# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$\boxed{\text{ОДЗ}}$ По ОДЗ логарифма:

$26x-x^2>0$

$x^2-26x<0$

$x(x-26)<0$

$x\in(0;26)$

На ОДЗ $x^2-26x<0 \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

Все действия будут выполняться на ОДЗ:

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

По св-вам логарифма:

$$(26-x^2)^{\log_5 12}=12^{\log_5(26-x^2)}$$

$$26x-x^2=(26x-x^2)^{\log_5 5}=5^{\log_5(26x-x^2)}$$

Введём замену: $t=\log_5(26x-x^2)$

$$12^t+5^t \geq 13^t$$

$13^t-12^t \leq 5^t$ | разделим на $5^t>0$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t \leq 1$$

Рассмотрим два случая:

1) $t<0$. Тогда $t=-a$, где $a>0$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t=\left(\frac{5}{13}\right)^a-\left(\frac{5}{12}\right)^a$$

Продолжение решения №3.

$$\begin{cases} a>0 \\ \frac{5}{13}<\frac{5}{12} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t<0$$

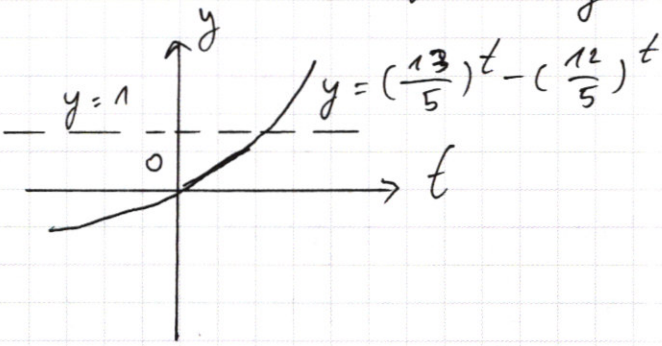
2) $t\geq 0$

тогда:

$$\begin{cases} \frac{13}{5}>\frac{12}{5} \\ t\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t\geq 0$$

Также ~~при $t\geq 0$~~ $f(t)=\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t$ – возрастает на $t\in R$:

Общий вид:




Тогда пересечение с прямой $y=1$ будет единственным, если существует.

$t=2$: $y=\left(\frac{13}{5}\right)^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{169-144}{25}=\frac{25}{25}=1$

Значит, ~~при $t\geq 2$~~ нер-во выполняется при $t\leq 2$ | На ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_5(26x-x^2)\leq 2 \\ 5>1 \end{cases} \Rightarrow 26x-x^2\leq 25 \Rightarrow x^2-26x+25\geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-25)(x-1)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

Учтём ОДЗ:

$$\begin{cases} x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \\ x\in(0;26) \end{cases} \Rightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Возьмём какое-нибудь натуральное число n.
По условию: $f(n)=f(1\cdot n)=f(1)+f(n) \Rightarrow f(1)=0$
(1 и n принадлежат множеству)

Тогда возьмём число $\frac{1}{a}$ из множества. По условию:
$f(1)=0=f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$
(если $\frac{1}{a}$ - положительное рац. число, то а-тоже).
$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

По ОТА $\mid n\in N$, $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_i$ - простое число, $\alpha_i$ - его целая неотрицательная степень вхождения.

Тогда по условию:
$$f(n)=f(p_1^{\alpha_1})+f(p_2^{\alpha_2})+\dots+f(p_k^{\alpha_k})=$$
$$=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\dots+\alpha_k f(p_k)=\alpha_1\cdot\left[\frac{p_1}{4}\right]+$$
$$+\alpha_2\cdot\left[\frac{p_2}{4}\right]+\dots=\sum_{i=1}^{k}\alpha_k\cdot\left[\frac{p_k}{4}\right]$$

Нужно найти x и y такие, что $f(\frac{x}{y})<0$,
т.е. $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Тогда для каждого натурального n из промежутка $[4;28]$ посчитаем $f(n)$:

Продолжение решения №5.

