqrt{\underset{\geq 0}{(y-6)(x-1)}}$, ~~уст~~ $y-6x\geq 0$

$y\geq 6x$

(2): $9x^2-18x+9-9+y^2-12y+36-36=45$

$9(x^2-2x+1)+y^2-2\cdot 6y+36-45=45$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

Подставим полученные выражения в систему:

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)},\ y\geq 6x \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-1$, $b=y-6$, тогда $y=b+6$, $x=a+1$, т.е. $6x=6(a+1)$

Система примет вид $\begin{cases} b+6-(6a+6)=\sqrt{ab} \quad (3) \\ 9a^2+b^2=90 \quad (4) \end{cases}$

(3): $b+6-6a-6=\sqrt{ab}$

$b-6a=\sqrt{ab}$ $\uparrow^2$, $b\geq 6a$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$D=169a^2-4\cdot 36a^2=25a^2=(5a)^2$

$b_{1,2}=\dfrac{13a\pm 5a}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \end{array}\right.$

Если $b=9a$, то, подставляя в (4), получим:

$9a^2+81a^2=90$

$$90a^2=90 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} (5) \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases} (6) \end{array}\right.$$

$b \geqslant 6a$ – необходимое условие, проверим полученные значения a и b: (5): $9 \geqslant 6 \cdot 1$ – верно

(6): $-9 \geqslant 6 \cdot (-1)$, т. е. $-9 \geqslant -6$ – неверно

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$$

Если $b=4a$, то, подставляя в (4), получим:

$$9a^2+16a^2=90$$

$$25a^2=90$$

$$a^2=\frac{90}{25} \Leftrightarrow a^2=\frac{18}{5} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}} \Leftrightarrow a=\pm 3\sqrt{0{,}4}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3\sqrt{0{,}4} \\ b=12\sqrt{0{,}4} \end{cases} (7) \\ \begin{cases} a=-3\sqrt{0{,}4} \\ b=-12\sqrt{0{,}4} \end{cases} (8) \end{array}\right.$$

Проверим полученные значения a и b на соответствие условию $b \geqslant 6a$:

(7): $12\sqrt{0{,}4} \geqslant 6 \cdot 3\sqrt{0{,}4}$

$12\sqrt{0{,}4} \geqslant 18\sqrt{0{,}4}$ – неверно

(8): $-12\sqrt{0{,}4} \geqslant 6 \cdot (-3\sqrt{0{,}4})$

$-12\sqrt{0{,}4} \geqslant -18\sqrt{0{,}4}$ – верно

Т. о. получим ~~[illegible]~~ совокупность ответов:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} (9) \\ \begin{cases} a=-3\sqrt{0{,}4} \\ b=-12\sqrt{0{,}4} \end{cases} (10) \end{array}\right.$$

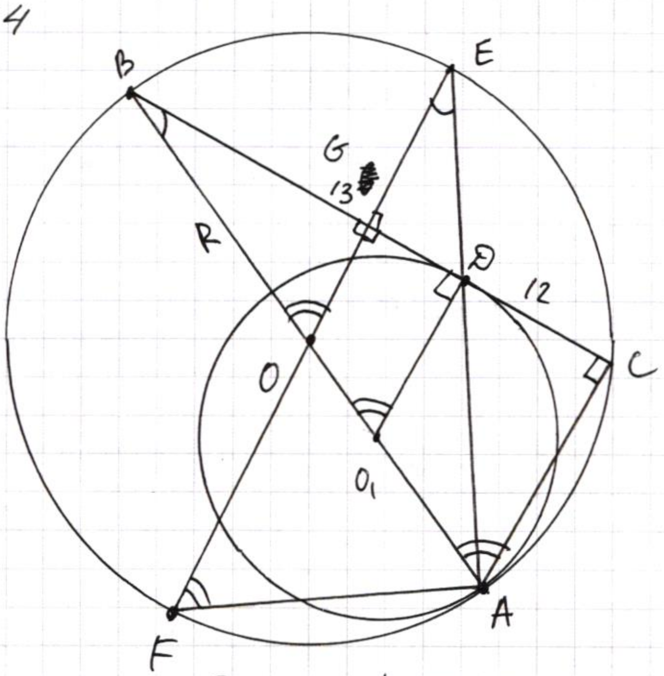
Обратная замена: (9): $\begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$

(10): $\begin{cases} x-1=-3\sqrt{0{,}4} \\ y-6=-12\sqrt{0{,}4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3\sqrt{0{,}4} \\ y=6-12\sqrt{0{,}4} \end{cases}$

