МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

(2): $\sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \cos2\alpha\cdot\sin4\beta + \sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha\left(2\cos^2 2\beta - 1 + 1\right) + \cos2\alpha\cdot 2\sin2\beta\cos2\beta = -\frac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 2\cos2\beta\left(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta\right) = -\frac{2}{5}$ (3)

(1): $\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

~~Это~~ подставим ~~это~~ в (3): $2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

По основному тригонометрическому тождеству

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

Тогда (1): $\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm \left(2\cos^2\alpha - 1\right)\cdot 2 = -1$ (4)

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т.к. $tg\,\alpha$ определен, $\cos\alpha \neq 0$ (условие)

$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha\cdot tg\alpha$ (5) $\sin^2\alpha = \cos^2\alpha\cdot tg^2\alpha$; $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$ (6)

в (4) подставим (5): $2\cos^2\alpha\cdot tg\alpha \pm 4\cos^2\alpha \mp 2 = -1$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha\left(tg\alpha + 2\right) = 1 \\ 2\cos^2\alpha\left(tg\alpha - 2\right) = -3 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ согласно (6): $\left[\begin{array}{l} \frac{2}{1+tg^2\alpha}\left(tg\alpha+2\right) = 1 \\ \frac{2}{1+tg^2\alpha}\left(tg\alpha - 2\right) = -3 \end{array}\right.$

№1 (продолжение)

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2(tg\alpha+2)-1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=0 \\ \dfrac{2(tg\alpha-2)+3+3tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=0 \end{array}\right.$$

Т.к. $1+tg^2\alpha \geq 1$, то

$$\left[\begin{array}{l} 2tg\alpha+4-1-tg^2\alpha=0 \\ 2tg\alpha-4+3+3tg^2\alpha=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0 & (7) \\ 3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0 & (8) \end{array}\right.$$

(7): $(tg\alpha+1)(tg\alpha-3)=0$

т.е. $\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=3 \end{array}\right.$

(8): $3(tg\alpha+1)(tg\alpha-\frac{1}{3})=0 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Значит, в итоге 3 возможных значения $tg\alpha$: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=3 \\ tg\alpha=\frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha=-1$; $tg\alpha=3$; $tg\alpha=\frac{1}{3}$

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

Ограничения: $2xy-12y-x+6 \geq 0$

т.к. $\sqrt{a} \geq 0$, то и $x-12y \geq 0 \Rightarrow x \geq 12y$

(2) имеет вид $(x^2-12x+36)+36(y^2-y+\frac{1}{4})-36-\frac{36}{4}=45$

$(x-6)^2+36(y-\frac{1}{2})^2=90$

Т.к. $x \geq 12y$, то $x-6 \geq 12y-6$

№2 (продолжение)

Рассмотрим 2 случая:

1) $y \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x-6 \geq 12y-6 \geq 0$, т.е. $(x-6)^2 \geq (12y-6)^2$

$\Rightarrow 90 = (x-6)^2 + (6y-3)^2 \geq (12y-6)^2 + (6y-3)^2 = 5(6y-3)^2 = 5\cdot 9(2y-1)^2$

т.е. $(2y-1)^2 \leq \frac{90}{5\cdot 9} = 2$ (т.к. $5\cdot 9 > 0$, можем на это число делить)

тогда $4y^2 - 4y + 1 \leq 2$

$4y^2 - 4y - 1 \leq 0$

$D = 16 + 4\cdot 4 = 2\cdot 16$

$y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$+ \quad \frac{1-\sqrt{2}}{2} \quad - \quad \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad +$ $\Rightarrow y \in \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

Но с учетом того, что $y \geq \frac{1}{2}$, то

$y \in \left[\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

2) $y < \frac{1}{2} \Rightarrow \quad x - 6 \geq 12y - 6$

Заметим, что $\begin{cases} (x-12y) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + 36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 90 \end{cases}$

По нер-ву о средних

$90 = (x-6)^2 + 36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 2\sqrt{(x-6)^2 \cdot 36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} = 2\cdot 6|x-6|\left|y-\frac{1}{2}\right| =$

$= 6|x-6||2y-1|$

Исходя из того, что под корнем ≥ 0, то

$|x-6||2y-1| = (x-6)(2y-1) \Rightarrow \quad (x-6)(2y-1) \leq 15 \Rightarrow$

$x - 12y \leq \sqrt{15}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

Т.к. ~~10~~ $\log_3(10x - x^2)$ должен быть определен, $10x - x^2 > 0$

При этом $\log_3(10x - x^2) = \dfrac{\log_5(10x - x^2)}{\log_5 3}$

$\Rightarrow 10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq \left(5^{\log_5(10x - x^2)}\right)^{\frac{1}{\log_5 3}}$, а $\dfrac{1}{\log_5 3} = \log_3 5$

$\Rightarrow 10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq (10x - x^2)^{\log_3 5}$