$4|\ f(4)=f(2)+f(2)=0$ $\quad 5|\ f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$ $\quad 6|\ f(6)=f(2)+f(3)=0$

$7|\ f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$ $\quad 8|\ f(8)=3\cdot f(2)=0$ $\quad 9|\ f(9)=2\cdot f(3)=0$

$10|\ f(10)=f(5)+f(2)=1$ $\quad 11|\ f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$ $\quad 12|\ f(12)=2f(2)+f(3)=0$

$13|\ f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$ $\quad 14|\ f(14)=f(2)+f(7)=1$ $\quad 15|\ f(15)=f(3)+f(5)=1$

$16|\ f(16)=4\cdot f(2)=0$ $\quad 17|\ f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$ $\quad 18|\ f(18)=f(2)+2f(3)=0$

$19|\ f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$ $\quad 20|\ f(20)=2f(2)+f(5)=1$ $\quad 21|\ f(21)=f(3)+f(7)=1$

$22|\ f(22)=f(11)+f(2)=2$ $\quad 23|\ f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$ $\quad 24|\ f(24)=f(3)+3f(2)=0$

$25|\ f(25)=2f(5)=2$ $\quad 26|\ f(26)=f(2)+f(13)=3$ $\quad 27|\ f(27)=3f(3)=0$

$28|\ f(28)=2f(2)+f(7)=1$

Упорядочим ряд полученных значений по неубыванию:

$$\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0}_{9}\ \underbrace{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1}_{8}\ \underbrace{2\ 2\ 2}_{3}\ \underbrace{3\ 3}_{2}\ \underbrace{4\ 4}_{2}\ \underbrace{5}_{1}$$

1) $f(y)=0$ – тогда мы не можем выбрать $x$, чтобы $f(x)<f(y)$ | 0 вариантов

2) $f(y)=1$ – 9 способов выбрать $x$

3) $f(y)=2$ – $9+8=17$ способов выбрать $x$

4) $f(y)=3$ – $9+8+3=20$ способов выбрать $x$

5) $f(y)=4$ – $9+8+3+2=22$ способа выбрать $x$

6) $f(y)=5$ – $9+8+3+2+2=24$ способа выбрать $x$

Всего $9+17+20+22+24=26+66=92$ способа выбрать пару $(x;y)$

Ответ: 92

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

Ограничения: $y-6x\geq 0 \Rightarrow y\geq 6x$

$xy-6x-y+6\geq 0 \Rightarrow x(y-6)-(y-6)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(y-6)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ y>6 \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ y<6 \end{cases} \\ x=1 \\ y=6 \end{array}\right.$$

Рассмотрим ур-ние (2):

$9x^2+y^2-18x-12y=45 \quad |+45$

$(9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

Теперь рассмотрим ур-ние (1):

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

Все последующие действия будем выполнять с учётом ограничений.

Возведём в квадрат:

$(y-6x)^2=xy-6x-y+6$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

Продолжение решения №2

$36x^2+y^2-13xy+6x+y-6=0$

$36x^2+x(6-13y)+(y^2+y-6)=0$

Посмотрим данное уравнение как квадратный трёхчлен относительно $x$. Найдём дискриминант.

$D=(6-13y)^2-144(y^2+y-6)=169y^2-156y+36-144y^2-144y+$

$+864=25y^2-300y+900=(5y)^2-2\cdot5y\cdot30+30^2=$

$=(5y-30)^2\geq0 \Rightarrow$ решения есть при допустимых $x$ и $y$

$$x=\frac{13y-6\pm(5y-30)}{72} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{18y-36}{72}=\frac{y-2}{4} \\ x=\frac{8y+24}{72}=\frac{y+3}{9} \end{array}\right.$$

1) $x=\frac{y-2}{4}$ — подставим в (2)

$9\left(\frac{y-2}{4}-1\right)^2+(y-6)^2=90$

$9\left(\frac{y-6}{4}\right)^2+(y-6)^2=90$

$\frac{9}{16}(y-6)^2+(y-6)^2=90$

$(y-6)^2\cdot\frac{25}{16}=90$

$(y-6)^2=\frac{90\cdot16}{25}=\left(\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)^2$

$(y-6)^2-\left(\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)^2=0$

$\left(y-6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)\left(y-6+\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=6+\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$$

Теперь рассмотрим каждый случай и подставим в ограничения, чтобы проверить

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение решения №2.

