МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$x, y - ?$

Решение: Возведём первое уравнение в квадрат, и получим $4x^2+(2-15y)x+9y^2+3y-2=0$, Теперь найдём дискриминант взяв за неизвестное x: $D=(2-15y)^2-4\cdot4(9y^2+3y-2)=81y^2-108y+36=$ $=(9y-6)^2$, $\Rightarrow x=\frac{15y-2\pm|9y-6|}{8}$ модуль можно убрать так как ~~если~~ ~~9y-6~~ в независимости от знака $(9y-6)$, x-ы будут одинаковыми. $x=\frac{15y-2\pm9y\mp6}{8}=\left[\begin{array}{l} 3y-1 \\ \frac{3y+2}{4} \end{array}\right.$

i) $x=3y-1$

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y=4$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0$

$D=64-24=40$

$y=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\left[\begin{array}{l} \frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{array}\right. \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

ii) $x=\frac{3y+2}{4}$

$3\left(\frac{3y+2}{4}\right)^2+3y^2-6\left(\frac{3y+2}{4}\right)-4y=4$, это можно преобразовать в такое:

$3y^2-4y-4=0$

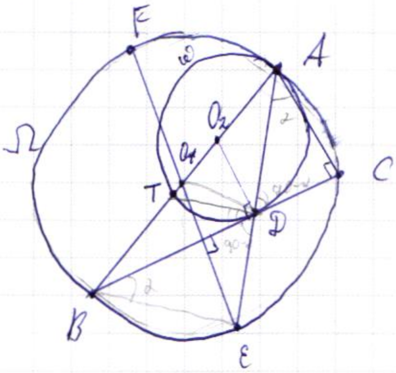
$D=16+48=64$

$y=\frac{4\pm8}{6}=\left[\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow x=2;\ 0$

Ответ: $(x;y)=\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2};\frac{4+\sqrt{10}}{6}\right), \left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right), (2;2), \left(0;-\frac{2}{3}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

N 4



$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$FE \perp AC$

Найти: S_{AFE}, $\angle AFE$, R_1, R_2 - ?

Решение: возьмём центр большой Ω за O_1, а центр ω (маленькой) за O_2. Тогда их радусы соответственно R_1 и R_2. Обозначим пересечение AB с ω за T. $\angle ACB = 90^\circ$, так как AB - диаметр Ω. и $\angle O_2DB = 90^\circ$, так как BD - касательная к ω. $\Rightarrow$ $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BO_2}{BD} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{BT + R_2}{\frac{13}{2}} = \frac{BT + 2R_2}{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}}$ и еще степень точки B относительно ω равен: $BD^2 = BT \cdot BA$

$$\begin{cases} \frac{BT + R_2}{BT + 2R_2} = \frac{13}{18} \\ \left(\frac{13}{2}\right)^2 = BT \cdot (BT + 2R_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BT = \frac{8R_2}{5} \\ \frac{8 \cdot 18 R_2^2}{25} = \frac{169}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BT = \frac{13}{3} \\ R_2 = \frac{65}{24} = \end{cases}$$

$$R_1 = \frac{AB}{2} = \frac{BT + 2R_2}{2} = \frac{\frac{13}{3} + \frac{65}{12}}{2} = \frac{117}{24} = \frac{39}{8}$$

$$AC = \sqrt{(2R_1)^2 - BC^2} = \cancel{\sqrt{\frac{117^2}{12^2} - 9^2}} = \sqrt{\frac{39^2}{4^2} - 9^2} = \frac{15}{4}$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$$

Степень точки D относительно Ω: $BD \cdot CD = AD \cdot ED \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot CD}{AD} =$

$$= \frac{\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \sqrt{13} \Rightarrow AE = AD + DE = \frac{5\sqrt{13}}{4} + \sqrt{13} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$$