Пусть $10x - x^2 = t > 0$

Тогда $t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$$t\left(1 + t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1}\right) \geq 0$$

$$t\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0 \quad (1)$$

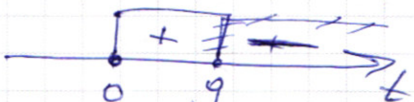
Заметим, что ~~log~~ $1 > \log_3 \frac{5}{3} > \log_3 \frac{4}{3} > 0$

Значит, при $t > 0$ при росте ~~t~~ $t^{\log_3 \frac{5}{3}}$ растет быстрее, чем $t^{\log_3 \frac{4}{3}}$ $\Rightarrow$ если при $t = a$ $t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} = b$, то при $t > a$ $t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} < b$. При $t = 3^2$

$t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = -1$, $\Rightarrow$ при $t > 9$

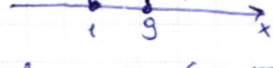
скобка $\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) < 0$, т.е. нер-во (1) неверно $\Rightarrow$ корни ~~нер~~ ур-я $t\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) = 0$

$t = 0$ и $t = 9$ при $t \geq 0$

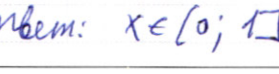


$\Rightarrow t \in (0; 9]$ $\Leftrightarrow$ с учетом ограничений

$\Rightarrow \begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x - 10) < 0 \ (2) \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \ (3) \end{cases} \Rightarrow$ у (2) корни: $x = 0$, $x = 10$; у (3) корни $x = 1$, $x = 9$

(2): 

$x \in (0; 10)$

(3): 

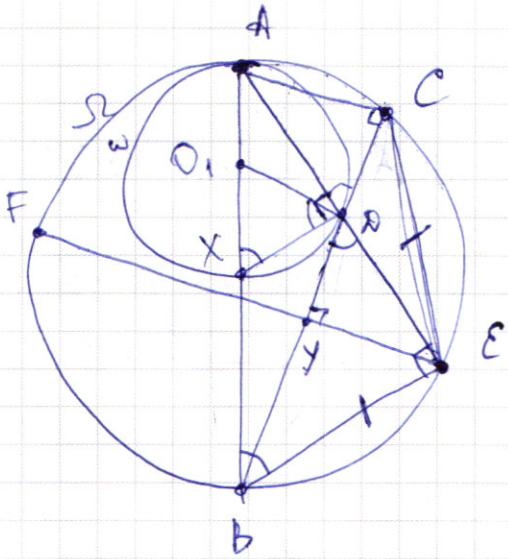
$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$

$\Rightarrow$ в итоге $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: ω и Ω касаются в A, AB – диаметр Ω; BC – хорда Ω. BC касается ω в D; $AD \cap \Omega = E$; $F \in \Omega$; $EF \perp BC$
$\angle AFE$ – ? r – ? R – ? S_{AFE} – ?

r и R – радиусы ω и Ω. т.к. ω и Ω касаются в A, то их центры и A на 1 прямой. Т.е. если $X = AB \cap \omega$, то AX – диаметр ω $\Rightarrow$ $AB = 2R$; $AX = 2r$; $BX = 2R - 2r$

При этом $\angle AEB = \angle ADX = 90^\circ$ – опираются на диаметр

Тогда $XD \parallel BE \Rightarrow \triangle AXD \sim \triangle AB\cancel{E}E \Rightarrow \frac{AX}{AD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow$

$$\frac{2r}{2R} = \frac{AD}{AE}; \quad \frac{R}{r} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD + DE}{AD} = 1 + \frac{DE}{AD}$$

Степень точки D относ Ω: $CD \cdot DB = AD \cdot DE$ (1)

Степень B относ. ω: $BD^2 = BX \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$ (3)

O_1 – центр ω, BD – касательная к ω $\Rightarrow O_1D \perp BD$. Пусть $\angle AXD = \angle ABE = \alpha \Rightarrow$ т.к. $O_1X = O_1D = r$, то $\angle O_1DX = \alpha \Rightarrow$

$\angle O_1DA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ACD = \angle EDB = \alpha \Rightarrow \triangle ADX \sim \triangle AEB \sim \triangle BED$

$\Rightarrow \frac{AD}{AX} = \frac{AE}{AB} = \frac{BE}{BD}$; $\Rightarrow AX = \frac{BD \cdot AD}{BE}$; $AB = \frac{AE \cdot BD}{BE} \Rightarrow$

$2R - 2r = AB - AX = \frac{BD}{BE}(AE - AD) = \frac{BD \cdot DE}{BE} \Rightarrow (2R - 2r) \cdot 2R =$
$= \frac{BD \cdot DE}{BE} \cdot \frac{AE \cdot BD}{BE}$ (т.к. $AB = 2R$) При этом это есть $BD^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BD^2 = \frac{BD^2}{BE^2} \cdot DE \cdot AE \Rightarrow DE \cdot AE = BE^2$ (2)

$\Rightarrow 2R - 2r = \frac{BD \cdot DE}{\sqrt{DE \cdot AE}} = BD \cdot \sqrt{\frac{DE}{AE}}$;

При этом $\angle ACD = 90°$; $EF \cap BC = Y$, и $\triangle ACD \sim \triangle EYD$ по 2 углам