1.1. $y = 6 + \frac{12\sqrt{10}}{5}$, тогда $x = \frac{y-2}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(4 + \frac{12\sqrt{10}}{5}\right) =$
$= 1 + \frac{3\sqrt{10}}{5}$

Теперь проверим по ограничениям:

$\begin{cases} x > 1 \\ y > 6 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(y-6) > 0$, выполнено

$6x = 6 + \frac{18\sqrt{10}}{5} > y \Rightarrow y - 6x < 0$ - не выполнено.

Значит, решение не подходит.

1.2. $y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$, тогда $x = \frac{y-2}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(4 - \frac{12\sqrt{10}}{5}\right) =$
$= 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\begin{cases} x < 1 \\ y < 6 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(y-6) > 0$, выполнено

$6x = 6 - \frac{18\sqrt{10}}{5} < 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} = y$ - выполнено $(y > 6x)$

Значит, решение подходит.

2) $x = \frac{y+3}{9}$ - подставим в (2)

$9\left(\frac{y+3}{9} - 1\right)^2 + (y-6)^2 = 90$

$9\left(\frac{y-6}{9}\right)^2 + (y-6)^2 = 90$

$\frac{1}{9}(y-6)^2 + (y-6)^2 = 90$

$\frac{10}{9}(y-6)^2 = 90$

$(y-6)^2 = 81$

Продолжение решения №2.

$$\left[\begin{array}{l} y=15 \quad (1) \\ y=-3 \quad (2) \end{array}\right.$$

2.1. $y=15$, тогда $x=\frac{y+3}{9}=\frac{18}{9}=2$

$\begin{cases} x>1 \\ y>6 \end{cases} \Rightarrow (x-1)(y-6)>0$ – выполнено

$6x=12<15=y \Rightarrow y>6x$ – выполнено

Значит, решение подходит

2.2. $y=-3$, тогда $x=0$

$6x=0>y=-3$ – не выполнено

Значит решение не подходит.

Ответ: 1) $x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$, $y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

2) $x=2$, $y=15$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ при $x \in [\frac{2}{3}; 2]$

$x \neq \frac{2}{3} \Rightarrow 3x-2 \neq 0$

1) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \quad | \cdot (3x-2) > 0 \quad (x > \frac{2}{3})$

$8-6x \geq (ax+b)(3x-2)$

$8-6x \geq 3ax^2 + x(3b-2a) - 2b$

$3ax^2 + x(3b-2a+6) - 2b - 8 \geq 0$

Проверим случай, когда старший коэф. 0 (т.е. $a=0$)

$x(3b+6) - 2b - 8 \geq 0$

$x \geq \frac{2b+8}{3b+6}$ - чтобы выполнялось, достаточно, чтобы $\frac{2}{3} > \frac{2b+8}{3b+6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 > \frac{b+4}{b+2}$

$\frac{b+4-b-2}{b+2} < 0$

$\frac{2}{b+2} < 0$

$b < -2$

Первое решение - $a=0$, $b \in (-\infty; -2)$

Теперь $a \neq 0$

$D = (3b-2a+6)^2 - 4(2b+8) \cdot 3a = 9b^2 + 4a^2 + 36 -$

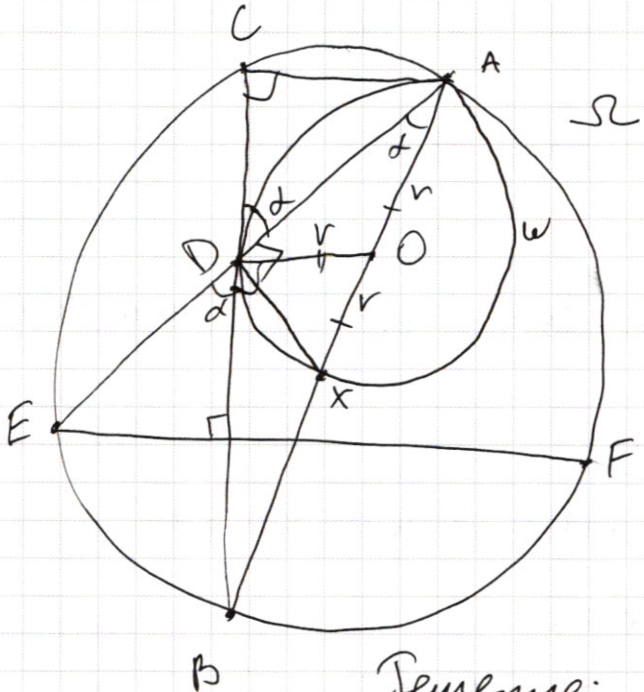
$- 12ab - 24a + 36b - 24ab - 96a = 9b^2 + 4a^2 + 36 +$

$+ 12ab - 24a + 36b - 96a = (3b+2a+6)^2 - 24a - 96a - 24a =$

$= (3b+2a+6)^2 - 144a$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

## №4.




$\angle AFE$ - ?