~~Так к~~ $\angle FED = \angle DAC$, и ~~$\angle FED = \angle$~~ $\angle DAC = \angle DAB$, по лемме ~~о~~ касательной к окружности которая внутренне касается с другой окружностью. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAE = \angle AEF \Rightarrow E, O_1, F$ - лежат на одной прямой т.к. $\angle AEB = 90^\circ$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр Ω. $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{AE}{FE}\right) = \arcsin\left(\frac{\frac{9\sqrt{13}}{4}}{\frac{39}{4}}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$$AF = \sqrt{FE^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{39^2}{16} - \frac{9^2 \cdot 13}{16}} = \frac{3\sqrt{13}}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{AF \cdot AE}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4}}{2} = \frac{27 \cdot 13}{16}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Ответ: $S_{AEF} = \frac{351}{16}$ $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $R_1 = \frac{39}{8}$ $R_2 = \frac{65}{24}$

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$x - ?$

Решение: $x^2+6x > 0$, так как внутри логарифма только положительные числа. ОДЗ: $x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$.

Так как по ОДЗ $x^2+6x > 0$, то модуль можно раскрыть со знаком +: $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x + x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$$3^{\frac{\log_3(x^2+6x)}{\log_3 4}} + (x^2+6x)\left(-(x^2+6x)^{\log_4 5} + 1\right) \geq 0$$

$$(x^2+6x) \cdot 3^{\frac{1}{\log_3 4}} + (x^2+6x)\left(-(x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} + 1\right) \geq 0$$

$$(x^2+6x)\left(-(x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} + 1 + 3^{-\log_3 4}\right) \geq 0$$

Так, как $x^2+6x > 0$, то надо решить это неравенство:

$$-(x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} + 1 + \frac{1}{3^{\log_3 4}} \geq 0$$

$$-(x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)} + 1 + \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\frac{5}{4} \geq (x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$\log_4\left(\frac{5}{4}\right) \geq \log_4\left(\frac{5}{4}\right) \cdot \log_4(x^2+6x)$$

$$1 \geq \log_4(x^2+6x)$$

$$4 \geq x^2+6x$$

$$x^2+6x-4 \leq 0$$

N 3

$x^2+6x-4\leq 0$

$D=36+16=52=4\cdot 13$

$x=\frac{-6\pm 2\sqrt{13}}{2}=-3\pm\sqrt{13} \Rightarrow x\in(-\infty;-3-\sqrt{13}]\cup[-3+\sqrt{13};+\infty)$

$-3-\sqrt{13}<-6$ и $-3+\sqrt{13}>0$, что удовлетворяет условию.

Ответ: $x\in(-\infty;-3-\sqrt{13}]\cup[-3+\sqrt{13};+\infty)$

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$tg\,\alpha-?$

Решение: $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\beta)=\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$2\beta=\pm\arccos$~~

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

i) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0$ $\cos\alpha\neq 0$, потому что $tg\,\alpha$ - определён

$4\sin\alpha+\cos\alpha=0$

$tg\,\alpha=-\frac{1}{4}$

ii) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha=-1$

$\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

а) $\sin\alpha = 0,\ tg\alpha = 0$ б) $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\alpha = -4$

Ответ: $tg\alpha = 0; -4; -\frac{1}{4}$

N 5

$D(f) \in \mathbb{R}^+$, $f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = [\frac{p}{4}]$, где $p \in \mathbb{P}$

~~(x, y)~~ $x, y \in \mathbb{N}$, $3 \le x, y \le 27$

кол.-во пар $(x; y)$, таких что $f(\frac{x}{y}) < 0$

Решение: $f(3) = 0$, $f(5) = f(7) = 1$, $\cancel{f(11) = f(13)}$ $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$

$f(ab) = f(a) + f(b)$, Сначала делаем подстановку $P(1; 1) \to$
$\to f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$, Теперь сделаем подстановку $P(x; \frac{1}{x}) \to$
$\to f(1) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow 0 = f(x) + f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) = f(\frac{1}{y}) - f(\frac{1}{x})$ и это должно быть $< 0. \Rightarrow f(x) < f(y)$ и $f(\frac{1}{y}) < f(\frac{1}{x}) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ - монотонная функция.

