МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ x-2y \geqslant 0 \end{cases}$

Замена: $a=(x-2)$; $b=y-1$.

$a-2b=x-2y$

$\cancel{(x-2y)^2} \neq$ $\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \\ a-2b \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a \geqslant 2b \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a \geqslant 2b \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a^2+9b^2=25 \\ a \geqslant 2b \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ a^2+9b^2=25 \\ a \geqslant 2b \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \cancel{\begin{cases} a=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ a \geqslant 2b \end{cases}}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ a \geqslant 2b \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} a=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ b=-\frac{5}{\sqrt{10}} \\ a \geqslant 2b \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ a=4 \\ a \geqslant 2b \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \\ a \geqslant 2b \end{cases} \varnothing \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{-5}{\sqrt{10}} \\ b=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$ Обр. зам.: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1. \end{cases} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array} \right.$

Ответ: $\left\{ \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2} \right); (6;2) \right\}$.

№3 $$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$$

Замена: $t = x^2+18x$, $t > 0$.

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$\begin{cases} t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Рассм. $g(t) = t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13}$. ① $D(g) = (0, +\infty)$

② $g(t) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \notin D(g) \\ \frac{t^{\log_{12}5}}{t} + 1 = t^{\log_{12}13}/t \end{array}\right. \Rightarrow t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 = t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

Рассм. 1. $f_1(t) = 1 + t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$ — ф-ция степенная

степень переменной $\log_{12}\frac{5}{12} < 0 \Rightarrow f_1(t)$ убывает на $D(g)$

($f_1'(t) = \log_{12}\frac{5}{12}\, t^{\log_{12}\frac{5}{144}} < 0$ при $t > 0$)

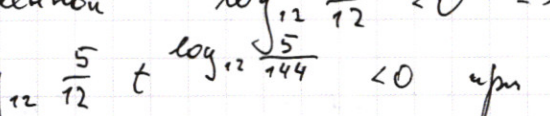
2. $f_2(t) = t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$ ф-ция степенная, степень $\log_{12}\frac{13}{12}$ $> 0 \Rightarrow f_2(t)$ возрастает на $D(g)$ ($f_2'(t) = \log_{12}\frac{13}{12}\, t^{\log_{12}\frac{13}{144}} > 0$)

3. $f_1(t)$ убывает на $D(g)$, $f_2(t)$ возрастает на $D(g) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ ур-ние $f_2(t) = f_1(t)$ имеет максимум один корень на $D(g)$

4. $t_0 = 144$ — корень $f_2(t) = f_1(t)$: $f_1(144) = \frac{25}{144} + 1 = \frac{169}{164}$

$f_2(t_0) = \frac{169}{164}$ $\Rightarrow$ из 3 и 4 t_0 — единственный корень.

и единственный нуль ф-ции $g(t)$

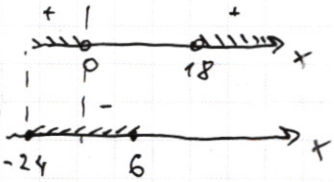
③ Знаки: 

$g(1) = 2 - 1 = 1 > 0$

$\Leftrightarrow$ $t \in (0; 144]$ Обр. зам.: $\begin{cases} x^2+18x > 0 \\ x^2+18x \leq 144 \end{cases} \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x(x-18)\geq 0 \\ x^2+18x-144\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-18)>0 \\ (x+24)(x-6)\leq 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow x\in[-24;0)$.

Ответ: $x\in[-24;0)$.

№5 $D(f)=(0,+\infty)$; $f(ab)=f(a)+f(b)$; $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ p - прост.