$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DY}$

Заметим, что $\angle ADC = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile BE)$, $\angle ABE = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile CE)$
не содержат других точек

$\angle ADC = \angle ABE = \alpha \Rightarrow \smile BE = \smile CE \Rightarrow FY$ – биссектриса и высота

$\triangle CFB \Rightarrow FY$ и медиана, тогда $BY = CY = \frac{BC}{2} = \frac{\frac{15}{2} + \frac{17}{2}}{2} = 8$

$DY = BD - BY = \frac{17}{2} - 8 = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{AD}{DE} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 15 \Rightarrow \frac{R}{r} = 1 + \frac{DE}{AE} = 1 + \frac{1}{15} = \frac{16}{15}$

С учетом (1): $AD \cdot DE = BD \cdot CD \Rightarrow 15DE^2 = BD \cdot CD \Rightarrow$

$DE = \sqrt{\frac{BD \cdot CD}{15}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 17}{2 \cdot 15 \cdot 2}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$; $AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$;

$AE = 16DE = 8\sqrt{17}$

Из (2): $BE = \sqrt{DE \cdot AE} = \sqrt{DE \cdot 16DE} = 4DE = 2\sqrt{17}$

т.к. $\smile CE = \smile BE$, то $CE = BE$

Подставим $\frac{R}{r} = \frac{16}{15}$ в (3) $\Rightarrow BD^2 = 4\left(\frac{16}{15}r - r\right) \cdot \frac{16}{15}r \Rightarrow$

$BD^2 = 4 \cdot \frac{r}{15} \cdot \frac{16}{15} r \Rightarrow BD^2 = \left(\frac{2 \cdot 4r}{15}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{BD \cdot 15}{8} = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16}$

$R = \frac{16}{15} r = 17$

т.к. $\angle AFE = \angle ABE = \alpha$ – опираются на 1 дугу, то

из $\triangle AEE$ $\sin\alpha = \frac{AE}{BA} = \frac{8 \cdot \sqrt{17}}{2 \cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

И наконец, $\angle AFE = \angle BDE = \alpha \Rightarrow FADY$ – вписанный $\Rightarrow$

$\angle FAD = 180° - \angle FYD = 90° \Rightarrow S_{AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2}$; ~~AE~~ и FE – диаметр

$\Omega \Rightarrow AF$ по т. Пифагора $AF = \sqrt{(2R)^2 - AE^2} = \sqrt{34^2 - 64 \cdot 17} = 2\sqrt{17} \Rightarrow$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = 136$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{255}{16}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$; $S_{AFE} = 136$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

~~Зам~~ Докажем по индукции, что (лемма 1)

$f(a^n) = n f(a)$, где a — полож. рац. (a^n — полож. рац.)

База: $f(a^1) = 1 \cdot f(a)$ — св-во функции

$f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

Переход: верно для n, докажем для $n+1$

$f(a^{n+1}) = f(a^n \cdot a) = f(a^n) + f(a) = nf(a) + f(a) = f(a)(n+1)$

Переход доказан.

~~Пусть $x = p_1^{\alpha_1} p_2$~~ Найдём $f\left(\frac{1}{p}\right)$, p — простое:

$f(p) = f\left(p^2 \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 2 \cdot f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p)$, согласно лемме 1

$f\left(\left(\frac{1}{p}\right)^n\right) = -n \cdot f(p)$

Каноническое разложение x и y: $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$;

$y = p_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, где p_i — простые от 2 до 23 (большие не являются делителями чисел ≤25), $\alpha_i \geq 0$,

$\beta_i \geq 0$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 - \beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n - \beta_n}\right) =$

$= f\left(p_1^{\alpha_1 - \beta_1}\right) + f\left(p_2^{\alpha_2 - \beta_2}\right) + \ldots + f\left(p_n^{\alpha_n - \beta_n}\right) = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot f(p_1) + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) f(p_n) =$

$= (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\left[\frac{p_n}{4}\right] = \underbrace{\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]}_{f(x)} - \Big(\underbrace{\beta_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \beta_n\left[\frac{p_n}{4}\right]}_{f(y)}\Big)$

Найдём $f(x)$ и ~~$f(y)$~~ для $2 \leq x \leq 25$

$x =$	канон. разлож	$f(x)$	x	канон. разлож.	$f(x)$
2	2	0	9	3^2	$2 \cdot f(3) = 0$
3	3	0	10	$2 \cdot 5$	$f(2) + f(5) = 1$
4	2^2	0	11	11	2
5	5	1	12	$2^2 \cdot 3$	0
6	$2 \cdot 3$	0	13	13	3
7	7	1	14	$2 \cdot 7$	1
8	2^3	0	15	$3 \cdot 5$	1

№5 (продолжение)

При $2 \le x \le 25$:

x	канон. разлож	$f(x)$
16	2^4	0
17	17	4
18	$2\cdot 3^2$	0
19	19	4
20	$2^2\cdot 5$	1
21	$3\cdot 7$	1
22	$2\cdot 11$	2
23	23	5
24	$2^3\cdot 3$	0
25	5^2	2

$\Rightarrow$

$f(x)=0$ при $x \in \{2;3;4;6;8;9;12;16;18;24\} = A_1$ (10 вариантов)

$f(x)=1$ при $x \in \{5;7;10;14;15;20;21\} = A_2$ (7 вариантов)

$f(x)=2$ при $x \in \{11;22;25\} = A_3$ 3 варианта

$f(x)=3$ при $x \in \{13\} = A_4 \leftarrow$ 1 вар-т

$f(x)=4$ при $x \in \{17;19\} = A_5 \leftarrow$ 2 вар-та

$f(x)=5$ при $x \in \{23\} = A_6 \leftarrow$ 1 вар-т.

