МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\underbrace{\sin 2\alpha}_{x}\cos 2\beta+\sin 2\beta\underbrace{\cos 2\alpha}_{\pm\sqrt{1-x^2}}=$

$=x\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sqrt{1-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

произведение $\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$ имеет знак "+" ($\sin 2\beta\geq 0, \cos 2\alpha\geq 0; \sin 2\beta\leq 0,$ $\cos 2\alpha\leq 0$) или "−" ($\sin 2\beta\geq 0, \cos 2\alpha<0; \sin 2\beta<0,$ $\cos 2\alpha\geq 0$) причем нужно найти $tg\alpha$ при ~~любых~~ разных β. Разберем случай "+"

$x+4\sqrt{1-x^2}=-1$,

$x+1=-4\sqrt{1-x^2}$,

$x^2+2x+1=16-16x^2, \quad x+1\leq 0$

$17x^2+2x-15=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow tg\alpha=tg(-\frac{\pi}{4}+\pi k), k\in\mathbb{Z} \\ x=\frac{15}{17} - \text{н.к. } x+1\leq 0 \end{array}\right.$

$\underset{\boxed{-1}}{\shortparallel}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

случай 4_4:

$x+1=4\sqrt{1-x^2}$

$x^2+2x+1=16-16x^2$, $x+1\geq 0$

$17x^2+2x-15=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \text{ - рассмотрен} \\ x=\frac{15}{17} \end{array}\right.$

$\cancel{x=}$ $\sin 2\alpha=\frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha=\pm\frac{8}{17}$

$tg\, 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\pm\frac{15}{8}$, $tg\alpha=y$

$\left[\begin{array}{l} \frac{15}{8}=\frac{2y}{1-y^2} \\ -\frac{15}{8}=\frac{2y}{1-y^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm\frac{5}{3} \\ y=\pm\frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $\pm\frac{5}{3}; \pm\frac{3}{5}; -1$

3) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

т.к. $\log_5(26x-x^2)$ сущ., то $|x^2-26x|=-x^2+26x=\alpha$

$\alpha^{\log_5 12}+\alpha\geq 13^{\log_5\alpha}$

$12^{\log_5\alpha}+5^{\log_5\alpha}\geq 13^{\log_5\alpha}$

$12^q+5^q\geq 13^q \quad |:13^q>0$

$\left(\frac{12}{13}\right)^q+\left(\frac{5}{13}\right)^q\geq 1$ при $q>2$ $\left(\frac{12}{13}\right)^q<\left(\frac{12}{13}\right)^2$, т.к. $\frac{12}{13}<1$

$\left(\frac{\cancel{12}\,5}{13}\right)^q<\left(\frac{\cancel{12}\,5}{13}\right)^2$

т.к. $\frac{5}{13}<1$

при $q \leq 2$:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^q \geq \left(\frac{12}{13}\right)^2, \left(\frac{5}{13}\right)^q \geq \left(\frac{5}{13}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{12}{13}\right)^q + \left(\frac{5}{13}\right)^q \geq 1$$

т.е. $\log_5 \alpha \leq 2$

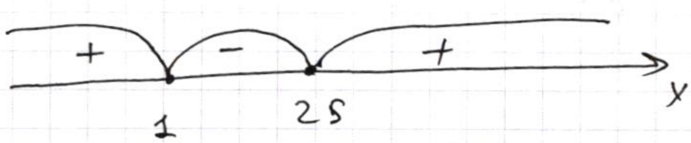
$$\Updownarrow$$

$$\log_5 (26x - x^2) \leq 2$$

$26x - x^2 \leq 25$ – т.к. $5 > 1$

$$x^2 - 26x + 25 \geq 0$$

$$(x-1)(x-25) \geq 0$$



$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

но $26x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0; 26)$

т.к. $\log_5(26 - x^2)$ сущ.