$S_{AEF}$ - ?

$CD = 12$

$BD = 13$

Решение:

Пусть $X = AB \cap \omega$. Заметим, что $AX$ — диам. $\omega$

Пусть $O$ — центр $\omega$. $r$ — радиус $\omega$, $R$ — рад. $\Omega$

$OX = OD = OA = r$. $\angle BCA = 90^\circ$ как опир. на диам.

Пусть $\angle DAX = \alpha$. тогда $\angle ADC = \alpha$ (между хорд. и кас.)

По т. Пифагора в $\triangle BAC$: $BC^2 + AC^2 = AB^2$

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - 25^2}$$

$\triangle DCA \sim \triangle ADX$ по двум углам

$$\frac{AC}{XD} = \frac{AD}{AX} = \frac{CD}{AD}$$

По т. Пифагора $AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{4R^2 - 25^2 + 12^2}$

$$\frac{\sqrt{4R^2 - 25^2}}{XD} = \frac{\sqrt{4R^2 - 25^2 + 12^2}}{2r} = \frac{12}{\sqrt{4R^2 - 25^2 + 12^2}}$$

$$r = \frac{4R^2 - 25^2 + 12^2}{24}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение решения №4.

~~$BD^2 = BX \cdot AB$ (сек. и кас. из одной точки)~~

~~$BX = BA - AX = 2R - 2r$~~

~~$169 = 2R(2R - 2r)$~~

~~$169 = 2R\left(2R - 2\cdot\frac{4R^2-25^2+12^2}{24}\right)$~~

~~$169 = 4R^2 - R\cdot\frac{4R^2-25^2+12^2}{6}\Big) \,|\cdot 6$~~

~~$6\cdot 169 = 24R^2 - 4R^3 + 25^2R - 12^2R$~~

~~$4R^3 - 24R^2 - 25^2R + 12^2R + 1014 = 0$~~

~~$4R^3 - 24R^2 - 625R + 144R + 1014 = 0$~~

~~$4R^2(R-6) - 13\cdot 37R + 1014 = 0$~~

~~$4R^2(R-6) - 13(37R - 78) = 0$~~

~~$4R^3 - 24R^2 - 13\cdot 37R + 1014 = 0$~~

~~$4R^3 - 24R^2 - 481R + 1014 = 0$~~

~~$R = 2 \,|\, 16 \; 6$~~

~~$B\ \triangle ACD\ \cos\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{12}{\sqrt{4R^2-25^2+12^2}}$~~

~~По т. кос. в $\triangle AOD$:~~

~~$OD^2 = AO^2 + AD^2 - 2\cdot AO\cdot AD\cdot\cos\alpha$~~

~~$r^2 = r^2 + 4R^2 - 25^2 + 12^2 - 2r\cdot\sqrt{4R^2-25^2+12^2}\cdot\frac{12}{}$~~

По т. Пифагора в $\triangle BOD$:

$OD^2 + BD^2 = OB^2$

$r^2 + 169 = (2R - r)^2$

Продолжение решения №4.

$r^2+169=4R^2+r^2-4R\cdot r$

$169=4R^2-4R\cdot r$

$r=\dfrac{4R^2-25^2+12^2}{24}$

$169=4R^2-R\cdot\dfrac{4R^2-25^2+12^2}{6}\ \ |\cdot 6$

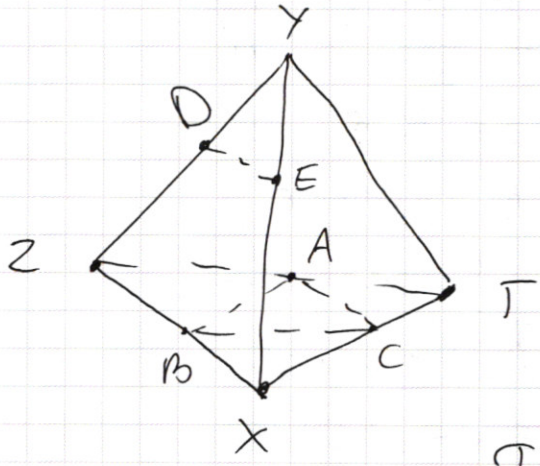
$169\cdot 6=24R^2-4R^3+(25^2-12^2)R$

$4R^3-13\cdot 37R-24R^2+169\cdot 6=0$

---

~~№6.~~

№7.