$f(\frac{27}{3}) = f(9) = f(27) - f(3) = f(27)$

$f(\frac{9}{3}) = f(9) - f(3) = f(3)$

$f(9) = 0 = f(27) = f(3)$

$f(\frac{26}{13}) = f(2) = f(26) - f(13) = f(26) - 3$

$f(\frac{25}{5}) = f(5) = f(25) - f(5)$

$f(25) = 2f(5) = 2$

$f(\frac{24}{3}) = f(8) = f(24)$

~~N5~~

Можно заметить что $f(3k)$ - ~~p~~ где $k \not\vdots 3$, равны друг другу, а $f(t\cdot p)$ - всегда больше $f(p)$, если $t \vdots 3$.

значит надо рассмотреть ~~числа (~~ только простые числа от 3 до 27: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

i) $x=3$, тогда y y: 5 вариантов. (6, 12, 15, 21, 24)

ii) $x=5$, тогда y y: ~~2~~2 варианта.

~~iii) $x=7$, y: 1 вариант.~~

~~iv) $x=11$, y: 1 вариант.~~

~~v) $x=13$, y: 1 вар.~~

~~vi) $x=17$, y: 1 вар.~~

~~vii) $x=19$, y:~~

всего: $C_{25}^{2} - C_{8}^{2} = \frac{25\cdot 24}{2} - \frac{8\cdot 7}{2} = 272$

Ответ: 272 пар.

N6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \qquad x\in(1;3]$

$\frac{7}{4} \quad \frac{7}{8}$

$(a;b)-?$

$2\frac{1}{8}$

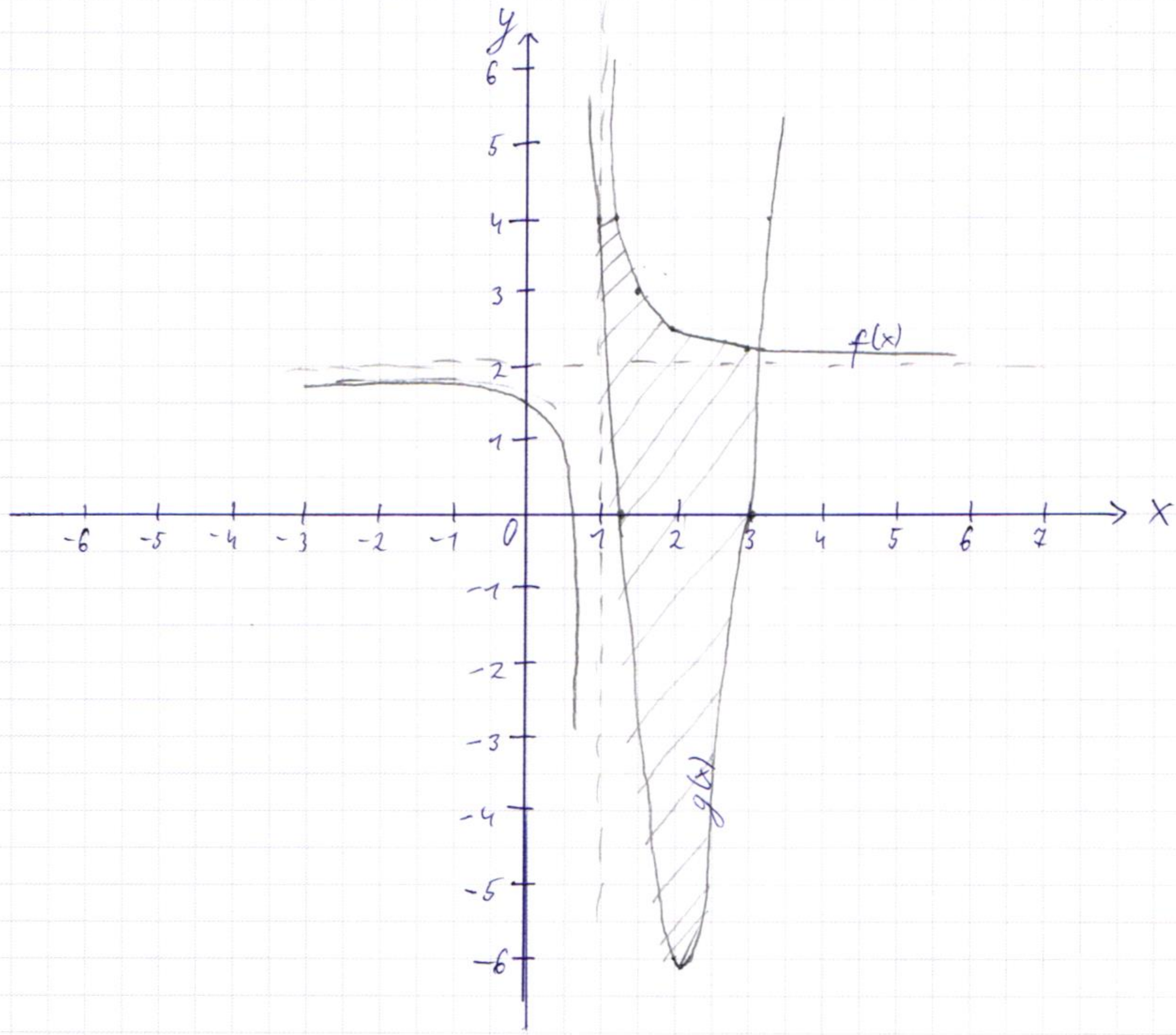
Решение: $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$g(x) = 8x^2-34x+30 = 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