1. ~~f(1·x)~~ $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x) \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow f(a^0)=0$

2. $f(a^n)=f(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots}_{n \text{ раз}})=\underbrace{f(a)+f(a)+f(a)\ldots}_{n \text{ раз}}=$
$=n\cdot f(a)$, где $n\in\mathbb{N}$

3. $f\left(\frac{a}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f(1)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a) \Rightarrow f(a^{-1})=-f(a)$

4. $f(a^{-n})=f(\underbrace{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\ldots}_{n \text{ раз}})=\underbrace{f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{a}\right)\ldots}_{n \text{ раз}}=-n f(a)$
$n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ 5. $f(a^n)=n\cdot f(a)$ для $\forall n\in\mathbb{Z}$

6. Если $a\in\mathbb{N}$, то $a=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot p_3^{n_3}\ldots$, где $p_{1,2,3\ldots}$ - пр. числа. $n_{1,2,3\ldots}\in\mathbb{N} \Rightarrow f(a)=n_1\left[\frac{p_1}{4}\right]+n_2\left[\frac{p_2}{4}\right]+n_3\left[\frac{p_3}{4}\right]\ldots$
Если $a\notin\mathbb{Z}$, $a=\frac{m}{n}$; $n,m\in\mathbb{N}$, $f(a)=f(m)-f(n)$

7.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

$f(4)=2\cdot f(2)=0$ $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$. $f(6)=f(2)+f(3)=0$ $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$
$f(8)=3\cdot f(2)=0$ $f(9)=2\cdot f(3)=0$ $f(10)=f(2)+f(5)=1$ и т.д.

8. $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

n	число чисел a, таких, что $f(a)=n$	Число чисел a, таких, что $f(a)>n$
0	11	13
1	7	6
2	2	4
3	1	3
4	2	1
5	1	0

~~$a \in [1, 24]$~~

$a \in [1, 24]$; $\nexists\, a \in [1; 24]: f(a) > 5$.

$\Rightarrow N = 11\cdot 13 + 7\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 =$

$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 145 + 50 + 3 = 195 + 3 = 198$ — число искомых пар $(x; y)$.

Ответ: 198

№ 6

$$\begin{cases} \dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ ax+b \le -8x^2 - 30x - 17 \end{cases} \quad \forall x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$$

1. Рассм. $f(x) = \dfrac{12x+11}{4x+3}$ $\quad f(x) = 3 + \dfrac{2}{4x+3}$ — дробно-линейн. ф-ция

① $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}\}$ ② асимптоты: $\begin{cases} y = 3 \\ x = -\frac{3}{4} \end{cases}$

③ $f(x) = 3 + \dfrac{0,5}{x + 3/4}$

x	0	1/4	0.5	$-\frac{11}{4}$
y	$3\frac{2}{3}$	3,5	3,4	2,75

2. Рассм. $g(x) = -8x^2 - 30x - 17$ — ф-ция кв. гр. пар. ветви $\downarrow$, вершина: $x_в = -\dfrac{30}{2\cdot 8} = -\dfrac{15}{8}$ $\quad y_в = -8\cdot\dfrac{15^2}{8^2} + \dfrac{2\cdot 15^2}{8} - 17 =$

$= \dfrac{15^2}{8} - 17 = \dfrac{225 - 17\cdot 8}{8} = \dfrac{225-136}{8} = \dfrac{89}{8}$

Нули: $g(x) = 0 \Rightarrow 8x^2 + 30x + 17 = 0 \Rightarrow \dfrac{D}{4} = 225 - 8\cdot 17 =$