Ответ: $(2; 15)$, $(1-3\sqrt{0{,}4}; 6-12\sqrt{0{,}4})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано:
Ω, ω,
$CD=12$
$BD=13$

Найти:
R, r, $\angle AFE$,
$S_{\Delta AEF}$

Проведём AC и

Решение:

1) Пусть R – радиус окружности Ω, а r – радиус окр. ω, т. O – центр Ω, т. O_1 – центр ω

2) Точки A, O_1, O и B лежат на одной прямой, т.к. т. $A \in \omega$, т. $A \in \Omega$, AB – диаметр Ω, O_1A – радиус ω

3) Рассмотрим ΔABC:
$\angle BCA$ опирается на диаметр AB, поэтому $\angle BCA = 90°$

Проведём отр. O_1D – радиус ω

$O_1D \perp BC$, т.к. BC – касательная к ω

ΔO_1BD, и ΔABC – прямоугольные Δ-ки

$\Delta O_1BD \sim \Delta ABC$ по острому углу ($\angle ABC$ – общий) $\Rightarrow$

$$\frac{O_1B}{AB} = \frac{BD}{BD+CD}$$

$AB = 2R \Rightarrow$

$$\frac{O_1B}{2R} = \frac{13}{25} \Rightarrow O_1B = \frac{26}{25}R$$

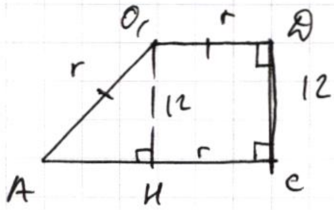
$$\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+CD}$$

$\cancel{\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+DC}}$

$\cancel{O_1D = r \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{13}{13+12} = \frac{13}{25} \Rightarrow r = \frac{13}{25}AC}$

$O_1D = r \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{13}{13+12} = \frac{13}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{13} r$

4) Рассмотрим прямоугольную трапецию AO_1DC:



Опустим перпендикуляр O_1H и рассм. $\triangle AO_1H$: $\angle AHO_1 = 90°$

$AH = AC - HC = AC - r$ (т.к. $HC = O_1D = r$)

$AH = \frac{25}{13} r - r = \frac{12}{13} r$

По т. Пифагора: $AO_1^2 = AH^2 + HO_1^2$

$r^2 = \frac{144}{169} r^2 + 144$

$r^2\left(1 - \frac{144}{169}\right) = 144$

$\frac{25r^2}{169} = 144$, $r > 0 \Rightarrow \frac{5r}{13} = 12 \Rightarrow r = \frac{12 \cdot 13}{5} =$

$= \frac{156}{5} = 31{,}2$

$AO_1 = AB - O_1B = 2R - \frac{26}{25}R = \frac{24}{25}R$

$AO_1 = r \Rightarrow r = \frac{24}{25}R \Rightarrow R = \frac{25}{24} r = \frac{25}{24} \cdot \frac{156}{5} =$

$= \frac{65}{2} = 32{,}5 \Rightarrow AB = 2R = 65$

5) $\triangle ABC \sim \triangle FEA$ (по двум $\angle$-м) $\angle FEA = \angle ABC$ (внутр. $\angle$-и опир. на одну дугу) $\angle AFE = \angle BAC$

$\angle BCA = 90° \Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow$ EF-диаметр Ω

$\angle AFE = \angle BAC$

~~Пусть G - точка пересечения EF и BC~~

$\angle BAC = \angle BO_1D$ (как соответственные $\angle$-и при $AC \parallel O_1D$, AB-секущ.)

$\Rightarrow \angle AFE = \angle BO_1D$

6) Рассм. $\triangle BO_1D$: $\sin\angle BO_1D = \frac{BD}{BO_1}$

$BD = 13$, $BO_1 = \frac{26}{25} R = \frac{26}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{13^2}{5}$

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \sin\angle BO_1D = \frac{13}{\frac{13^2}{5}} = 13 \cdot \frac{5}{13^2} =$

$= \frac{5}{13} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{5}{13}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) Рассм. $\triangle OFA$: $\angle BOG = \angle AOF$ (верт. $\angle$-ы), где $EF \cap BC = G$

$\angle BOG = \angle BAC$ (соответственные $\angle$-ы при $FE \parallel AC$)

$\angle BOG = \angle BAC = \angle AFE \Rightarrow \angle AOF = \angle AFE = \angle AFO$