т.е. $x \in \Big((-\infty; 1] \cup [25; +\infty)\Big) \cap (0; 26) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$y^2+36x^2-12xy=xy-6x-y+6, \; y\geq 6x$

$y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0$

$D=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$y=\dfrac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y=9x-3 \quad (1) \\ y=4x+2 \quad (2) \end{array}\right.$

~~подставляя~~ ~~(1)~~ $y=9x-3$;

$9x^2-18x+81x^2-54x\cancel{+9}-12\cdot 9x+\cancel{12\cdot 3}=\cancel{45}$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{7}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} y=-3 \; - \text{п.к. } y\geq 6x \\ y=\frac{48}{5} \end{array}$

подставляя $y=4x+2$:

$9x^2-18x+16x^2+16x+4-12\cdot 4x-12\cdot 2=45$

$\underset{5}{\cancel{25}}x^2-\cancel{2}\,\underset{10}{\cancel{50}}x-\underset{13}{\cancel{65}}=0$

$x=\dfrac{10\pm 6\sqrt{10}}{10}=1\pm 0{,}6\sqrt{10}$

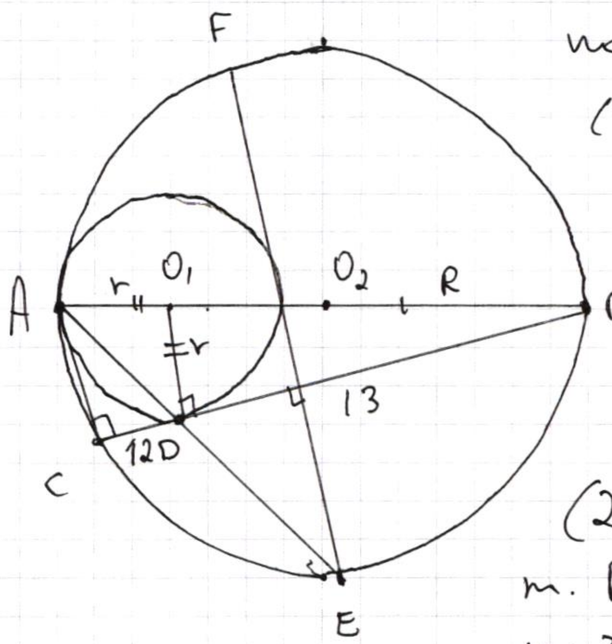
$\left[\begin{array}{l} y=6+2{,}4\sqrt{10} \leq 6+3{,}6\sqrt{10} \; -\text{п.к} \\ y=6-2{,}4\sqrt{10} \geq 6-3{,}6\sqrt{10} \end{array}\right.$ $(1-0{,}6\sqrt{10};\,6-2{,}4\sqrt{10})$

Ответ: $\left(\frac{7}{5};\,\frac{48}{5}\right)$, $(1-0{,}6\sqrt{10};\,6-2{,}4\sqrt{10})$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



Δ-ки BDO_1 и BCA подобны по 2м углам

($\angle ACB = 90°$ - т.к. AB - диаметр)

$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25}$ - из подобия

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r$

$(2R-r)^2 + r^2 = 13^2$ - по т. Пифагора

$4R^2 + 2r^2 - 4Rr = 169$

$4R^2 + 2\cdot\left(\frac{24}{25}R\right)^2 - 4\cdot R\cdot\frac{24}{25}R = 169$

$R^2\left(4 + \frac{576}{625}\cdot 2 - \frac{96}{25}\right) = 169$

~~$R^2\cdot\frac{1252}{625} = 169$~~

~~$R = \frac{13}{25\sqrt{1252}} = \frac{13\sqrt{1252}}{25\cdot 1252}$, $r = \frac{13}{24}$~~

$R\cdot\frac{1252}{625} = 169$, $R = \cancel{\frac{13\sqrt{1252}}{25\cdot 1252}}$, $r=$

$R = \frac{13}{25\sqrt{1252}}$, $r = \frac{312}{625\sqrt{1252}}$

$y = \frac{18x-6}{2} = 9x-3$

$\times\frac{12}{9}$ 108

$\times\frac{96}{25}$ 480 192 6400

$y = \frac{8x+4}{2} = \cancel{8}4x+2$

$9x^2 - 18x + 81x^2 - 54x + \cancel{9} - 12\cdot 9x + \cancel{12\cdot 3} = \cancel{45}$

$\cancel{9}\,\cancel{90}x^2 - \cancel{9}\cdot 14x = 0$ (10)

2400

$10x^2 - 14x = 0$

$1252 =$

$x = 0$

$x = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$

1252

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5(26-x^2)}$

$(26-x^2)^{\log_5 13}$ (4)