Значит, при $x \in A_i$ $f(x/y) < 0$ при $y \in A_j$, где $j > i$ (т.к. $f(x/y) = f(x) - f(y)$)

1) т.е. $x \in A_1 \rightarrow y$ может быть в $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 \Rightarrow$ для x 10 вар, для y – 14 $\Rightarrow$ всего $10\cdot 14 = 140$

2) $x \in A_2 \rightarrow y$ может быть в $A_3, A_4, A_5, A_6 \Rightarrow$

для x 7 вар, для y – 7; всего $7\cdot 7 = 49$

3) $x \in A_3$, $\rightarrow y$ может быть в $A_4, A_5, A_6 \Rightarrow$

для x 3 вар, для y – 4; всего $3\cdot 4 = 12$

4) $x \in A_4 \rightarrow y$ в $A_5, A_6 \Rightarrow$ для x – 1вар, для y – 3

всего $1\cdot 3 = 3$

5) $x \in A_5 \rightarrow y \in A_6 \rightarrow$ для x – 2 вар, для y – 1

всего $2\cdot 1 = 2$ вар.

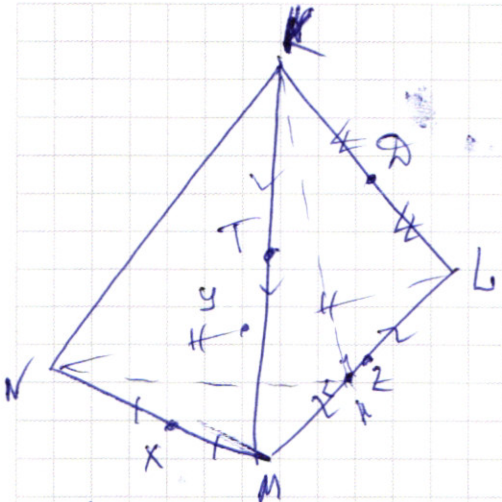
6) $x \in A_6 \rightarrow y$ не сущ. подходящего

Итого: $\underbrace{140+49}_{189} \underbrace{+12}_{201} + 3 + 2 = 206$ вариантов

Ответ: 206 пар

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№7

$KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$

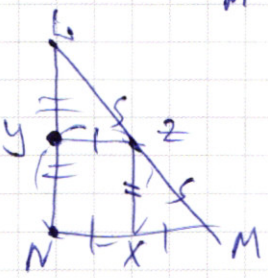
LM - ?

r - ?

Решение:

Сечение сферы плоскостью - окружность =>

$NYZX$ - вписанный четырех.



$NYZX$ - параллелограмм, т.к. он вписан, то это прямоугольник.

$\Rightarrow \angle LNM = 90^\circ$

Окружность (T, D, Z) в плоскости KLM - окружность 9-ти точек $\triangle KLM$ => она вторично пересекает стороны $\triangle KLM$ в основаниях его высот. Аналогично для $\triangle NLM$ и соотв. плоскости => т.к. прямая и сфера имеют не более 2 общих точек, то пересечение сферы и ML - Z и H, где KH и NH - высоты $\triangle KLM$ и $\triangle NML$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$\cancel{\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}}$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \overset{(1)}{\leqslant} ax+b \overset{(2)}{\leqslant} -32x^2+36x-3$$

(1): $\frac{16x-16-(ax+b)(4x-5)}{4x-5} \geqslant 0$; $\frac{4ax^2 - x(16-4b+5a)+16-5b}{4x-5} \leqslant 0$