$XY=\sqrt{3}$

$TX=\sqrt{2}$

$TZ=2$

$XZ-?$

$\max R_{XYZT}-?$

Решение:

Пусть $A$ – сер. $ZT$, $B$ – сер. $ZX$, $C$ – сер. $TX$, $D$ – сер. $YZ$, $E$ – сер. $XY$.

$X, D, E, A, B, C$ – лежат на одной сфере по условию.

$AB=\dfrac{TX}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ как ср. линия

$BC=ZT\cdot\dfrac{1}{2}=1$ как ср. линия

$YE=XY\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$AC=DE=\dfrac{1}{2}XZ$

Пусть $O$ – центр сферы из усл. Тогда

$OA=OC=OB=OY=OE=OD$

$\triangle DYE\sim\triangle ABC\Rightarrow XZ=2DE=\dfrac{AB\cdot YE}{BC}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\square$ черновик $\boxtimes$ чистовик Страница №12

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DX = 4r^2 - 4R^2 + 13\cdot 37$

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$AC = \sqrt{4R^2 - 25^2}$

$AD = \sqrt{4R^2 - 25^2 + 12^2} = \sqrt{4R^2 - 13\cdot 37}$

$XD = \frac{12\cdot AD}{AC} = \frac{12\sqrt{4R^2-13\cdot 37}}{\sqrt{4R^2-25^2}}$

$4R^2 - 13\cdot 37 = 2r^2 - 2r^2\cdot\cos 2\alpha$

$4R^2 - 13\cdot 37 = 2r^2(1-\cos 2\alpha)$

$4R^2 - 13\cdot 37 = 2r^2\cdot\frac{4R^2 - 13\cdot 37 - 25^2}{4R^2 - 13\cdot 37}$

$144\cdot\frac{4R^2 - 13\cdot 37}{4R^2 - 25^2} + 4R^2 - 13\cdot 37 = r^2$

$\cancel{2r^2} =$

$(4R^2 - 13\cdot 37)\left(\frac{144}{4R^2-25^2} + 1\right) = r^2$

$r =$

$r^2 = (4R^2 - 13\cdot 37)\left(\frac{4R^2 - 13\cdot 37}{4R^2-25^2}\right)$

$-2 + \frac{4}{3x-2}$

$x \in (\frac{2}{3}; 2]$

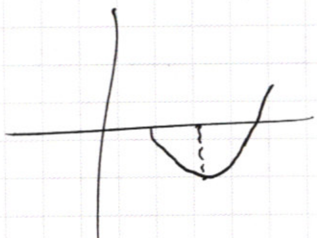
$r = \frac{4R^2 - 13\cdot 37}{\sqrt{4R^2 - 25^2}}$

$\frac{4}{3x-2} \in [1; +\infty)$

$169 = 2R\left(2R - 2\cdot\frac{4R^2-13\cdot 37}{\sqrt{4R^2-25^2}}\right)$

$-2 + \frac{4}{3x-2} \in [-1; +\infty)$

$169\sqrt{\phantom{x}}$



$b_{6} = \frac{51}{36}$

$AC = \sqrt{4R^2 - 25^2}$

$AD = \sqrt{4R^2 - 25^2 + 12^2}$

$\cancel{AD} =$

$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{4R^2 - 13\cdot 37}}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{144}{4R^2 - 13\cdot 37} - 1 = \frac{144 - 4R^2 + 25^2 - 12^2}{4R^2 - 13\cdot 37} = \frac{25^2}{4R^2 - 13\cdot 37}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2(ad+bc)= 2abd-c(a^2-b^2)+a$

$2ad+2bc=2abd-a^2c+b^2c+a$

$a^2c \mp b^2c+2ad+2bc$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha-\sin 2\beta=-2$