$OF = OA = R \Rightarrow \triangle OFA$ — р/б $\triangle$-к $\Rightarrow$

$\angle AFO = \angle AOF \Rightarrow FA = OA = R$

8) $S_\triangle AEF = \frac{1}{2} AF \cdot FE \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 2R \cdot \frac{5}{13} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{65^2}{4} \cdot \frac{5}{13} = \frac{65 \cdot \cancel{65}^{5}}{4} \cdot \frac{5}{\cancel{13}} = \frac{1625}{4} = 406{,}25$

(пояснение к ответу)

9) ~~Ответ~~ $R = 32{,}5$

$r = 31{,}2$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{13}$

$S_\triangle AEF = 406{,}25$

Ответ: $32{,}5$; $31{,}2$; $\arcsin\frac{5}{13}$; $406{,}25$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 1

$(1)\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(2)\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$(1):\ \sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(2):\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin 2(\alpha+\beta)\cos 2\beta =$

$= -\frac{2}{17}$

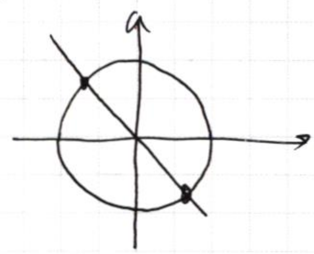
$(1)\cap(2) \Rightarrow\ = 4\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos 2\beta$

$(2):(1) = \frac{\cancel{4}^{2}\cancel{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}\cos 2\beta}{\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}} = -\frac{2}{17}\cdot\frac{-\sqrt{17}}{1}$

$= \frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Заметим, что $\sin 2(\alpha+\beta) = -\cos 2\beta$



$\sin 2(\alpha+\beta) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)$

$\sin(2\alpha+2\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = 0$

$2\sin\frac{2\alpha+2\beta+\frac{\pi}{2}-2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha+2\beta-\frac{\pi}{2}+2\beta}{2} = 0$

$2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+2\beta-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

① $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\alpha+\frac{\pi}{4} = \pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n\right) = -1$

② $\cos\left(\alpha+2\beta-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\alpha+2\beta-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$2\beta = \frac{3\pi}{4}-\alpha+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\beta = \frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

$$-\frac{2(3x-4)}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$
1, 2, 3

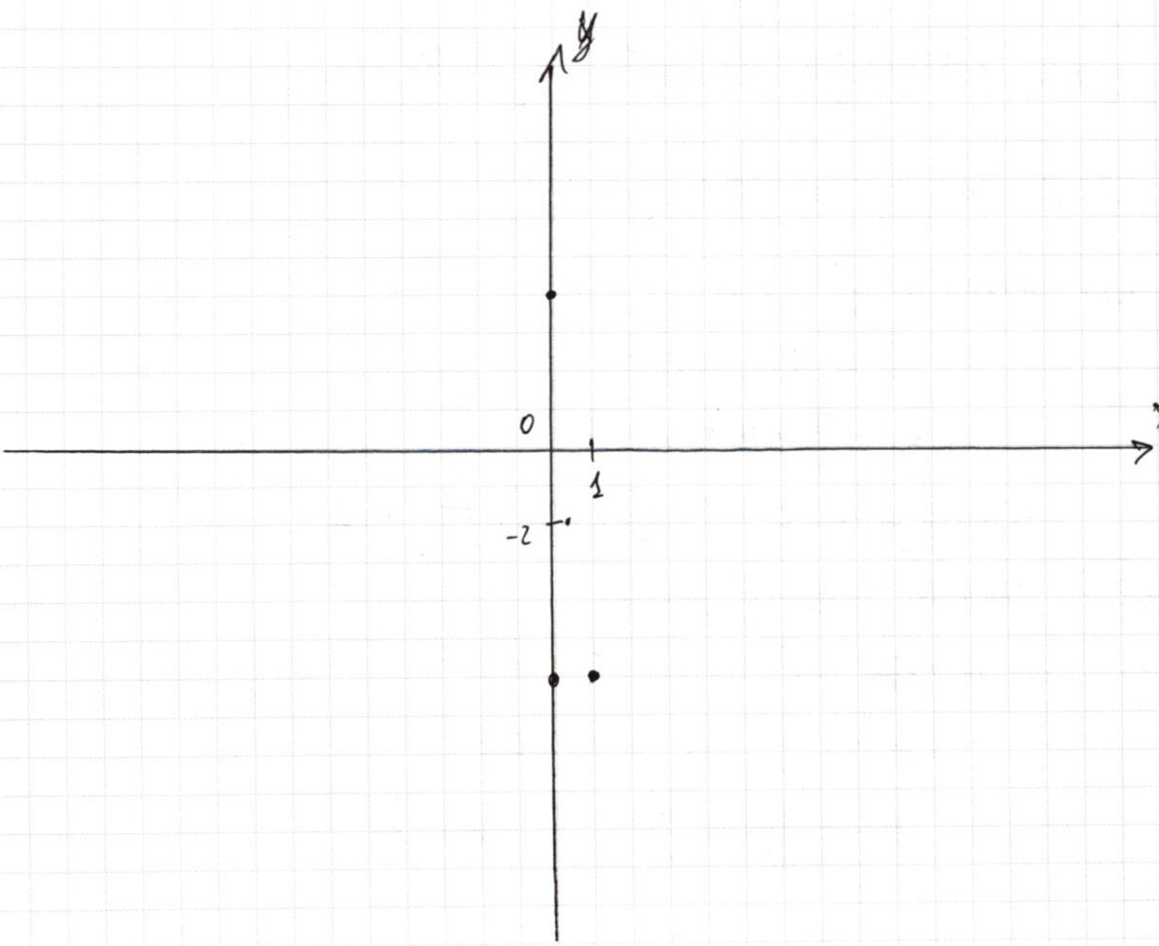
(1): $\frac{-2(3x-4)}{3x-2} = -2\left(1+\frac{2}{3x-2}\right) = -2-\frac{4}{3x-2}$ – ф-ция обратной пропорцион., график - гипербола