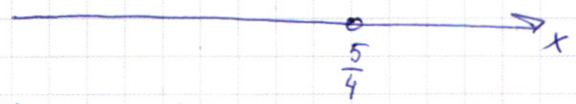
Нули знаменателя: $x = \frac{5}{4}$

Нули числителя: $16x-16-4ax^2+5ax-4bx+5b=0$

$-4ax^2+x(16-4b+5a)-16+5b=0$

~~$4ax^2$ $D = 16-4b+5a$~~

Пусть корни — x_1, x_2



$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$ — гипербола

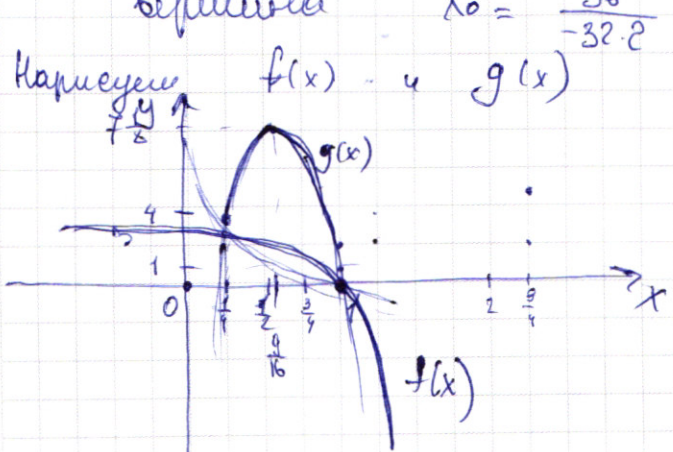
$f(x) = 4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ — гипербола, смещенная на $\frac{5}{4}$ по Ox

и на 4 по Oy

$g(x) = -32x^2+36x-3$ — парабола ветвями вниз,

вершина $x_0 = \frac{-36}{-32\cdot 2} = \frac{9}{16} > \frac{1}{4}$

Нарисуем $f(x)$ и $g(x)$:



$g(1) = -32+36-3 = 1$

$g\left(\frac{9}{16}\right) = -\frac{32\cdot 81}{16\cdot 16}+\frac{36\cdot 9}{16}-3 = \frac{81-24}{8} = \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3 = -2+9-3 = 4$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 3$

№5 (продолжение)

т.е. при $x = \frac{1}{4}$ ~~ax+b при~~ $ax+b \in [3;4]$

при $x = 1$ $ax+b \in [0;1]$ =>

$$\begin{cases} \frac{a}{4}+b \in [3;4] \\ a+b \in [0;1] \end{cases} \Rightarrow$$

Если $a>0$, то ~~эта прямая~~ лежит $ax+b$ при $x=\frac{1}{4}$ от 3 до 4, то при $x=1$, $ax+b>3$ — пересекает ~~на~~ $g(x)$ где-то от $\frac{1}{4}$ до 1 => нер-во ~~на~~ (2) не выполняется => $a<0$

У прямой $ax+b$ нет пересечения с $f(x)$ при $x\in[\frac{1}{4};1]$ => ах может быть максимум касательной

Ур-е касательной к $f(x)$ в $x=x_0$: $k(x) = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0) =$

$= -\frac{(x-x_0)}{(x_0-\frac{5}{4})^2}+4+\frac{1}{x_0-\frac{5}{4}} \Rightarrow -\frac{1}{4} \geq (x_0-\frac{5}{4}) \geq -1$ при $x_0\in[\frac{1}{4};1] \Rightarrow$

$1 \geq (x_0-\frac{5}{4})^2 \geq \frac{1}{16}$

$k(x) = \underbrace{\frac{-x}{(x_0-\frac{5}{4})^2}}_{a}+\frac{x_0}{(x_0-\frac{5}{4})^2}+4+\frac{1}{x_0-\frac{5}{4}} \Rightarrow -1 \geq a \geq -16$

При этом $ax+b$ не выше, чем прямая через $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$, т.е. это $\begin{cases} \frac{1}{4}a+b=4 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{4}a=-3;\ a=-4$, $b=5$

Подходят прямые $(-4;5)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 11

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\alpha - ?$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\boxed{tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta +$

$+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\Downarrow$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \sqrt{5}\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha + \frac{2}{5}\right) =$

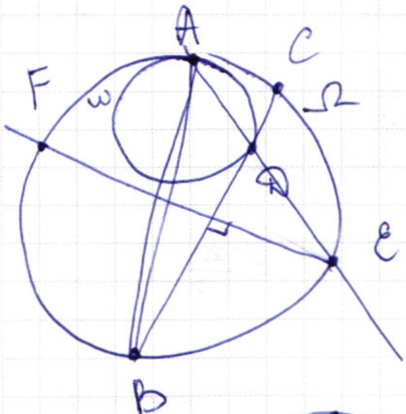
$\pm 2\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta + \sqrt{5}\sin^2 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha +$ $= \pm 2\sin 2\beta + \sqrt{5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}$

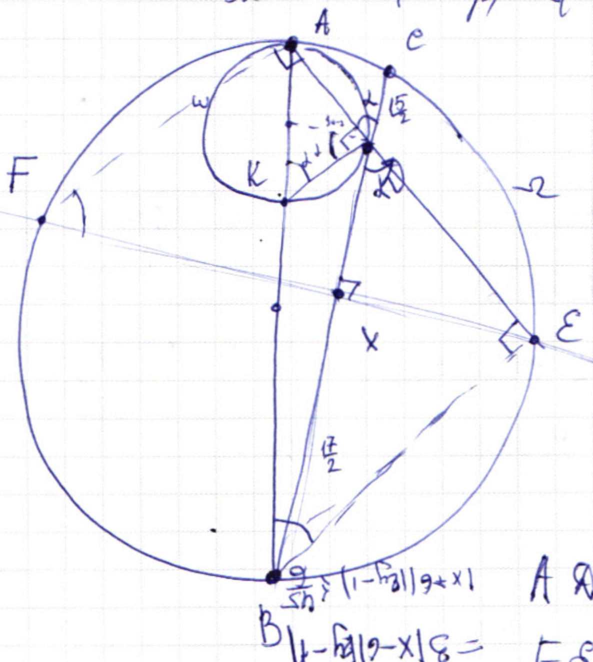
$+\cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