$f(2)=1$

$\frac{4}{25}$

$f(2)=f(1)+f(2)$

$626\cdot 2 =$
$= 313\cdot 2$

$f(1)=0$

$f(p)=f(1)+f(p)$

$\frac{1152+96\cdot 25}{625}$

$f(3)=1$

$f($

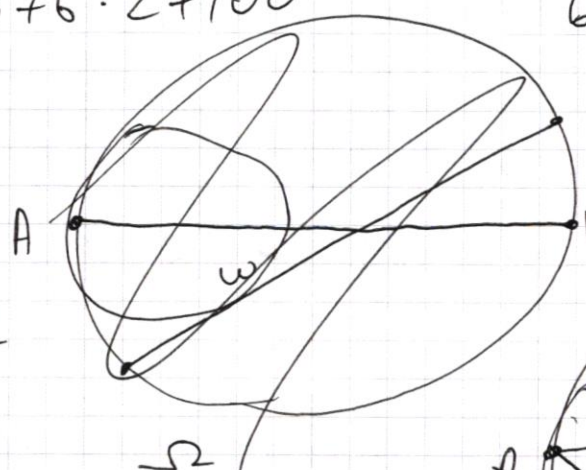
$576\cdot 2+100$

$\frac{576}{625}\cdot 2+4-$

$-\frac{96}{25}$

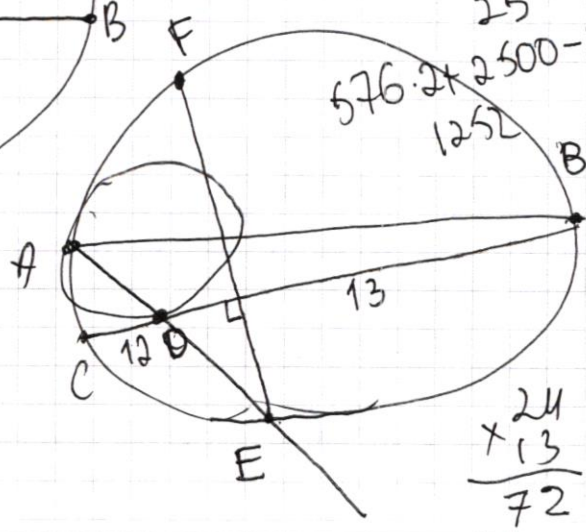
$f(4)=2$

$f(8)=3$



$626\cdot 2$

$576\cdot 2+2500-2400$
1252



$\frac{2500+1152-96\cdot 25}{625} = 169$

$\times\frac{24}{13}$ 72 24 312

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$ $\quad y \geqslant 6x$

$(3x+3)^2+(y-6)^2=90$ $\quad xy=y^2-1$

$(3x+3)^2+\frac{(y-6x)^4}{(x-1)^2}=90$

$(3x+3)^2+(6x-6)^2=$

$9(x+1)^2+36(x-1)^2=90$

$9x(x-2)+y(y-12)=45$

3

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \quad y \geqslant 6x \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$(y-6x)^2=xy-6x-y+6=(y-6)(x-1)$

$\cancel{9x^2}$ $y^2-12y+9x^2-18x-45=0$

$D=144-4\cdot 9x^2+4\cdot 18x+180=$

$=324+72x-36x^2=\cancel{(18x+18)^2}-$

$-40x^2$

$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2=(y-6)(x-1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$y^2-13xy+36x^2-6+6x+y=0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$(y-6x)=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}$

$(y-6x)=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$(y-6)(x-1)=(y-6x)^2$

$(y-6)=\dfrac{(y-6x)^2}{(x-1)}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(y-6)^2+9(x-1)^2=90$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y-6$

$\cancel{y^2=13xy-6x-y-6-36x^2}$

$|a|^{\log_5 12}\geqslant a+13^{\log_5(-a)}$ $a<0$

$(-a)^{\log_5 12}\geqslant a+13^{\log_5(-a)}$

$12^{\log_5 -a}\geqslant a+13^{\log_5 -a}$

$12^{\log_5(-a)}=(-a)^{\log_5 12}$

$\cancel{\ln(-a)}$

$\log_5(-a)\cdot\ln 12=\ln(-a)\cdot\log_5 12$

$\dfrac{\ln(-a)}{\ln 5}\cdot\ln 12=\dfrac{\ln(-a)\ln 12}{\ln 5}$

$\dfrac{63}{5}-3=\dfrac{48}{5}$

$y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0$

$D=1-26x+169x^2-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=0$ $y=\dfrac{13x-1\pm(5x-5)}{2}$ и