$\sin 2\alpha=\frac{\sin 2\beta-2}{4}$

$\sin 2\alpha -$

$AD=\sqrt{4R^2-25^2+12^2}$

$\cos 2\beta\cdot\frac{\sin 2\beta-2}{4}+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha>0$

$\frac{1}{4}\sin 4\beta-\frac{2}{4}\cos 2\beta$

$\frac{AD}{2r}=\frac{12}{DX}=\frac{AC}{AD}$

$AD^2=AC\cdot 2r$

$AD=4R^2-25^2+12^2$

$r=\frac{AD^2}{2AC}=\frac{4R^2-25^2+12^2}{2\sqrt{4R^2-25^2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4R^2-25^2}+\frac{144}{\sqrt{4R^2-25^2}}\right)$

$2R\cdot(2R-2r)=169$

$2R\cdot\left(2R-\sqrt{4R^2-25^2}+\frac{144}{\sqrt{4R^2-25^2}}\right)=169$

$4R^2-2R\sqrt{4R^2-25^2}+\frac{144}{\sqrt{4R^2-25^2}}=169$

$t=\sqrt{4R^2-25^2}$

$4R^2-2Rt+\frac{144}{t}-169=0$

$D=-16\cdot\left(\frac{144}{t}-169\right)=$

$2R\left(2R-t+\frac{144}{t}\right)=169$

$4R^2-2R\left(t-\frac{144}{t}\right)-169=0$

$D=4\left(t^2+288+\frac{144^2}{t^2}\right)$

$f(\frac{1}{a})-?$

$f(1)=0$

$f(\frac{1}{a})=f(1)-f(a)$

$f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$

$18x^2-51x+28$

$D=51^2-4\cdot 28\cdot 18=$

$=$

$x_{в.}=\frac{51}{36}$

$3\cdot 13$

$4\cdot 27\cdot 13^3-24\cdot 9\cdot 13^2-37\cdot 13^2\cdot 3+13^2\cdot 6=0$

$108-216-111+$

$+6$

$\begin{array}{r} \times 481 \\ 3 \\ \hline 1443 \end{array}$

$32-96-962+1014$

$R=3$

$108-112-1443$

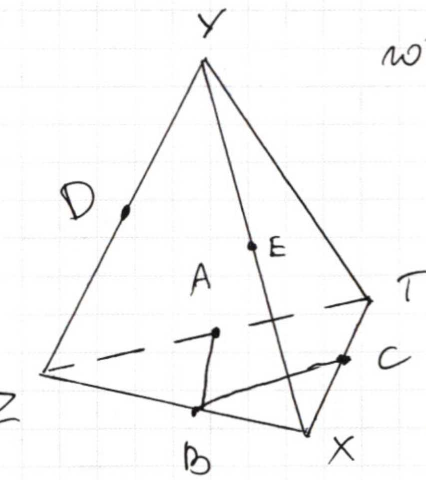
$R=6$

$\frac{4\cdot 216-24\cdot 36}{0}$

$481R$

$6\cdot 13$

$4\cdot 216\cdot 13-24\cdot 36$




$\begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ +19 \\ \hline 361 \end{array}$

$\begin{array}{r} -1444 \\ 481 \\ \hline 963 \end{array}$

$XY=\sqrt{3}$

$TX=\sqrt{2}$

$TZ=2$

$1872=18\cdot 104=$

$=18\cdot 4\cdot 26=$

$=18\cdot 4\cdot 13\cdot 2$

$BC=1$

$EY=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$R=19$

$18\cdot 6$

$24$

$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b$

$\frac{8-6x-(ax+b)(3x-2)}{3x-2}\geq 0$

$\begin{array}{r} \times 481 \\ 6 \\ \hline 2886 \end{array}$

$1014=6\cdot 169$

$481=13\cdot 37$

$2\cdot 13$

$8-6x-3ax^2-$

$4\cdot 8\cdot 13^3-24\cdot 4\cdot 13^2-$

$-37\cdot 13^2\cdot 2+13^2\cdot 6=0$

$13\cdot 32-96-74+6$

$4R^2(R-6)$

$R=2$

$481(R-6)$

$16-96-962+1014=$

$(4R^2-481)(R-6)=1872$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta$~~

$a=\sin 2\alpha \quad b=\cos 2\alpha \quad c=\sin 2\beta \quad d=\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)=ad+bc$