(2): $ax+b$ – линейная ф-ция, график - прямая

(3): $18x^2-51x+28$ – квадратичн. ф-ция, график - парабола

$$x_в = \frac{51}{36}$$

$$y_в = 18\cdot\frac{51^2}{36} - 51\cdot\frac{51}{36}+28 = \frac{17\cdot 51^2}{36}+28 =$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№1)

$$\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{4}-\alpha+\pi k\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}+\pi k\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\alpha+\frac{3\pi}{4}+\pi k=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi m,\ m\in Z$$

$$\alpha=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$$

$$tg\alpha=tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\frac{3\pi}{4}\right)+2\pi m$$

$\boxed{\text{Используем формулу } tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}}$ $\Rightarrow tg\alpha=\frac{tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)-tg\frac{3\pi}{4}}{1+tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)\cdot tg\frac{3\pi}{4}}$

$$=\left|tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=\frac{\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)}{\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\pm\sqrt{\frac{17-1}{17}}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{\pm\sqrt{17}}{4}=\pm\frac{1}{4}\right|=$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{-\frac{1}{4}+1}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5} \\ tg\alpha=\frac{\frac{1}{4}+1}{1+\frac{1}{4}\cdot(-1)}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{5}{3}\end{array}\right.$$

Т.к. мы точно знаем, что есть не менее трёх значений тангенса $\Rightarrow\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{3}{5} \\ tg\alpha=\frac{5}{3}\end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\log_2^2 4+\log_8^4 16=\log_2 2^6=6$

$\log_a b+\log_a c=\log_a(b\cdot c)$

$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$

При $x(x-26)\geq 0$, т.о. $+$ $-$ $+$; 0 26

$(x^2-26x)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(x^2-26x)^{\log_5 12}\cancel{+x} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$a^{\log_5 12}\geq a+13^{\log_5 a}$