б

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$





$\angle AFE$, R, r

$S_{AFE} - ?$

$CD = \frac{15}{2}$

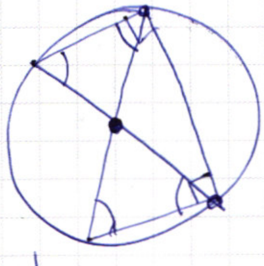
$BD = \frac{17}{2}$

$AD\cdot DE = CD\cdot DB$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AK}{AB} = \frac{r}{R}$

$\triangle DXF$ - вписанный

FE - диаметр



$AD = 2r\sin\alpha$

$AE = 2R\sin\alpha$

$CD\cdot DB = \sin\alpha\cdot 2r(2R-2r)$

$BK\cdot AB = BD^2$

$(2R-2r)\cdot 2R = BD^2$

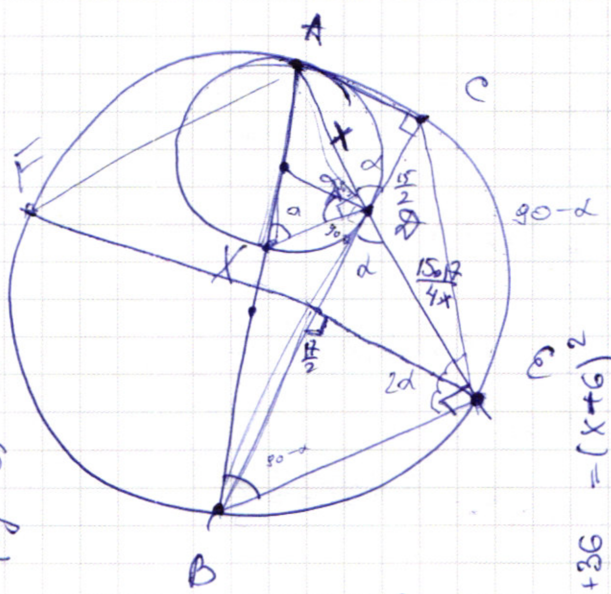
$\boxed{\frac{r\sin\alpha}{R} = \frac{CD}{BD}}$

$9 + \frac{15}{2} - x - \ldots =$

$= (1 - \ldots)(9-x)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$(2R-2r)\cdot 2R = BD^2$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 15 \\ \hline 85 \\ 17 \\ \hline 255 \end{array}$$

$AD\cdot DE = CD\cdot DB$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$\triangle AXD \sim \triangle ABE \sim \triangle BDE$

$\frac{AX}{AD} = \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DE}$

$\frac{2r}{AD} = \frac{2R}{AE} = \frac{BD}{DE} = \frac{AD}{CD}$

$2R = BD\cdot\frac{AE}{DE} = BD\left(1+\frac{AD}{DE}\right) = BD + 2r$

$2r = \frac{AD}{DE}\cdot BD = \frac{AD^2\cdot BD}{CD\cdot BD} = \frac{AD^2}{CD}$

$x^2-12x+36 = (x+6)^2$

$36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 36y^2-36y+9$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(12y-6)^2 + (6y-3)^2$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad tg\,\alpha - ?$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot k_1 + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)k_2 = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin\alpha = tg\,\alpha\cdot\cos\alpha$ $\quad \sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$

$2tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot k_1$

$2\cos 2\beta\,\underbrace{(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}} = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$2\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$

$= 2tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$2tg\,\alpha\cos^2\alpha \pm 4\cos^2\alpha \mp 2 = -1$

$\boxed{\frac{CD}{BD}} = \frac{AC}{2R}$

$\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha$;

$2\ldots + 4\cos^2 - 2 = -1$

$1-\cos^2\alpha = tg^2\alpha\cos^2\alpha$

$-4c^2+2=-1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$

$80+56$

$4\cdot17\cdot17$

$40+28$

6

$(x-6)^2 = x^2-12x+36$

$x^2-12x+36$

$(x+6y)^2 - 12xy - 12x - 36y = 45$

$(x+6y)^2 = 45 + 12(xy + x + 3y)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \le \sqrt{15} \\ (x+6)^2 + 36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 90 \end{cases}$$