$\cos(2\alpha+2\beta)=bd-ac$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta=$

$=(ad+bc)b+(bd-ac)a=adb+b^2c+abd-a^2c=$

$=2abd+c(a^2-b^2)$

$\frac{AD}{2r}=\frac{AC}{AD}=\frac{12}{XD}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$AC^2+25^2=4R^2$

$AC=\sqrt{4R^2-25^2}$

$CD=12$

$BD=13$

$R_\Omega, R_\omega-?$

$\angle AFE-?$

$S_{AE?}-?$

$6\cdot 169$

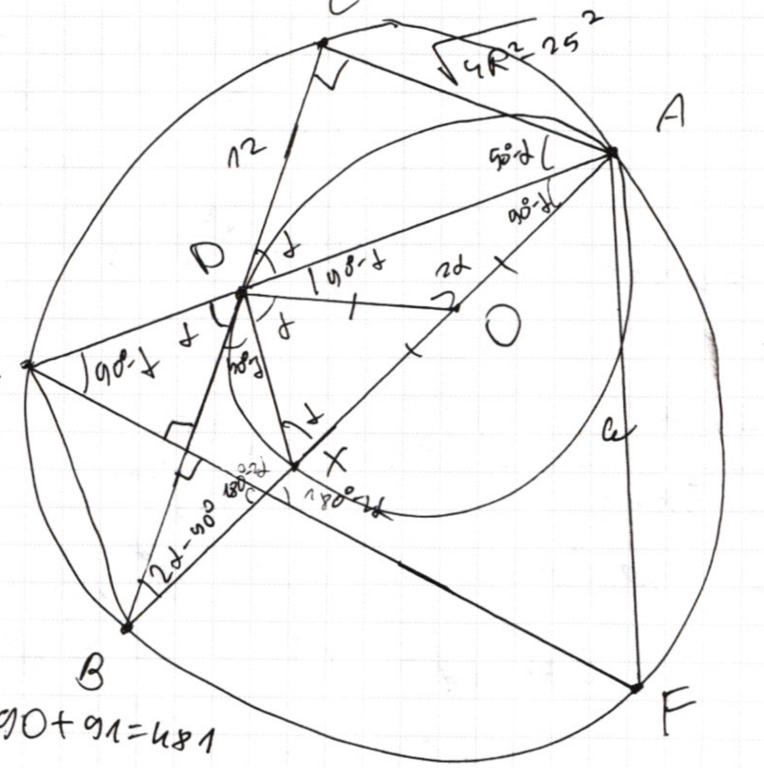
$45$

$\times\ 169$

$6$

$1014$

$1014$




$\begin{cases}169=2R(2R-2r)\\169+r^2=(2R-r)^2\end{cases}$

$\times\ 73$

$37$

$73\cdot 77=390+91=481$

$169+r^2=4R^2$

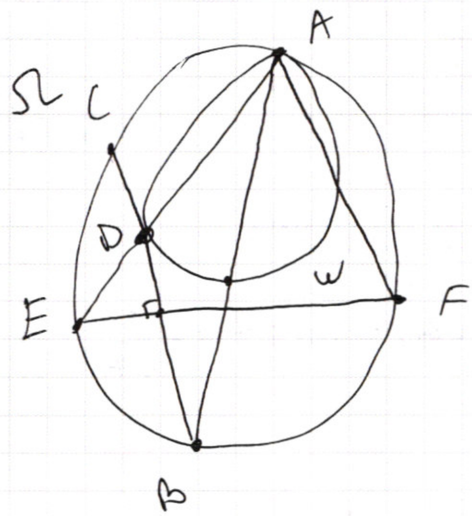
$169=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)




$CD = 12$

$BD = 13$

$\frac{13}{2} - \frac{37}{2} - 6 \quad R - 52 \quad r - 6$

$R = 13k$

$169 = 2R(2R - 2r)$

$\frac{169}{4} = R(R - r)$

$52 \cdot k^3 - 37k - 24k^2 + 6 = 0 \quad \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$52k^3 - 37k - 24k^2 + 6 = 0$

