МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20 \quad (1) \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44 \quad (2) \end{cases}$$

Вычтем из (1) уравнения системы (2), получаем: $7x - y = 64$, $y = 7x - 64$.

Подставим полученное значение y в (1) уравнение системы:

$$7x + \sqrt[3]{49x^2 - (7x-64)^2} = 20$$

$$7x + \sqrt[3]{49x^2 - 49x^2 + 14\cdot 64x - 64^2} = 20$$

$$7x + 4\sqrt[3]{14x - 64} = 20$$

Введем замену. Пусть $t = \sqrt[3]{14x - 64} \Rightarrow \frac{t^3}{2} = 7x - 32$, $\frac{t^3}{2} + 32 = 7x$

$$\frac{t^3}{2} + 32 + 4t = 20 \quad |\cdot 2$$

$t^3 + 8t + 24 = 0$ – уравнение 3 степени, коэффициент при t^3 равен $1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ если корни есть, то они среди делителей свободного члена.

$24: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24.$

Проверять положительные корни не имеет смысла, т.к. тогда исходное уравнение никогда не будет равняться 0.

По схеме Горнера:

	1	0	8	24	
−1	1	−1	9	15	– не корень
−2	1	−2	12	0	– корень.

$t^3 + 8t + 24 = (t+2)(t^2 - 2t + 12)$, оценим $t^2 - 2t + 12$:

$$t^2 - 2t + 12 = (t-1)^2 + 11 \geq 11$$

Значит $t = -2$ – ед. корень.

Вернемся к замене: $-2 = \sqrt[3]{14x - 64} \quad (\uparrow)^3$

$-8 = 14x - 64$

$14x = 56$

$x = 4$

$y = 7x - 64 = 28 - 64 = 36$

Таким образом, $(4; 36)$ – решение системы.

Ответ: $(4; 36)$.

№2.

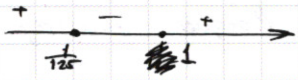
$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

Условие: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 5x > 0 \\ 5x \neq 1 \\ 125x \neq 1 \\ 125x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \end{cases}$

$$\sqrt{4 \log_{5x} x} \leq -2 \log_{125x} x$$

применив метод рационализации имеем:

$$\begin{cases} \log_{125x} x \leq 0 \\ 4 \log_{5x} x \leq 4 \log^2_{125x} x \end{cases}, \quad \begin{cases} (125x - 1)(x - 1) \leq 0 \\ \log_{5x} x \leq \log^2_{125x} x \quad (2) \end{cases}$$



Решим (2) неравенство системы отдельно:

$$\log_{5x} x \leq \log^2_{125x} x$$

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{1}{\log_x 5x} \geqslant \dfrac{1}{\log_x^2 125x} \end{cases}, \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{1}{\log_x 5 + 1} \geqslant \dfrac{1}{(3\log_x 5 + 1)^2} \quad (2) \end{cases}$$, решим (2) неравенство системы, введя замену;

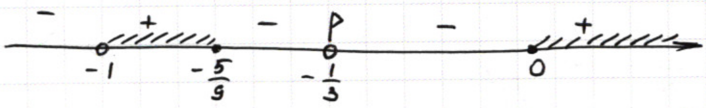
Пусть $t = \log_x 5$, тогда:

$$\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(3t+1)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{9t^2 + 6t + 1 - t - 1}{(t+1)(3t+1)^2} \geqslant 0$$

$$\frac{t(9t+5)}{(t+1)(3t+1)^2} \geqslant 0$$

Используя обобщенный метод координат:



$$t \in (-1; -\tfrac{5}{9}] \cup [0; +\infty).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вернемся к замене:

$$\left[\begin{array}{l} -1 < \log_x 5 \le -\frac{5}{9} \quad (2) \\ \log_x 5 \geq 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