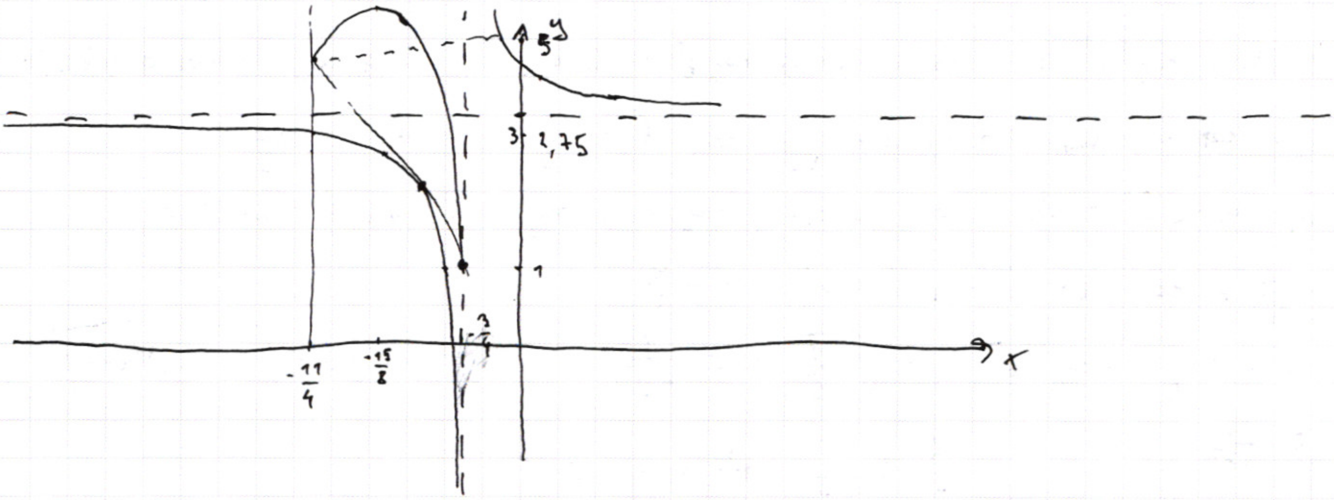
$= 89 \Rightarrow x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$ $\quad g\left(-\dfrac{11}{4}\right) = -\left(8\cdot\dfrac{11^2}{4^2} - \dfrac{30\cdot 11}{4} + 17\right) =$

$= -\left(\dfrac{2\cdot 11^2}{4} - \dfrac{30\cdot 11}{4} + 17\right) = -\left(17 + \dfrac{2\cdot 11(11-15)}{4}\right) = -(17 - 2\cdot 11) = +5.$

$g\left(-\dfrac{3}{4}\right) = -8\cdot\dfrac{9}{4^2} + 30\cdot\dfrac{3}{4} - 17 = \dfrac{30\cdot 3 - 2\cdot 9}{4} - 17 = \dfrac{15\cdot 3 - 9}{2} - 17 = 1.$

3. $y = ax + b$ — множество всех возможных прямых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$y = ax + b$ должна лежать между $f(x)$ и $g(x)$ на $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

Если $(-\frac{11}{4}; 5) \in y$ и $(-\frac{3}{4}; 1) \in y$, то

$\begin{cases} 5 = -\frac{11a}{4} + b \\ 1 = -\frac{3a}{4} + b \end{cases} \Rightarrow 4 = \frac{-11a + 3a}{4} = -2a \quad a = -2.$

$b = 1 + \frac{3a}{4} = 1 - \frac{3 \cdot 2}{4} = 1 - \frac{3}{2} = -0,5$

$\Rightarrow y = -2x - 0,5$ $\quad$ $y \cap f(x)$:

$\begin{cases} y = -2x - 0,5 \\ y = \frac{12x + 11}{4x + 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{4} \\ -(2x + \frac{1}{2})(4x + 3) = 12x + 11 \\ y = -2x - 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{4} \\ 16x^2 + 40x + 25 = 0 \\ y = -2x - 0,5 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{3}{4} \\ (4x + 5)^2 = 0 \\ y = -2x - 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = 2 \cdot \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow (-\frac{5}{4}, 2)$

$\Rightarrow y = -2x - 0,5$ – касательная к $f(x)$. Из графика видно, что $y = -2x - 0,5$ – ед. прямая, удовлетв. условию $\Rightarrow$ $(-2; -0,5)$ – ед. пара $(a; b)$, удовл. усл.

Ответ: $(-2; -0,5)$

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

Замена: $2\alpha = a$, $2\beta = b$.