$k = \frac{3}{4}$

$\frac{6}{52} \frac{52}{16} - \frac{13}{4} + 6 =$

$\frac{1}{4} \frac{52}{16} - \frac{37}{4} - \frac{6}{4} + 6 =$

$52 - 148 - 24$

$R = 13$

$13 \cdot 4 - 24 - 37 + 6 =$

$= 58 - 61 = -3$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

$R = 2 \cdot 13$

$4 \cdot 8 \cdot 13 - 24 \cdot 4 - 37 \cdot 2 + 6 = 0$

$32 \cdot 13 - 96 - 74 + 6 = 0$

$26 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 26x < 0$

$13^{\log_5 (26x - x^2)} = (26x - x^2)^{\log_5 13}$

$t = 26 - x^2, \ t > 0$

$R(4R^2 - 13 \cdot 37) - 6(4R^2 - 13 \cdot 2) = 0$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$R = 13$

$4 \cdot 13 - 37 - 24 + 6$

$t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13} - t^{\log_5 5}$

$t(t^{\log_5 13 - \log_5 5} - 1) = t \cdot (t^{\log_5 \frac{13}{5}} - 1)$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26 - x^2 \geq (26x - x^2)^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13} \quad | : t$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$a = \log_5 t$

$\left(\frac{12}{5}\right)^a + 1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^a$

$1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^a - \left(\frac{12}{5}\right)^a$

$\begin{cases} \left(\frac{13}{2}\right)^2 = R(R - r) \\ r^2 + \ldots 169 = \end{cases}$

$4R^2 = 4R^2 - 25^2 + 12^2 + 144 + 2 \cdot 12 \cdot 14$

$R = 3 \cdot 13$

$4 \cdot 27 \cdot 13 - 24 \cdot 9 - 37 \cdot 3 + 6$

$a < 0$ — ~~слева~~ справо $< 0$

$a = 0$ — справа $0$

$a > 0$ — справа $> 0$

$13^a - 12^a = 5^a$

$\frac{8 - 6x}{3x - 2} = -2 + \frac{4}{3x - 2}$

$13 \times 37 = 91 + 39 = 481$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

(1) $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

(2) $2\cdot\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\beta = -\frac{2}{17}$

(1) $2(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$a=\sin\alpha \quad b=\cos\alpha \quad c=\sin\beta \quad d=\cos\beta$

$2(ac+bd)(bd-ac) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2b^2d^2 - 2a^2c^2 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\begin{array}{r} \times\, 144 \\ 6 \\ \hline 864 \end{array}$$

(2)
$$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6 \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0$

$36x^2+x(6-13y)+y^2+y-6=0$

$D = (13y-6)^2 - 144(y^2+y-6) =$

$= 169y^2-156y+36-144y^2-$

$-144y+864 =$

$= 25y^2-300y+900 =$

$= 25(y^2-12y+36) =$

$= 5^2\cdot(y-6)^2$

$(x-5(y-6)$

$\frac{\cancel{13\cdot 37}}{6\cdot 169}$

$13(4\cdot169 - 24\cdot\cancel{169}^{13} - 481 + \cancel{1014}\,6\cdot13) = 0$

$169(4\cdot13 - 24 - 37 + 6) =$

$52+6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\alpha$

$k=3$

$8\cdot 52-111-24\cdot 9+6$

$k=6$

$52\cdot 6^3-37\cdot 6-4\cdot 6^3+6$

$48\cdot 6^3-6^3$

$52k^3-37k-24k^2+6=0$

$k=\frac{3}{4}$

$\cancel{52k(k^2-1)+14k}-24k^2+6=0$

$270+81=351$

$52\cdot\frac{27}{64}-\frac{111}{4}-\frac{6\cdot 9}{4}+6=0$

$\frac{13\cdot 27}{16}-\frac{444}{16}-\frac{36}{4}+\frac{96}{16}=0$

$\times\begin{array}{r}27\\ 13\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}81\\ +26\\ \hline 351\end{array}$

$351-444-144+96$

$4\cdot 8=32$

$32-481\cdot 2-24\cdot 4+1014=0$

$32-962-96+1014=1046-1058$

$\frac{13}{2}-\frac{37}{2}-$

$\frac{3}{2}$

$\frac{13\cdot 27}{2}-\frac{111}{2}-\frac{9\cdot 24}{4}+6=0$

$-54+6$

$\frac{240}{2}=120$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)