$\cancel{a^{\log_5 12}\geq a+a}$

$\log_5 a^{\log_5 12}\geq\log_5 a+\log_5 13^{\log_5 a}$

$\log_5 12\log_5 a\geq\log_5 a+\log_5 a\cdot\log_5 13$

$\log_5 a(\log_5 12-\log_5 13-\log_5 a)\geq 0$

$\log_5 a\cdot\log_5\frac{12}{13a}\geq 0$

$(5-1)\left(a-\frac{12}{13a}\right)\geq 0$

$a-\frac{12}{13a}\geq 0$

$\cancel{a\geq\frac{12}{13a}}$ $a\geq\frac{12}{13a}$

$\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{-2(3x-2)}{3x-2}$

$\cancel{a\geq a\ \frac{13a^2-12}{13a}\geq 0}$ $\frac{13a^2-12}{13a}\geq 0$

-2

$13a^2-12\geq 0$

$-3x-4\,|\,\frac{3x-2}{1+\frac{2}{}}$

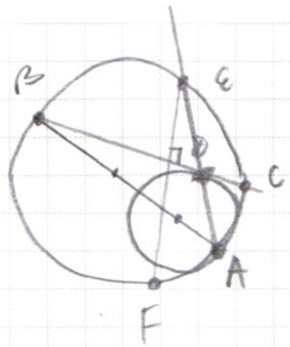
$x\neq\frac{2}{3}$

$\cancel{18x^2}-$

$x_8=\frac{51}{36}$

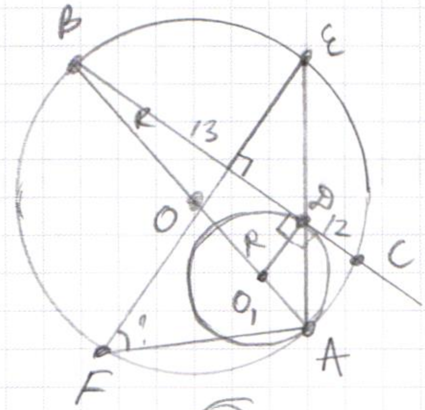
$-2(3x-4)$

$3x$



$CD = 12$

$BD = 13$



$R, r, \angle AFE, S_{\triangle AFE} - ?$

$BO = OA = R$

$O_1A = r$

AEBF − прямоуг.

$\Rightarrow EF = 2R = \frac{65}{6}$

$\triangle O_1BD \sim \triangle ABC$

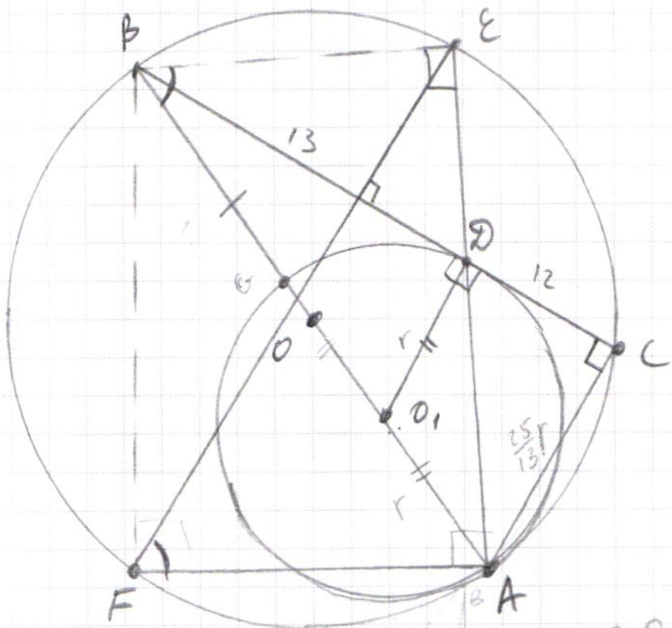
$\frac{O_1B}{AB} = \frac{BD}{BD+DC}$

$\frac{O_1B}{2R} = \frac{13}{25}$

$O_1B = \frac{26}{25}R$

$O_1A = 2R - \frac{26}{25}R = \frac{24}{25}R$

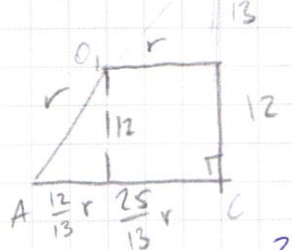
$r = \frac{24}{25}R$



$\frac{O_1D}{AC} = \frac{13}{25}$

$\frac{r}{AC} = \frac{13}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{13}r$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$



$r^2 - \frac{144r^2}{169} = 144$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^2 + \left(r + \sqrt{r^2+169}\right)^2 \quad 25^2 = \quad \frac{25}{169}r^2 = 144$

$BG \cdot BA = 25^2$

$\frac{5}{13}r = 12$

$r = \frac{26}{5} \Rightarrow R = \frac{25}{24} \cdot \frac{26}{5} = \frac{65}{12}$

$AB = \frac{65}{6}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 9a^2+b^2=90 \\ b-6a=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$36 \cdot 4 = 144$

$b^2-12ab+36a^2-ab=0$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$\cancel{D = 169a^2}$