$\sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\quad \sin(a+2b) + \sin a = -\frac{4}{5}$ *

* $\sin(a+2b) + \sin a = \sin a\,(2\cos^2 b - 1) + \cos a \cdot 2\sin b\cos b + \sin a =$

$= 2\sin a\cos^2 b + 2\cos a\sin b\cos b = 2\cos b\,(\sin a\cos b + \cos a\sin b) =$

$= 2\cos b \cdot \sin(a+b) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos b = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos b = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(a+2b) + \sin a = \sin(a+b)\cos b + \cos(a+b)\sin b + \sin a =$

$= -\frac{2}{5} + \cos(a+b)\sin b + \sin a = -\frac{4}{5}$

$\sin b = \pm\sqrt{1-\cos^2 b} = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \cos(a+b) = \pm\sqrt{1-\sin^2(a+b)} =$

$= \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad -\frac{2}{5} \pm \frac{2}{5} + \sin a = -\frac{4}{5}$

$\left[\begin{array}{l} \sin a = -\frac{4}{5} \\ \sin a = 0 \end{array}\right.$ т.к. Обр. зам.: $\left\{\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin 2\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$~~ $\quad \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \pm\frac{3}{5}$

~~$2\alpha = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$~~ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3} \ ^{1)} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3} \ ^{2)} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \ ^{3)} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0. \\ \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = \pm 2 \end{array}\right.$

1) $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{3}$ $\quad$ Зам.: $\operatorname{tg}\alpha = t$ $\quad \left\{\begin{array}{l} -6t = 4 - 4t^2 \\ t \neq \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t^2 + 3t - 2 = 0 \\ t \neq \pm 1 \end{array}\right.$

$D = 9 + 4\cdot 4 = 25$ ~~$\varnothing$~~ $\quad$ ~~2) Зам. $\operatorname{tg}\alpha = t$ $\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t^2 - 3t + 2 = 0 \\ t \neq \pm 1. \end{array}\right.$ $D<0 \Rightarrow \varnothing$ 3) $\operatorname{tg}\alpha = 0$~~ $\quad t = \frac{-3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

2) Зам. $\operatorname{tg}\alpha = t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ t \neq \pm 1 \end{array}\right.$ $\quad D = 25 \quad t = \frac{3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

3) $\operatorname{tg}\alpha = 0$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \{0; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2; -2\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{2t+11}{4t+3} \le at+b$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} t$

$1 \quad 4 \quad 7.$

$\times \begin{array}{r}17\\8\end{array}$
136

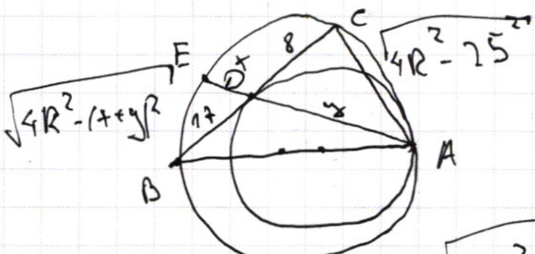
$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$-\begin{array}{r}225\\136\end{array}$
89

$3 + \frac{2}{3} =$

$\frac{1/2}{5/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$

$3 + \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{11}{4}+\frac{3}{4}} = 3 + \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{8}{4}} = 3 - \frac{1}{4} = 2,75$



$17^2 = 2(R-r) \cdot 2R.$

$17^2 = 4R(R-r)$

$xy = 17 \cdot 18$

$\frac{\sqrt{4R^2-25^2}}{EB}$

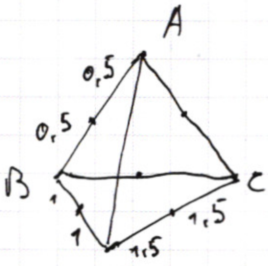
$\sqrt{\frac{4R^2-25^2}{4R^2-(17+y)^2}} = \frac{8}{x}$

$\sin(a+b)\cos b +$
$+\cos(a+b)\sin b + \sin a = -\frac{4}{5}$

$a(a+b) = 64$

$-\frac{1}{\sqrt5} \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos(a+b)$