1) $\log_x 5 \geq 0$

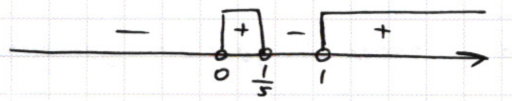
$(x-1)(5-1) \geq 0$

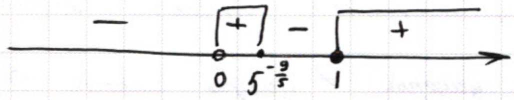
$x \geq 1$

2) $\begin{cases} \log_x 5 > -1 \\ \log_x 5 \le -\frac{5}{9} \end{cases}$, $\begin{cases} (x-1)(5-x^{-1}) > 0 \\ (x-1)(5-x^{-\frac{5}{9}}) \le 0 \end{cases}$

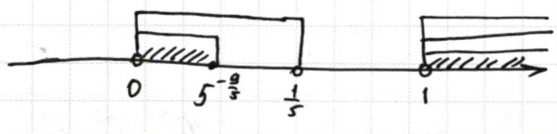
$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)(5x-1)}{x} > 0 \\ \dfrac{(x-1)(5x^{\frac{5}{9}}-1)}{x^{\frac{5}{9}}} \le 0 \end{cases}$$

Пользуясь обобщенным методом интервалов, имеем:





Итог:



Решением совокупности является $x \in (0; 5^{-\frac{9}{5}}] \cup (1; +\infty)$.

По условию: $x \neq \frac{1}{125}$, сравним $5^{-\frac{9}{5}}$ и $\frac{1}{125}$.

$5^{-\frac{9}{5}} \overset{>}{\vee} 5^{-3}$

$-\frac{9}{5} > -3$

Таким образом: $x \in (0; \frac{1}{125}) \cup (\frac{1}{125}; 5^{-\frac{9}{5}}] \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(0; 5^{-3}) \cup (5^{-3}; 5^{-\frac{9}{5}}] \cup (1; +\infty)$

№3.

Известно, что сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени 10 равна 12531.

Заметим, что число 12531 – пятизначное $\Rightarrow$ максимальная степень последовательности степеней 10 равна 5.

1) Рассмотрим ситуацию, когда некоторое число X (семизначное) делят на ~~$10^6, 10^5, 10^4$~~. $10^5, 10^4, 10^3$

$$X \bmod 10^5 \equiv 1\cdot 10^4 + a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10.$$

$$X \bmod 10^4 \equiv a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0$$, где a, b, c, d, e – натуральные числа ≤ 9.

$$X \bmod 10^3 \equiv b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0.$$

В соответствии с условием задачи имеем:

$$\begin{array}{r} 1\,a\,b\,c\,d \\ +\quad a\,b\,c\,d \\ b\,c\,d \\ \hline 1\,2\,5\,3\,1 \end{array}$$

$2a = 2 \Rightarrow a = 1$

$3b = 5$, т.к. $b \in N \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 3c = 23$, т.к. $c \in N \Rightarrow c = 7 \Rightarrow 3d = 21$, $d = 7$.

Имеем, что число X должно заканчиваться на 11177, всего таких семизначных чисел: $9\cdot 10 = 90$ (на 1 место можно поставить (все цифры) $\forall$ цифру, кроме 0, на 2 место можно поставить $\forall$ цифру).

2) Посмотрим, что будет, если X делят на $10^4, 10^3, 10^2$.

$$X \bmod 10^4 \equiv a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0$$

$$X \bmod 10^3 \equiv b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0$$

$$X \bmod 10^2 \equiv c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0$$

$$\begin{array}{r} a\,b\,c\,d \\ +\quad b\,c\,d \\ c\,d \\ \hline 1\,2\,5\,3\,1 \end{array}$$

Если $a = 9$, $b = 9$, то

$$10\cdot a + 2b = 90 + 18 = 108 \neq 125.$$

Значит, невозможно подобрать такие a, b, c, d.