$36a^2-13ba+b^2=0$

$D=169b^2-4\cdot 36b^2 = 169b^2-144b^2=25b^2=(5b)^2$

$$a_{1,2}=\frac{13b\pm 5b}{2\cdot 36} = \left[\begin{array}{l} \frac{18b}{72} \\ \frac{8b}{72} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} \frac{b}{4} \\ \frac{b}{9} \end{array}\right.$$

1) $a=\frac{b}{4}$

$9\cdot\frac{b^2}{16}+b^2=90 \mid \cdot 16$

$16\cdot 9 = 144$

$9b^2+16b^2=1440$

$25b^2=1440$

$b^2=57\frac{15}{25}=\frac{288}{5}$

$b=\pm\sqrt{\frac{288}{5}}$

$a=$

$25\cdot5=125$, $25\cdot6=150$, $25\cdot8=200$, $25\cdot7=175$

$1440 : 25 = 57$, -125, 190, -175, 15

$\frac{1440}{25}=\frac{288}{5}$

$25\cdot5=125$, $125+15=140$

$1440 : 5 = 288$, -10, 44, -40, 40

$57\cdot25 = 285 + 114 = 1425$, $1425+15=1440$

$288\cdot5=1440$

$\sqrt{20{,}4-30\sqrt{0{,}4}-6+18\sqrt{0{,}4}-6+12\sqrt{0{,}4}+6} = \sqrt{26{,}4}$

$(1-3\sqrt{0{,}4})(6-12\sqrt{0{,}4}) = 6-18\sqrt{0{,}4}-12\sqrt{0{,}4}+36\cdot0{,}4 = 6+6\sqrt{0{,}4}$

$\sqrt{\cancel{6}+6\sqrt{0{,}4}-\cancel{6}+18\sqrt{0{,}4}-\cancel{6}+12\sqrt{0{,}4}+\cancel{6}} =$

$6-12\sqrt{0{,}4}-6+18\sqrt{0{,}4}=6\sqrt{0{,}4}$

$14{,}4+6=20{,}4$

$(1-3\sqrt{0{,}4})(6-12\sqrt{0{,}4}) =$
$= 6-18\sqrt{0{,}4}-12\sqrt{0{,}4}+36\cdot0{,}4$
$6-30\sqrt{0{,}4}+14{,}4=20{,}4-30\sqrt{0{,}4}$

$36\cdot4=14{,}4$

$y-6x=6-12\sqrt{0{,}4}-6+18\sqrt{0{,}4}=6\sqrt{0{,}4}$

$\sqrt{20{,}4-30\sqrt{0{,}4}-6+18\sqrt{0{,}4}-6+12\sqrt{0{,}4}+6}=$

$6\sqrt{0{,}4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(3x-3)^2 = 9x^2 - 18x + 9$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 - 45 = 45$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$y - 6x = \sqrt{y(x-1) - 6(x-1)}$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

П. $x - 1 = a$

$y - 6 = b$

$6x = 6(x-1) + 6 = 6a + 6$

$y = b + 6$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{cases} b + \cancel{6} - 6a - \cancel{6} = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b - 6a)^2 = ab \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$D = 169a^2 - 4 \cdot 36a^2 = (5a)^2$

$b_{1,2} = \frac{13a \pm 5a}{2} = \begin{matrix} 9a \\ 4a \end{matrix}$

① $b = 9a$

$(9a - 6a)^2 = 9a^2$

$9a^2 + 81a^2 = 90$

$90a^2 = 90$

$a^2 = 1$

$a = \pm 1 \Rightarrow b = \pm 9$

Обр. замена:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 6 = 9 \end{cases} \\ &\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 6 = -9 \end{cases} \end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \oplus \\ &\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Проверка: $\oplus$

$15 - 12 = \sqrt{30 - 12 - 15 + 6}$ ($3 = 3$)

$\oplus$ $36 + 225 - 36 - 12 \cdot 15 = 45$

② $b = 4a$

$9a^2 + 16a^2 = 90$

$a^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

$a = \pm\sqrt{\frac{18}{5}} = \pm 3\sqrt{0,4} \Rightarrow \left[\begin{aligned} b &= 12\sqrt{0,4} \\ b &= -12\sqrt{0,4} \end{aligned}\right.$

Обр. замена: $x - 1 = 3\sqrt{0,4}$

$x = 3\sqrt{0,4} + 1$

$y - 6 = 12\sqrt{0,4}$

$y = 6 + 12\sqrt{0,4}$

$y \geq 6x$

$6 + 12\sqrt{0,4} \geq 18\sqrt{0,4} + 6$

Пров.: $\cancel{6 + 12\sqrt{0,4} - 18\sqrt{0,4} = \sqrt{(3\sqrt{0,4}+1)(6+12\sqrt{0,4}) -}}$