Начертим графики $f(x)$ и $g(x)$:

$ax+b = h(x)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



то есть $g(x) \le h(x) \le f(x)$, $a+b=4$ и $3a+b \ge 0$

$a = 4-b$, $12-2b \ge 0$, $b \le 6$

$a \ge -2$

$h(x) \le \cancel{f(x)}$ $f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ где $x_0 \in (1;3]$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow h(x)=-2x+6$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+6 \geq 8x^2-34x+30$$

$x \in (1;\ 3]$, $(a;6)-?$

$$\begin{cases} 2 + \frac{1}{2(x-1)} \geq ax+6 \\ ax+6 \geq 2(x-3)\left(4x-1\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$4x^2-17x+15$

$289-16\cdot 15 = 289-240=49$

$x = \frac{17\pm 7}{8} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ 1\frac{1}{4} \end{array}\right.$

$8x^2-34x+30 = 2(4x^2-17x+15)$

$y=\frac{1}{2x}$

$2(4x^2-16x$

$\frac{5}{4}+\frac{7}{8} = \frac{17}{8}$

$\frac{12-5}{4} = \frac{7}{8}$

$\frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4}$

$\cancel{8\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = -6}$

$\cancel{2\cdot\left(\frac{7-24}{8}\right)\cdot\left(\frac{7-30}{8}\right)}$

$2\cdot\frac{17-24}{8}\cdot\frac{7}{8} = -\frac{49}{32} = -1\frac{17}{32}$

$\frac{6-3}{1}$

$\frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$

$4x-3 = 8x-8$

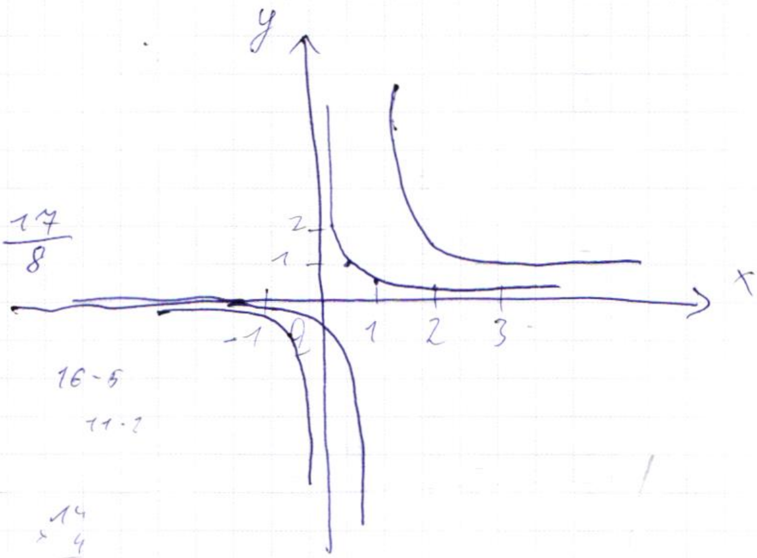
$4x = 5$

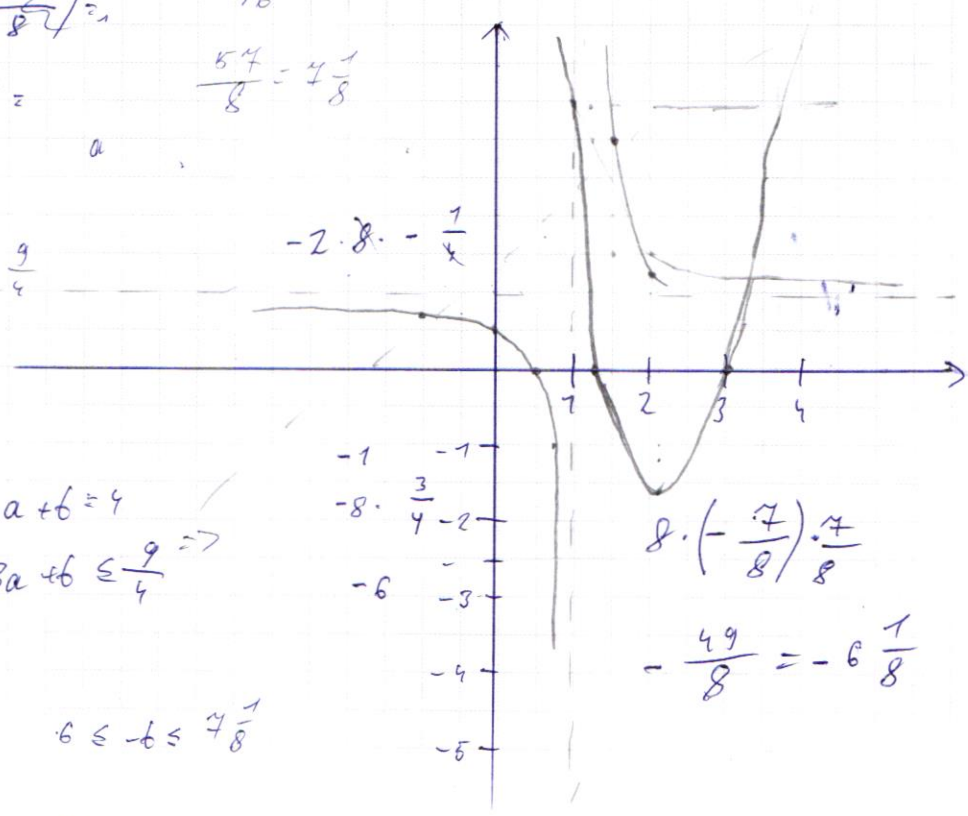
$x = \frac{5}{4}$

$\frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$

$y = 11x-7$

$-2\cdot 8\cdot -\frac{1}{4}$





$8\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{7}{8}$

$-\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$

$a x_1+6 \leq 4$

$a x_2+6 \leq \frac{9}{4}$

$a+6=4$

$0 \leq 3a+6 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 4-6$

$0 \leq 12-2b \leq \frac{9}{4}$

$6 \leq -b \leq 7\frac{1}{8}$

$-12 \leq -2b \leq 14\frac{1}{4}$

$-6 \geq b \geq -\frac{57}{8} = -7\frac{1}{8}$

$10 \leq a \leq 11\frac{1}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$x=\frac{(10-30y)\pm 10\sqrt{6y^2-8y+1}}{10}=1-3y\pm\sqrt{6y^2-8y+1}$$