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$ $\quad tg 2\alpha = \frac{15}{8} = \frac{2q}{1-q^2}$

$\cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}$

$15 - 15q^2 = 16q$

$15q^2 + 16q - 15 = 0$

$D = 256 + 15\cdot15\cdot4 = (34)^2$

$256 + 60\cdot15 = 900$ $\quad q = \frac{-16 \pm 34}{30}$

$346 = 1156$

$4(64+225) = 4\cdot17^2$ $\quad q = -\frac{50}{30} = -\frac{5}{3}$

289 $\quad q = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

34×34: 136, 102, 1156

$\frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{16}{25}} = \frac{\frac{6}{5}}{0{,}8} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{4}{5}} =$ $\quad \frac{-\frac{10}{3}}{1-}$

$= \frac{\cancel{25}\cdot 6}{\cancel{5}\cdot16} = \frac{30}{8}$ $\quad 15\cdot\frac{3}{25}$

$\cancel{15}\cdot\frac{9}{\cancel{25}} + 16\cdot\frac{3}{5} - 15 =$

$\frac{27}{5} + \frac{48}{5} = 15$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \Leftrightarrow (y-6)(x-1)=(y-6x)^2 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$5x^2-10x-13=0$

$D=100+4\cdot 13\cdot 5=$

$$y^2-12xy+36x^2=yx-6x+6-y$$

$360=6\sqrt{10}$

$$9x^2+13xy-36x^2-6x+6-y+12y-18x-45=0$$

$$\cancel{-27}\quad -27x^2+\cancel{13x}\,x(13y-24)+11y-39=0$$

$$D=(13y-24)^2+4\cdot 27\cdot(11y-39)$$

$$\cancel{9^{\log_5 12}+9\geqslant 9^{\log_5 12+\log_5\frac{13}{12}}}$$

$\frac{10\pm 6\sqrt{10}}{10}$

$$\cancel{\log_5 12-\quad \left(9^{\log_5 12}\right)^{\log 1-\log_{12}5}\geqslant\left(9^{\log_5 12}\right)^{\log_{12}13}}$$

$1\pm 0{,}8\sqrt{10}$

$$1-\log_{12}5 \wedge \log_{12}13$$

$$1\wedge \log_{12}13+\log_{12}5=\log_{12}13$$

$$9^{\log_5 12}+9\geqslant 9^{\log_5 13}$$

$$1\wedge 9^{\cancel{\log_5 13\ \ln\log\log_5 13-9}}$$

$$13^{\log_5(26-x^2)}\leqslant 13^{2\log_5 13}$$

$$\cancel{\log}\ 9^{\log_5 12}+9\geqslant 9^{\log_5 13}$$

$-18x+16x-48x$

-2

$4-24$

$-20-45=-65$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-9x^2-18x-\cancel{36}-y^2-12y-$

$\cancel{-9(x^2+2x+4)}$

$-9(x^2+2x+1)-(y^2+12y+36)+18x^2+2y^2=0$

$-(3x+3)^2-(y+6)^2+18x^2+2y^2=0$

$\sqrt{18x^2}$ $\cancel{(\sqrt{18}x-3x+3)(}$

$q=-a, \ q>0$

$12^{\log_5 q}+q \geqslant 13^{\log_5 q}$

$q \geqslant 13^{\log_5 q}-12^{\log_5 q}$

$\cancel{1}\ 1 \quad (a^x)'=a^x \ln x$

$a \ \cancel{13^x \ 13^{\log_5 q} \ln(\log}$

$13^{\log_5 q} \cdot \ln \log_5 q \cdot \frac{1}{q \ln 5} - 12^{\log_5 q}$

$\cancel{\frac{\ln \log_5 q}{q \ln 5}}$

$q \geqslant q^{\log_5 13}-q^{\log_5 12}$

$q \geqslant q(1^{\log_5 13}-1^{\log_5 12})$

$q \geqslant q^{\log_5 12}(\cancel{1-q}\ q^{\log}$

$\sin(2\alpha + \sin 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos\alpha =$