$9 \cdot (3\sqrt{0,4} + 1)^2 + (6 + 12\sqrt{0,4})^2$

$6 + 12\sqrt{0,4} - 18\sqrt{0,4}$

$(y-6)(x-1) \geq 0$

$++$ $\begin{cases} y \geq 6 \\ x \geq 1 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 0,4 \\ \hline 14,4 \end{array}$$

$--$ $\begin{cases} y \leq 6 \\ x \leq 1 \end{cases}$

$(3\sqrt{0,4} + 1)(6 + 12\sqrt{0,4}) - 6(3\sqrt{0,4} + 1) -$

$- 6 - 12\sqrt{0,4} + 6 =$

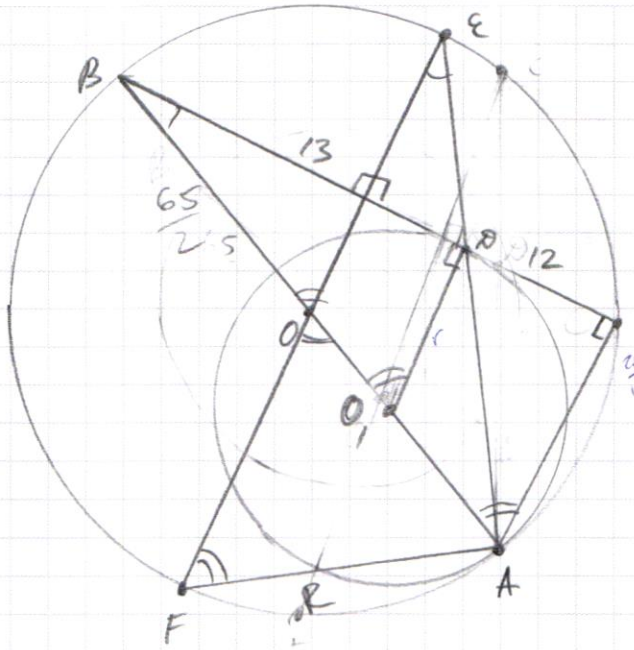
$= \cancel{18\sqrt{0,4}} + 6 + 36 \cdot 0,4 + 12\sqrt{0,4} -$

$- \cancel{18\sqrt{0,4}} - 6 - 6 - 12\sqrt{0,4} + 6$

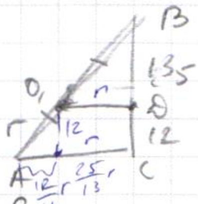
$\sqrt{14,4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\angle AFE = \angle BAC$



156

$\frac{2}{24}$

144

$156 \,|\, \frac{12}{13}$

$\frac{25}{13}r - \frac{13}{13}r = \frac{12}{13}r$

$\frac{O_1B}{AB} = \frac{13}{25}$

$\frac{O_1B}{2R} = \frac{13}{25} \Rightarrow \boxed{O_1B = \frac{26}{25}R}$

$O_1A = 2R - \frac{26}{25}R = \frac{24}{25}R$ $\quad \frac{r}{AC} = \frac{13}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{13} r$

$144 + \frac{144 r^2}{169} = r^2$

$r = \frac{24}{25}R \qquad 144 = r^2\left(\frac{25}{169}\right)$

$EF = 65 \qquad 12 = r \cdot \frac{5}{13} \Rightarrow r = \frac{12 \cdot 13}{5} = \boxed{\frac{156}{5}}$

$\sin\angle AFE = \sin\angle BO_1D = \frac{13}{13^2}\cdot 5 = \frac{5}{13}$

$R = \frac{25}{24} r = \frac{\cancel{25}}{\cancel{24}} \cdot \frac{\cancel{156}}{\cancel{5}} = \boxed{\frac{65}{2}}$

$\frac{\cancel{26}}{\cancel{25}} \cdot \frac{\cancel{65}}{8} = \frac{13^2}{5}$

$\angle AFE = \boxed{\arcsin\frac{5}{13}}$

$AF = R$, т.к. $\angle AOF$ – р/б

$\Rightarrow S_{\Delta AFE} = \frac{1}{2} EF \cdot AF \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{2}\cdot 2R^3 \cdot \frac{5}{13}$