1) $x=1-3y+\sqrt{6y^2-8y+1}$

$3\cdot(1-3y+\sqrt{6y^2-8y+1})^2$

54

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 9 \\ \hline 144 \end{array}$$

$3(x^2-2x+1)+3y^2-4y=7$

$3(x-1)^2+$

$4x^2+(+2-15y)x+9y^2+3y-2=0$

$D=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=81y^2-108y+36=$
$=(9y)^2-2\cdot9\cdot6y+6^2=$
$=(9y-6)^2$

$6-4$

$2=\sqrt{12-4-6+2}$

$$x=\frac{15y-2\pm|9y-6|}{8}=\frac{15y-2\pm 9y\mp 6}{8}=\left[\begin{array}{l}\frac{24y-8}{8}=3y-1\\ \frac{6y+4}{8}=\frac{3y+2}{4}\end{array}\right.$$

~~1) $9y-6>0$, $x=\frac{15y-2\pm9y\mp6}{2}=[$~~

1) $x=3y-1$

$3(9y^2-6y+1)+3y^2-6(3y-1)-4y=4$

$27y^2-18y-18y+3y^2+3+6-4y=4$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0$

$D=64-24=40$

$$y=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}-1=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

1) $x\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \cancel{+x^2+6} \geq (x^2+6x)((x^2+6x)^{\log_4 5-1}-1)$

$\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 3 \geq \log_4(x^2+6x)+\log_4(\cancel{(x^2+6x)}^{\log_4\frac{5}{4}}-1)$

$x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)(1-(x^2+6x)^{\log_4 1{,}25})\geq 0$

$3^{\log_3(x^2+6x)}\cdot 3^{\frac{1}{\log_4 3}}$

$(x^2+6x)\cdot 3^{\log_4 3}+(x^2+6x)(1-(x^2+6x)^{\log_4(1{,}25)})\geq 0$

$1+3^{\log_4 3}\geq(x^2+6x)^{\log_4 1{,}25}$

$3^{\log_4 3}=3^{\frac{1}{\log_3 4}}=3^{-\log_3 4}=\frac{1}{3^{\log_3 4}}=\frac{1}{4}$?

$\frac{5}{4}\geq(x^2+6x)^{\log_4(1{,}25)}$

$\log_4(\frac{5}{4})\geq\log_4(\frac{5}{4})\cdot\log_4(x^2+6x)$

$1\geq\log_4(x^2+6x$

$4\geq x^2+6x$

$x^2+6x-4\leq 0$

$D=36+16=52=4\cdot 13$

$x=\frac{-6\pm2\sqrt{13}}{2}=-3\pm\sqrt{13}<-6$

$x\in(\cancel{-\infty};0)\cup($

$x\in(\cancel{-\infty};-6)\cup(0;+\infty)$

$-3-\sqrt{13}<-6$

$-3+\sqrt{13}>0{,}5.$

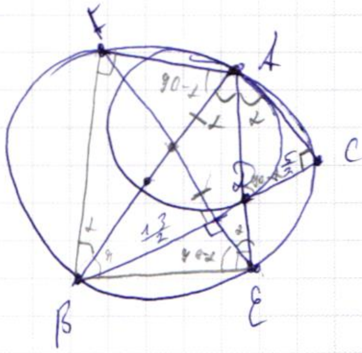
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N4

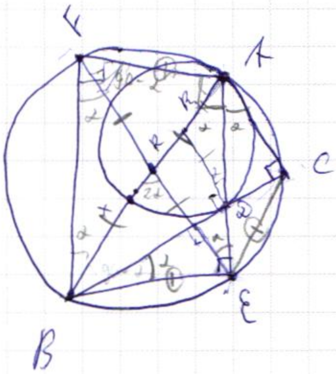


$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$R_{1,2}$ - ? $\angle AFE$, S_{AEF} - ?