$= \underset{x}{\underset{\shortparallel}{\sin 2\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \pm \underset{\sqrt{1-x^2}}{\underset{\shortparallel}{\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

⊖ ⊕
⊕ ⊖
⊕ ⊕
⊖ ⊖

$x + \sqrt{1-x^2} \cdot 4 = -1$

$x + 1 = -4\sqrt{1+x^2}$

$x^2 + 2x + 1 = \cancel{4x}\ 16 - 16x^2, \ x+1 \leq 0$

$17x^2 + 2x - 15 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 15 \cdot 17 = 4 \cdot (15 \cdot 17 + 1) = (4 \cdot 16^2) =$

$\Rightarrow x = \frac{-2 \pm 32}{\cancel{17}\ 34}$

$\times \begin{array}{r} 15 \\ 17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ \hline 255 \end{array}$

$256 = 2^8 = 16^2$

$x = -\frac{\cancel{34}}{17} \stackrel{-1}{} \ \cancel{x} -1$

$\cancel{x = \frac{30}{17}}$ $\quad x = \frac{30}{34} = \frac{\cancel{2}15}{17}$

$x = \frac{30}{17}$

$17^2 - 15^2 = 289 - 225 = 64$

$x = -1$

$x = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\frac{15}{17} \quad \frac{8}{17}$ 4

$\sin 2\alpha = -1$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$tg\,\alpha = -1$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\cancel{2}1}{\sqrt{17}}$

$y \cdot \sqrt{1-y^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}, \ y > 0$

$y^2 \cdot (1 - y^2) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} \frac{1}{17}$

$y^2 - y^4 = \cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}} \frac{1}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x+2y)+\sin x = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2\sin(x+y) = \sin(x+2y)+\sin x}$

$\cancel{2(\sin x\cos y + \sin y \cos x) = \sin x \cos 2y + \sin 2y \cdot}$

$\cancel{\cdot \cos x + \sin x}$

$\cancel{tg(x+y}$ $\cancel{tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} =}$

$\cancel{= \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \cancel{2}\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}$

а) $\cancel{\sin}\ x\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} + \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$

$x + \sqrt{1-x^2}\cdot 4 = -1$

$-(x+1)^2 = \sqrt{1-x^2}$ $\quad x^2+2x+\cancel{1} = \cancel{1}-x^2$ $\begin{cases} x=0 \\ x=-1\end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 0\\ \sin 2\alpha = -1\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\alpha = \frac{2\pi k}{2} = \pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \alpha = \cancel{\pi + 2\pi k}\ \frac{3\pi + 2\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\cancel{\operatorname{tg}\alpha = \pi}$$

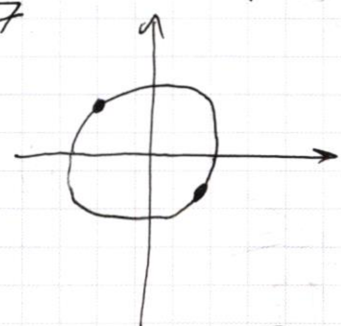
$$\operatorname{tg}\alpha = -1$$

$$x\frac{1}{\sqrt{17}} - \sqrt{1-x^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$-\sqrt{1-x^2} = -1 - x$$

$$-1 + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2x + 1$$

$$\boxed{x = -1}$$



$$\sin 30 + \sin 60 = 2\cdot\sin 48^\circ\cdot\cos 30^\circ = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

$$x \qquad y \qquad \frac{x+y}{2} \qquad \frac{x-y}{2}$$

$$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}} \Leftrightarrow \boxed{\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