$\sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt5}$



$\sin(a+2b) + \sin a = -\frac{4}{5}$

$2\cos b = \frac{4}{5} \cdot \sqrt5$

$\sin a \cos\beta + \sin b \cos\lambda = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos b = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin a(2\cos^2 b - 1) + \cos a \cdot \sin 2b + \sin a = -\frac{4}{5}$

$2\sin a \cos^2 b + 2\cos a \sin b \cos b = -\frac{4}{5}$

$2\cos b(\sin a \cos b + \cos a \sin b) = -\frac{4}{5}$

№7. Дано:

ABCD

A лежит на одной сфере с серединами ребер, кроме AD

AB = 1

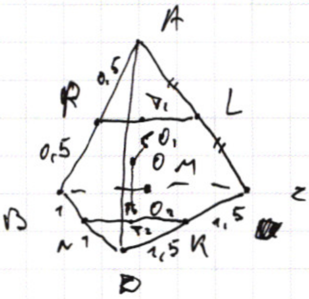
BD = 2

CD = 3

1) BC - ?

2) Найти рад. оп. сф. - ?

Реш.:



① Пусть P - сер AB

L - сер AC.

M - сер BC

N - сер BD

K - сер CD.

②. окр., описанная около △PLM ⊂ сфере KLMN, окр. оп. около △MNK ⊂ сфере KLMN.

③. O_1 - центр оп. окр. △PLM, O_2 - центр. оп. окр. △BCD. $O_1O \perp (ABC)$, $O_2O \perp (BCD)$ => O - центр. сферы KLMN. O ∈ сер. перп. к PL, O ∈ сер. перп. к NK => ∃ α: $\begin{cases} \alpha \perp PL \\ \alpha \perp NK \\ \alpha \cap PL = T_1 \\ T_1 - \text{сер. } PL \\ \alpha \cap NK = T_2 \\ T_2 - \text{сер } NK \end{cases}$

④ В △ABC KL - ср. л. => PL ∥ BC; $PL = \frac{1}{2}BC$

аналог. в △BDC: $\begin{cases} NK \parallel BC => NK \parallel PL; \ NK = PL. \\ NK = \frac{1}{2}BC \end{cases}$

⑤ в △BAD PN - ср. л. => $PN = \frac{1}{2}AD$, PN ∥ AD, аналог. в △ADC $LK = \frac{1}{2}AD$; LK ∥ AD => ⑥ PL = NK, PL ∥ NK => PLKN - парал. $T_1T_2 \perp PL$ => PLKN - прям. O - т. пересеч. диагоналей (OP = OK = OL = ON).

№4. Дано:

Ω, ω,

AB - диам.

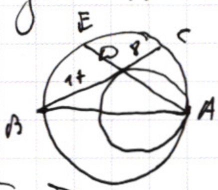
BC ∩ ω = D

CD = 8

BD = 17

R, r - ?

Реш.: R - радиус б. окр. r - радиус меньшей окр.



по. Т. об отр. хорд.: BD · DC = ED · DA =>

=> ED · DA = 17 · 8 ② По Т. об отр. кас и хорды:

$BD^2 = BP \cdot BA$, где $P = \omega \cap (AB)$ => $17^2 = 2(R-r) \cdot 2R$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x+9y^2-18y-12=0 \end{cases} \quad tg^2\alpha$$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$(x-2)^2-4+9(y-1)^2-9-12=0.$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{4}{5}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25.$ $\quad 17^2=(2R-2r)\cdot 2R.$

$17^2+r^2=(2R-r)^2.$

$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cancel{x^2-4y+4y^2} = (x-2y)^2 = x(y-1)-2(y-1)$

$\frac{DA}{DC}=\frac{BO}{EO}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{1+tg^2 2\beta} = -\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ x-2y\geqslant 0 \end{cases}$$