$AD \cdot DE = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{65}{4}$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = AB$



$\frac{BE}{\cos\alpha} = BD = \frac{13}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2BE}{13}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{2BE}{13}}$

$\frac{R_б}{\cos\alpha} = \frac{BE}{\sin 2\alpha}$

$R_б = \frac{BE}{2\sin\alpha} = \cancel{\frac{BE}{2\sqrt{\frac{13-2BE}{13}}}} =$

$\sin(90-\alpha) = \frac{AE}{2R_б} = \frac{AD+DE}{2R_б} = AD+DE$

$$\begin{array}{r|l} -117 & 3 \\ 9 & 39 \\ \hline 27 & \end{array}$$

$CD \cdot \cancel{2}R_б = BD \cdot AC$

$2R_б = \frac{13}{5} \cdot AC = \frac{BE}{\sin\alpha}$

$$\begin{cases} \frac{x+R}{x+2R} = \frac{13}{18} \\ x\cdot(x+2R) = \frac{169}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{18x+18R} = 13x + 26R \\ x(x+2R) = \frac{169}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 8R \Rightarrow x = \frac{8R}{5} \\ \frac{8R}{5}\left(\frac{8R+10R}{5}\right) = \frac{169}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \\ -1296 \\ \hline 225 = 15^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 81 \\ 16 \\ \hline 486 \\ 81 \\ \hline 1296 \end{array}$$

$\frac{8 \cdot 18R^2}{25} = \frac{169}{4}$

$3^2 \cdot 13^2 - 3^4 \cdot 13 =$
$= 3^2 \cdot 13(13-3^2) = 3^2 \cdot 13 \cdot 4$

$R^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2}$

$R = \frac{13 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{65}{24}$

$$\begin{array}{r|l} 325 & 5 \\ 65 & 5 \\ 13 & \end{array}$$

$x = \frac{\frac{65}{3}}{5} = \frac{13}{3}$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 13 \\ \hline 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$

$52 + 65 = 117$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$tg\alpha - ?$

~~$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta =$~~

~~$2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$~~ $\qquad$ ~~25.~~

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}$$

$2\alpha+2\beta=t$

$\sin t=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin t\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos t+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\cos t=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

i) $\cos t=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)=\frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2}=\frac{1}{17}$

$$\begin{cases}\cos(4\alpha+4\beta)=\frac{15}{17}\\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos 4\alpha\cdot\cos 4\beta-\sin 4\alpha\cdot\sin 4\beta=\frac{15}{17}\\ +\\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}$$

$\cos 4\beta\left(\sin 2\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-4\alpha\right)\right)+\sin 4\beta\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)-\sin 4\alpha\right)+\sin 2\alpha=\frac{7}{17}$

$\cos 4\beta\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\sin 4\beta\cdot 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-3\alpha\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2-15xy+9y^2+2x+3y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\cancel{3x^2+3y^2-6x-4y=8x^2-30xy+18y^2+4x+6y}$

$\cancel{5x^2-30xy+15y^2+10x+10y=0}$

$\cancel{D=(30y-10)^2-4\cdot5\cdot(15y^2+10y)}=900y^2-600y+100-300y^2-200y=$

$=600y^2-800y+100=100(6y^2-8y+1)$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D=36-4\cdot3\cdot(3y^2-4y-4)=36-36y^2+48y+48=84+48y-36y^2$

42

$D=144+756=900$ $\quad 84\cdot9=756$ $\quad 21+12y-9y^2=$

$x=\frac{-12\pm30}{42}=\left[\begin{array}{l}\frac{9}{21} \\ -\end{array}\right.$ $+28$ $\quad \cancel{=21+21y+36}$