~~17~~ 17

$$y^4 - y^2 + \frac{1}{17} = 0$$

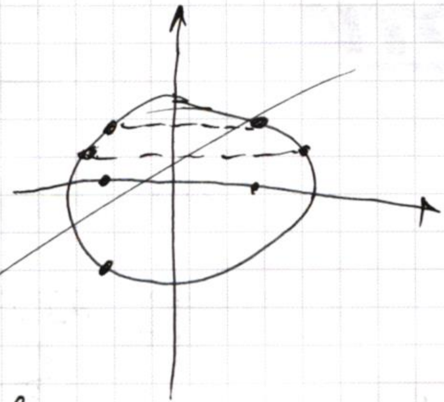
$$17y^4 - 17y^2 + 1 = 0$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot 17 = 17 \cdot 13$$

$$y = \frac{17 \pm \sqrt{17 \cdot 13}}{34} = a \text{ и } b$$

$$\cancel{tg\, 2\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{17}}}$$

$$y = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{17 \cdot 13}}{34}$$



$$\cancel{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \pm\frac{\cancel{2}}{17}$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{17}$$

$$y \cdot \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{17}$$

$$289y^2 - 289y^4 - 1 = 0$$

$$\cancel{D =} \quad 289y^4 - 289y^2 + 1 = 0$$

$$D = \frac{289^2 - 4 \cdot 289}{2} = 289 \cdot 285$$

$$17 \cdot \frac{4}{17^2} + \frac{4}{17} - 15 = 0$$

$$\cancel{17} \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = 15$$

$$\cancel{\frac{228 + 30}{17}} = 15$$

$$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{15}{\cancel{34}\, 17}$$

$$y \cdot \sqrt{1-y^2} = \frac{15}{34}$$

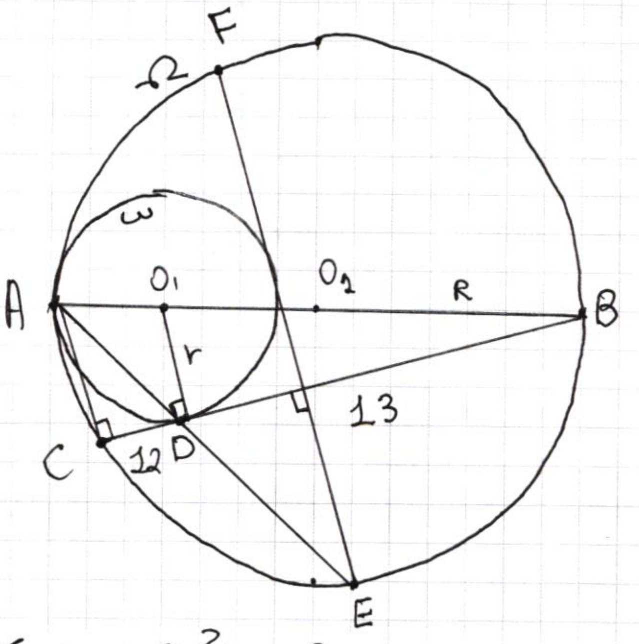
$$y^2 - y^4 = \left(\frac{15}{34}\right)^2$$

$$34^2 y^4 - 34^2 y^2 + 15^2 = 0$$

$$D = 34^4 - 15^2 \cdot 34^2$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\sqrt{4R^2-25^2} = \frac{25}{13}\cdot\sqrt{}$

$(2R-r)^2+r^2=169$

$\cancel{4}(2R)^2+\left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2=625$

$$\begin{cases} 4R^2+2r^2-4Rr=169 \\ 4R^2+\frac{625}{169}r^2=625 \end{cases}$$

$\cancel{r=\frac{5}{13}}$

$\cancel{4R^2} = 25\sqrt{1-\frac{r^2}{169}}$ $\quad r=5$

$2R$

$625-\frac{625}{169}r^2+2r^2-\cancel{4r\cdot 25}\ 2r\cdot 25\sqrt{1-\frac{r^2}{169}}$

$\frac{\cancel{25}}{13}\sqrt{\frac{169-r^2}{13}}$ $\quad \frac{13^2\cdot 5}{4\ \cancel{13\cdot 13}}$

$625-\frac{625}{169}r^2+2r^2-r\cdot\frac{25}{13}\sqrt{169-r^2}\cdot 2=169$

$\cancel{625}$

$4R^2+\frac{625}{\cancel{169}}\cdot\frac{\cancel{13^2}\cdot 25^2}{4}=625$

$16R^2+25^4=625 \quad 625\cdot 624$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