$\frac{1}{2}\cdot 2 \cdot \frac{65^2}{4} \cdot \frac{5}{13} =$

$= \frac{65 \cdot \cancel{65}}{4} \cdot \frac{5}{\cancel{13}}$

$65 \times 25 = 325 + 130 = 1625$

$1625 \,|\, 4 = 406$, -16, 25, -24, 1

$12 \times 13 = 36 + 12$

$156 \,|\, 5 = 31$

$65 \,|\, 2$

$406 \times 4 = 1624$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+9$

$(3x-3)^2=9x^2-18x+9$

$y^2-2\cdot y\cdot 6+36$

2) $\cancel{9x^2-18x+9-9+y^2-12y+36-36-45=0}$

$\cancel{(3x-3)^2+(y-6)^2=45}$

① $y-6x=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}$

$y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

② $9x^2-18x+9-9+y^2-12y+36-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2-45=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$(y-6)^2=90-(3x-3)^2=$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \end{cases}$$

П. $x-1=a$, $y-6=b$

$y=b+6$

$6x=6a+6$

$$\begin{cases} 9a^2+b^2=90 \\ b+6-6a-6=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$b-6a=\sqrt{ab}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

1) $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2) $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

2) $\sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2) $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$= \sin x \cos y + \cancel{\sin y \cos x} + \sin x \cos y - \cancel{\sin y \cos x} =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

(2) $2\sin 2(\alpha+\beta)\cos\beta = -\frac{2}{17}$

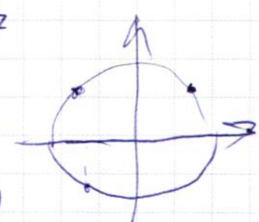
$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos\beta = -\frac{2}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos\beta = -\frac{2}{\cancel{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{1}$

$\sqrt{17}$

$\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$



$\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

$-\pi$ r.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cos\beta$ $\qquad \sin(2\alpha+$

~~$\sin(2(\alpha+\beta)) = \sin(\frac{\pi}{2}-\beta)$~~

$2\alpha+2\beta = \frac{\pi}{2} - \beta + 2\pi k$

$2\alpha+2\beta = \pi - \frac{\pi}{2} + \beta + 2\pi k$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = \sin(\beta + \frac{\pi}{2})$

$2\alpha+2\beta = \beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + 2\pi k$

$2\alpha+2\beta = \frac{\pi}{2} - \beta + 2\pi k \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 3\beta + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{3\beta}{2} + 2\pi k$

tg

$tg\,\alpha =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$93 \cdot 4 = 372$ sin

$2; 15$ $\quad 36+225-36-12\cdot 15 = 45$

$1-3\sqrt{0,4}; 6-12\sqrt{0,4}$

$1-6\sqrt{0,4}+9\cdot 0,4 \qquad 36-144\sqrt{0,4}+12\cdot 0,4$

$9-54\sqrt{0,4}+81\cdot 0,4+36-\cancel{144}\sqrt{0,4}+12\cdot 0,4-18+54\sqrt{0,4}-$

$-72+144\sqrt{0,4} = 93\cdot 0,4 - 45$

$=$

$9\cdot(1-6\sqrt{0,4}+9\cdot 0,4)+36-144\sqrt{0,4}+12\cdot 0,4-$

$-18(1-3\sqrt{0,4})-12(6-12\sqrt{0,4}) =$

$= 9-\cancel{54}\sqrt{0,4}+81\cdot 0,4+36-\cancel{144}\sqrt{0,4}+12\cdot 0,4-$

$-18+\cancel{54\sqrt{0,4}}-72+\cancel{144\sqrt{0,4}} =$

$= \underbrace{9+36}_{45}\underbrace{-18-72}_{-90}+81\cdot 0,4+12\cdot 0,4 =$

$= \quad -45+37,2 \quad -45+$

$81+144 = 235 \qquad 235\cdot 4 = 940 \qquad 144+81 = 225 \qquad 225\cdot 4 = 900$

$x^2 = 1-6\sqrt{0,4}+9\cdot 0,4$

$y^2 = 36-144\sqrt{0,4}+144\cdot 0,4$

$9-\cancel{54}\sqrt{0,4}+81\cdot 0,4+36-\cancel{144}\sqrt{0,4}+144\cdot 0,4-$

$27-90 = -63$

$-18+54\cancel{\sqrt{0,4}}-72+144\cancel{\sqrt{0,4}} = 9+36-18-72+(144+81)\cdot 0,4$

$= 90 - 63 + 90$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)