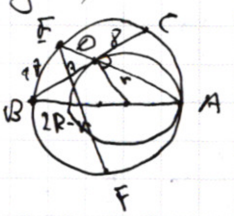
Замена: $\quad \sin 2\alpha \cos 2\beta(1+ctg 2\alpha\, tg 2\beta)$

$x-2=a$

$y-1=b$

$x-2y=a-2b$

$=-\frac{1}{\sqrt5}$



$16x^2+40x+25=0$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ (a-2b)^2=ab \\ a\geqslant 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ a\geqslant 2b \end{cases}$$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

0	11	13
⇒1	7	6
2	2	

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a\geqslant 2b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ 10a^2=25. \\ a\geqslant 2b \end{cases}$$

$4R^2-4Rr=17^2.$

$4R^2-4Rr=17^2.$

$8x^2+20x+12.5=0$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos(2\cdot 2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$k=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\ldots$

$-8x^2-8x-1.5=12x+11.$

$f(k)=n_1 f(p_1)+n_2 f(p_2)+n_3\cdot f(p_3)\ldots$

$f(x)-f(y)<0$

$-(8x^2+6x+2x+\frac{3}{2})=12x+11.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Замена: $x^2+18x=t$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$ $\quad -\cos\beta \pm 2\sin b + \sqrt{5}\sin a = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad f(x)=f(1\cdot x) = f(1)+f(x)$

$f(1)=2f(1) \Rightarrow$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ $\quad 2^{\log_3 9} = 2^2 = 4$ $\quad f(1)=0.$

$\Rightarrow f(1)=0.$

$\neq 0 \neq 13$ $\quad 9^{\log_3 2} = 4.$ $\quad f(a\cdot a)=2f(a)$

$\begin{cases} t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13} \\ t>0 \end{cases}$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f(a^n)=nf(a)$

$f(xy)=f(x)+f(y)$

$\left(t^{\log_{12} 5}\right)' = \log_{12} 5 \; t^{\log_{12} 5 - \log_{12} 12} = \log_{12} 5 \; t^{\log_{12} \frac{5}{12}}$

$\left(t^{\log_{12} 13}\right)' = \log_{12} 13 \; t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$ $\quad f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(ad) = f(a)+f(d)$

$t\left(1+t^{\log_{12} 5/12} - t^{\log_{12} 13/12}\right) \geq 0$

Реш. $\quad t=0$ $\quad t^{\log_{12} 5/12} - t^{\log_{12} 13/12} = -1.$

$f(1)=0$ $\quad \begin{cases} 1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} = 0 \\ t>0 \end{cases}$

$f(2)=0$ $\quad ' = \log_{12}\frac{5}{12}\, t^{\log_{12}\frac{5}{124}} - \log_{12}\frac{13}{12}\, t^{\log_{12}\frac{13}{124}}$

$f(3)=0$ $\quad 1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}} < 0 \quad = \quad t^{\log_{12}\frac{13}{12}} > 0$ $\quad f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$

$f(4)=2\cdot f(2)=0$ $\quad$ q убыв. $\quad$ возр. $\quad f(\cancel{1} a^{-1}) = -f(a)$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$f(5)=1$ $\quad 1+\frac{t^{\log_{12} 5}}{t} = \frac{t^{\log_{12} 13}}{t}$ $\quad \frac{25}{144}$ $\quad \frac{169}{144}$

$f(6)=0$

$f(7)=1$ $\quad$ Замена: $2\alpha = a$, $2\beta=b.$

$f(8)=3\cdot 0=0$ $\quad \sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \cos(a+b) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$f(9)=2\cdot 0=0$

$f(10)=1$ $\quad \sin(a+2b)+\sin a = -\frac{4}{5}$

$f(11)=2$ $\quad \sin(a+b)\cos\beta + \cos(a+b)\sin b + \sin a = -\frac{4}{5}$

$f(12)=0$ $\quad -\frac{\cos\beta}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\sin b}{\sqrt{5}} + \sin a = -\frac{4}{5}$

$f(13)=3$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)