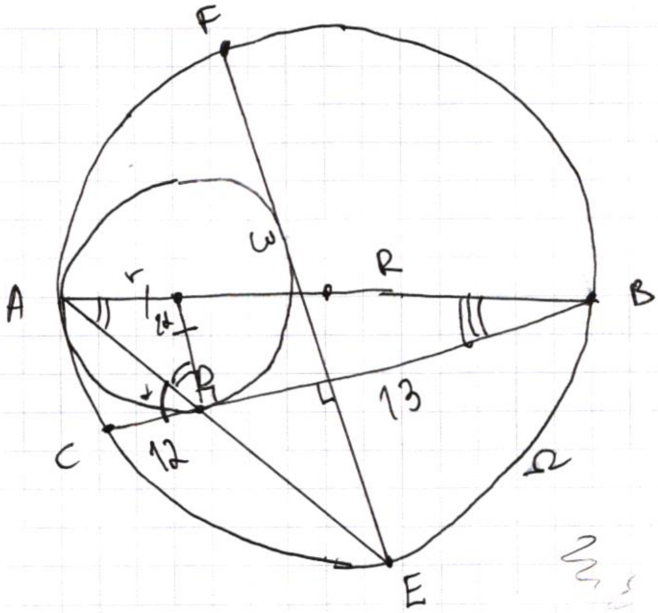
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



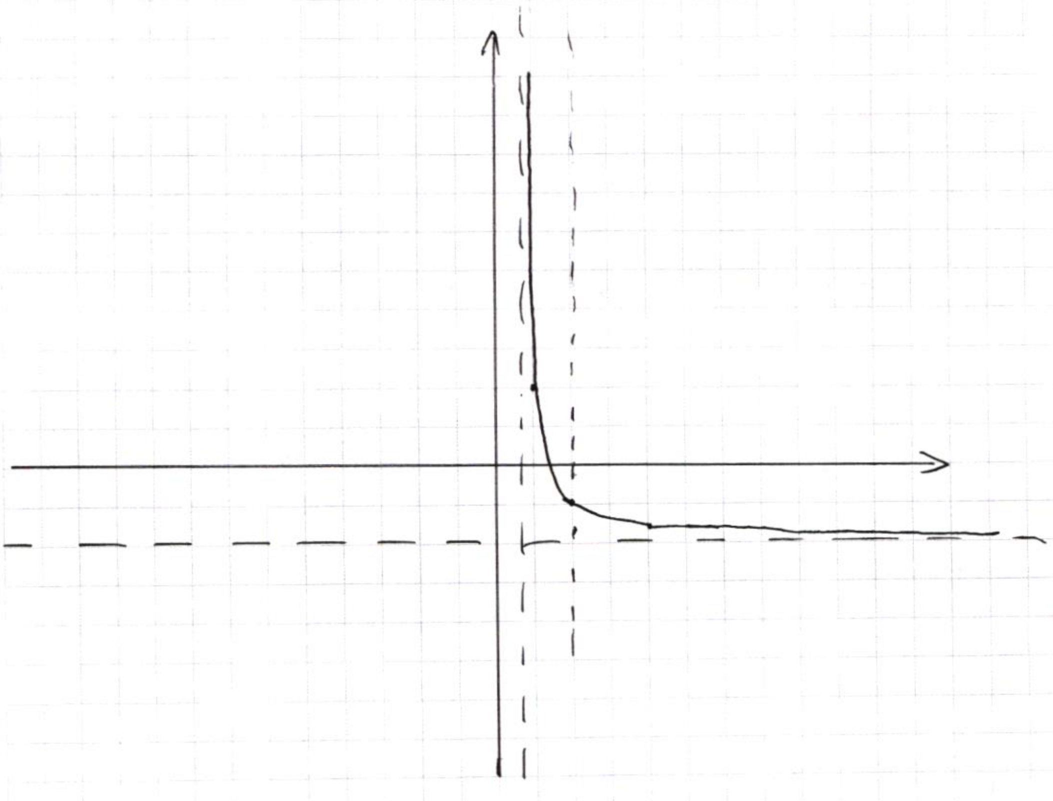
$$\alpha^{\log_5 12} + \alpha \geqslant 13^{\log_5 \alpha}$$

$$12^{\log_5 \alpha} + 5^{\log_5 \alpha} \geqslant 13^{\log_5 \alpha}$$

$$12^x + 5^x \geqslant 13^x$$

$$12^x + 5^x = 13^x$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\left(2 + \frac{-4}{3x-2}\right) = \frac{4}{3x-2} - 2$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)