$x^2+144y^2-24xy = 2xy-12y-x+6$

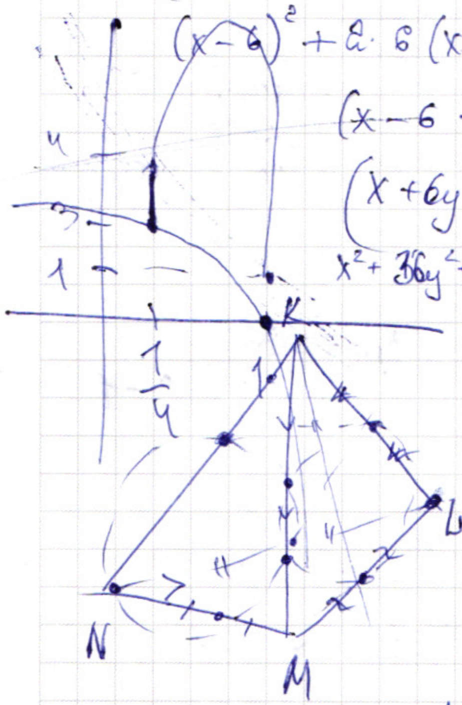
$(x-12y)^2 = (x-6)(2y-1) = 2(x-6)\left(y-\frac{1}{2}\right)$

$(x-6)^2 + 2\cdot 6(x-6)\left(y-\frac{1}{2}\right) + \left(6\left(y-\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 90 + 6\cdot(x-12y)^2$

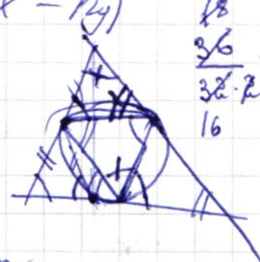
$(x-6+6y-3)^2 = 90+6(x-12y)^2$

$(x+6y-9)^2 = 90+6(x-12y)^2$

$x^2+36y^2+81+12xy-18x-$



$\frac{18}{36}$ $\frac{9}{32\cdot 2}$ 16 $= \frac{9}{16} > \frac{1}{4}$

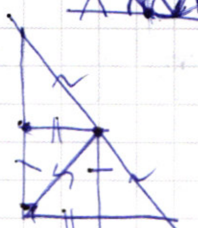


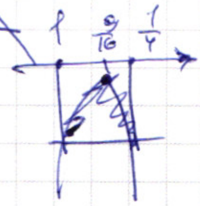
KL = 3

KM = 1

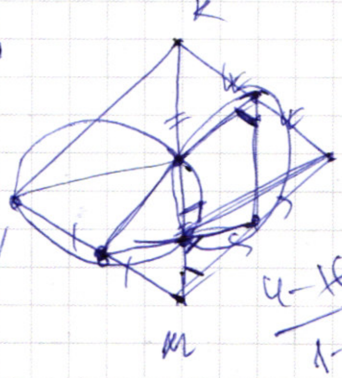
MN = $\sqrt{2}$

LM - ?

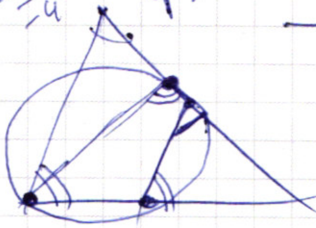


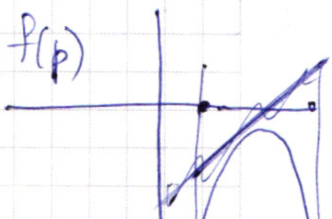


$-32x^2+36x-3$



$\frac{4-16}{1-5} = -\frac{12}{-4} = 3$ $f(p^2) = 2f(p)$





$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

2
3
5
7
11
13
17
19
23

$f(1) = 1$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{16} + \frac{36}{2} - 3 =$

$= -2+18-3 =$

$g\left(\frac{9}{16}\right) = -\frac{32\cdot 81}{16\cdot 16} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3$

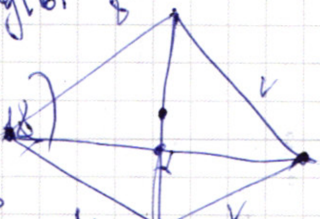
$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$

$f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \dots$

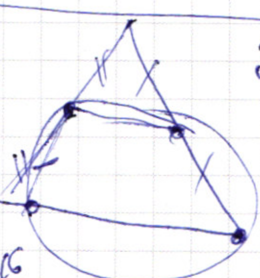
$f(p_1) = f\left(\frac{p_1^2}{p_1}\right) = 2f(p_1) + f\left(\frac{1}{p_1}\right) \to f\left(\frac{1}{p_1}\right) = -f(p_1)$

$\frac{9}{8}(-9+18)$

$\frac{81}{8} - 3$



$\frac{9}{4}$



$3 \ge 4 + \frac{4}{4x-5} \ge 0$

$-1 \ge 4x-5 \ge -4$

$-1 \ge \frac{4}{4x-5} \ge -4$

24

$\frac{-16}{-5} = \frac{16}{5} =$

0

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-6)^2 + 36(y-\frac{1}{2})^2 = \cancel{45}\ 90 \Rightarrow$

$x^2 + 144y^2 - 24yx =$

$(x-12y)^2 = (\cancel{x-6})(2y-1) = 2(x-6)(y-\frac{1}{2})$

$0 \leq x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \leq \sqrt{\frac{90}{6}} = \sqrt{15}$