$-9y^2-9y+21y+21=$ $\quad \cancel{-9y^2+9y+3y-3+1}$

$=-9y(\cancel{y+1})\cancel{2}=(y+1)(-9y+21)$ $\quad \cancel{-9y^2+12y+21 \mid y-1}$, $\cancel{-9y^2+9y}$, $\cancel{-9y+3}$, $\cancel{3y+21}$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{\cancel{4}(y+1)(-9y+21)}}{\cancel{6}}=\frac{3\pm\sqrt{(y+1)(-9y+21)}}{3}$

i) $x=\frac{3+\sqrt{(y+1)(-9y+21)}}{3}$

$3y-$

$48-27=45$ $\quad 64-24=40$ $\quad -36$ $\quad 24\cdot3=72$

ii) $x=\frac{3y+2}{4}$ $\quad 16\cdot3$

$3\left(\frac{9y^2+12y+4}{16}\right)+3y^2-6\cdot\frac{3y+2}{4}-4y=4$

$27y^2+36y+12+48y^2-72y-48-64y=64$

$75y^2-100y-100=0$

$3y^2-4y-4=0$ $\qquad x=2;\ 0$

$D=16+\cancel{4}=64$

$y=\frac{4\pm8}{6}=\left[\begin{array}{l}2 \\ -\frac{2}{3}\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

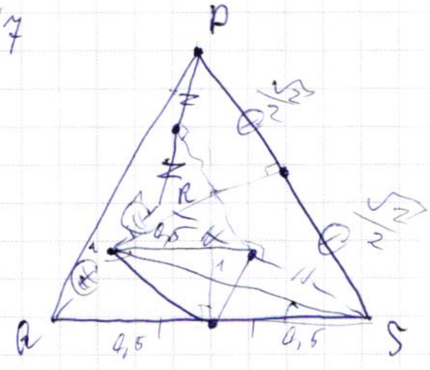
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7



$QR = 2 \quad QS = 1$

$PS = \sqrt{2}$

$RS - ?$

$\times \begin{array}{r} 34 \\ 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$

$\times \begin{array}{r} 32 \\ 30 \\ \hline 960 \end{array}$

184

N6

$\begin{cases} \dfrac{4x-3}{2x-2} \le ax+6 \\ ax+6 \ge 8x^2-34x+30 \end{cases}$

3, 4, 5, 6, 7,

$8x^2+(-a-34)x+30-6 \le 0$

$D = a^2+68a+1156-960+326 = a^2+68a-326+184$

50

$\dfrac{4x-3}{2x-2} \ge 8x^2-34x+30$

128

$600-56$

$\dfrac{4x-3-16x^3+68x^2-60x+16x^2-68x+60}{2x-2} \ge 0$

$\dfrac{544}{2}$

272

$\dfrac{-16x^3+84x^2-124x-57}{2x-2} \ge 0$

$f\left(\frac{24}{2}\right) = f(24) - f(2) = f(8) - f(2) = f(4) = f(12)$

$f\left(\frac{24}{4}\right) = f(24)$

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N 5

$f(x): R^+$ $\quad f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$, $p\in P$ $\quad 3\le x,y\le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$f(1)=2f(1)$ $\quad f(1)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(1)=0$ $\quad 0=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

$f(x)<f(y)$

$f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$

$f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$

$f\left(\frac{27}{3}\right)=f(9)=f(27)-f(3)$

$f\left(\frac{9}{3}\right)=f(3)=f(9)-f(3)$ $f\left(\frac{4}{2}\right)=f(4)-f(2)$

$289-64=225$

$f\left(\frac{8}{2}\right)=f(8)-f(2)$

$f(4)=f(8)-f(2)$

$2f(2)=f(4)$ $\frac{16^2}{17^2}$ $-x\cdot\frac{8}{17}\cdot\sin 2\alpha-\sin^2 2\alpha$

$3f(2)=f(8)$

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2\cos^2\beta-1)+2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta+4\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin\beta\cdot\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{17}$

$\frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2}=\frac{1}{17}$

$\cos(t+2\alpha)=\frac{15}{17}\Rightarrow \cos t\cdot\cos 2\alpha-\sin t\cdot\sin 2\alpha=\frac{15}{17}$

$\sin t+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\sin t=-\frac{8}{17}-\sin 2\alpha$

$\cos t=\sqrt{1-\frac{64}{289}-\frac{16}{17}\sin 2\alpha-\sin^2 2\alpha}=\sqrt{\frac{225}{289}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)