$90 \ \cancel{45} \geq 2\sqrt{(x-6)^2 \cdot 36(y-\frac{1}{2})^2} = 2\cdot|x-6|\cdot 6|y-\frac{1}{2}| = 6|x-6||2y-1|$

$\sqrt{15}+12y \geq x \geq 12y$

$10x - x^2 > 0$

$(x-6)^2 + 36(y-\frac{1}{2})^2 = 90$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(x-6)^2 + 12(x-6)(y-\frac{1}{2}) + 36(y-\frac{1}{2}) = 90 + \cancel{6}$

$6(x-12y)^2$

$\log_3(10x-x^2) = \frac{\log_5(10x-x^2)}{\log_5 3} = l$

$\log_2 3 = \frac{1}{\log_3 2}$

$l > \log_3\frac{4}{3} > 0$

$x^{\log_x n} = n$

$\log_5(10x-x^2)\cdot\log_3 5$

$l > \log_3\frac{5}{3} > \log_3\frac{4}{3} > 0$

$1 + \log_5 3\cancel{lg} = \log_5 15 = \frac{\log_3 15}{\log_3 5} = \frac{\log_3 5 + 1}{\log_3 5} = 1+$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

при $t = 3^2$

$(\frac{4}{3})^2 - (\frac{5}{3})^2 = 4 - 1$

46

25

5

125

$t = 3k$ $\quad t = 3^n$

$3^n + 4^n - 5^n$

$\cancel{t^{\log_3 4}}$ $t(t^{\log_3\frac{4}{3}} - t^{\log_3\frac{5}{3}}) \geq 0$

$t = 0_2$

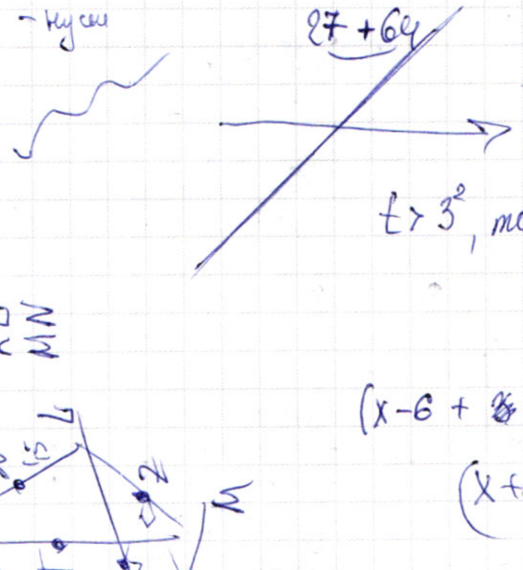
$t = 3^2$ – нули

$t^{\log_3\frac{4}{3}} - t^{\log_3\frac{5}{3}} \leq -1$

$27 + 6y$

$2(\frac{n}{8} - x) -$

$> 2t^{\log_3 4}$



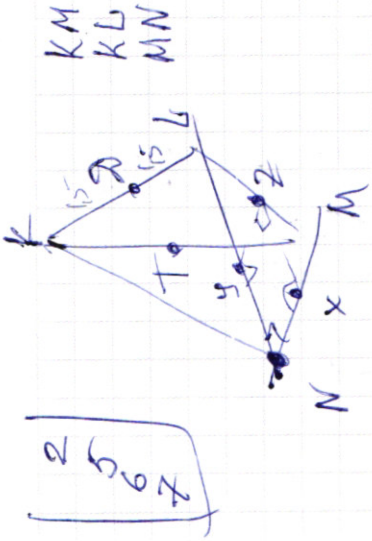
$t > 3^2$, то $\cancel{t^{\log}}$ $t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} > 3^2 + 4^2 = 5^2$

$t^{\log_3 5} > 5^2$

KM

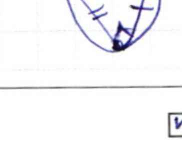
KL

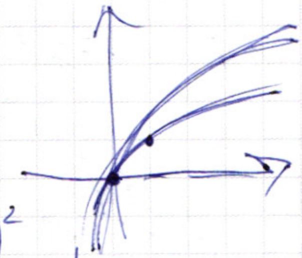
MN

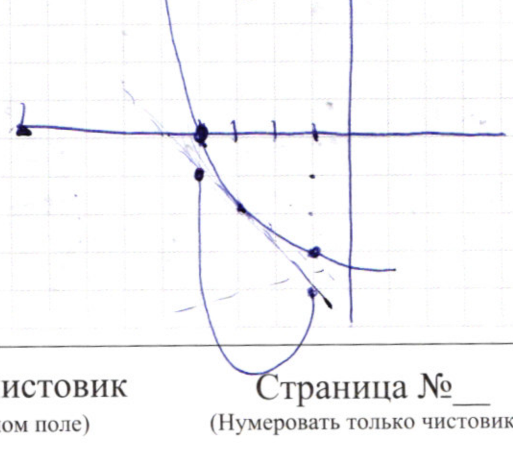


$(x - 6 + \cancel{36}6y - 3)^2 = 90 + 6(x-12y)^2$

$(x + 6y - 9)^2 = 90 + 6(x-12y)^2$







☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)