3) Посмотрим, что будет, если X делят на $10^5, 10^4, 10^3$.

$$X \bmod 10^6 \equiv \cancel{a\cdot 10^5 + b\cdot 10^4 + c\cdot 10^3 + d\cdot 10^2}\ a\cdot 10^4 + b\cdot 10^3 + c\cdot 10^2 + d\cdot 10 + e.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \mod 10^4 \equiv b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$

$x \mod 10^3 \equiv c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$.

$$\begin{array}{r} abcde \\ + \quad bcde \\ cde \\ \hline 12531 \end{array}$$

При $a=1$ (рассмотрено в 1 случае).

При $a=0$:

1) $b=6$:

$3c=5$, $c \in N \Rightarrow c=1$

$3d=23$, $d \in N \Rightarrow d=7$

$3e=21 \Rightarrow e=7$

$\longrightarrow$ 06177 – 90 чисел.

2) $b=5$:

$2b=10 \Rightarrow 3c=25$, $c \in N \Rightarrow c=7$

$3d=33$, $d \le 9 \Rightarrow d=9$

$3e=51 \Rightarrow e=27$, $e>9$, что противоречит условию $e \le 9$.

При еще большем уменьшении b, $d, e, c \uparrow$ (возрастают), $d>9$, $e>9$, $c>9$, что противоречит условию.

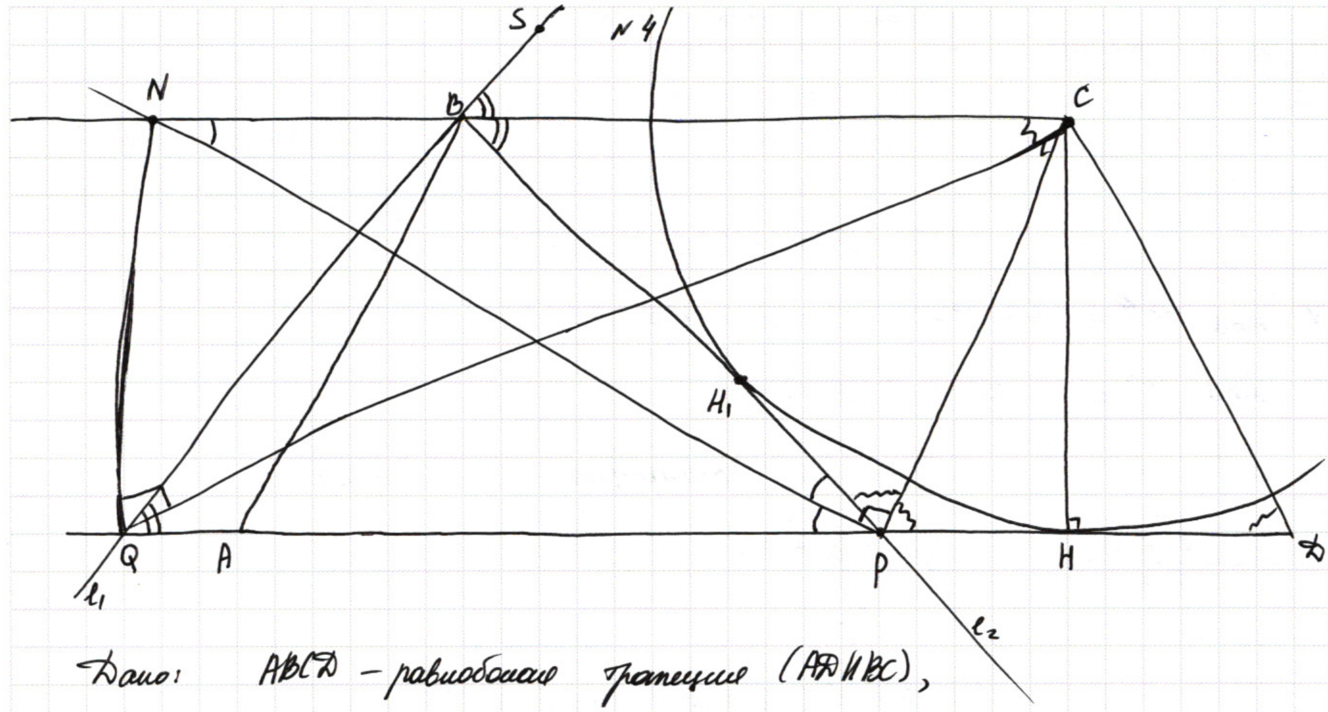
Таким образом, семизначные числа, соответствующие условию задачи:

1011177, 1111177, 1211177, …, 9811177, 9911177 – 90 чисел.

1006177, 1106177, 1206177, …, 9806177, 9906177 – 90 чисел.

Всего – 180 чисел.

Ответ: 180



Дано: $ABCD$ — равнобокая трапеция ($AD \parallel BC$),

$\omega(C; CH)$, l_1, l_2 — касательные к ω, $\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$.

$l_1 \cap AD = Q$, $l_2 \cap AD = P$, $\angle NPC = 90^\circ$ (т. $N \in BC$), $AP = 13$, $NC = 26$.

Найти: $\angle ADC$, $\angle NQC$, S_{NCDQ} — ?

Решение:

1) в $\triangle NCP$ (прямоугольном):

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$ (условие) $\Rightarrow \operatorname{tg}\angle NCP = \frac{5}{12}$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg}\angle NCP = \frac{NP}{CP} = \frac{5}{12} \\ &5, 12, 13 \text{ — Пифагорова тройка} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{NP}{NC} = \frac{5}{13}, \ \frac{CP}{NC} = \frac{12}{13}$$

$$NP = \frac{5NC}{13} = \frac{5\cdot 26}{13} = 10$$

$$CP = \frac{12NC}{13} = 24$$

$$\left.\begin{aligned} &\angle NCP = \angle CPD \text{ (накрест-лежащие при } BC \parallel AD\text{, секущей } CP) \\ &\angle H_1PC = \angle CPD \ (PH_1 \text{ и } PD \text{ — касательные к } \omega). \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle H_1PC = \angle BCP \Rightarrow \triangle BCP$ — равнобедренный $\Rightarrow BC = BP$.

$$\text{в } \triangle NCP: \left.\begin{aligned} &\angle BCP + \angle CNP = 90^\circ \\ &\quad\text{и} \\ &\angle BPC + \angle NPB = 90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle CNP = \angle NPB \Rightarrow \triangle NBP \text{ — равнобедренный} \Rightarrow$$

$\Rightarrow NB = BP$.

Имеем: $NB = BP = BC \Rightarrow BP = \frac{1}{2}NC = 13$, т. B — середина NC.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left.\begin{array}{l} AP = BC \\ AP \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow ABCP$ - параллелограмм. $\Rightarrow AB = CP$

$\left.\begin{array}{l} AB = CD \text{ (по условию трапеция } ABCD \text{ равнобедренная)} \\ AB = CP \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = CP \Rightarrow \triangle DCP$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle ADC = \angle CPD = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$.

2) $\left.\begin{array}{l} \angle SBC = \angle PBC \text{ (т.к. } BS \text{ и } BP \text{ - касательные, } C \text{ - центр } \omega) \\ \angle SBC = \angle BQP \text{ (соответственные при } BC \parallel AD \text{, секущей } BQ) \\ \angle CBP = \angle BPQ \text{ (накрест-лежащие при } BC \parallel AD \text{, секущей } BP) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle QBP$ - равнобедренный $\Rightarrow QB = BP = 13$.

Заметим, что QB - медиана $\triangle NCQ$, $QB = \frac{1}{2}NC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle NCQ$ - прямоугольный по св-ву медианы $\Rightarrow \angle NQC = 90°$.

3) $\angle NQC = \angle NPC = 90° \Rightarrow NQPC$ - вписанный четырехугольник (~~вписанные~~ равные углы, опираются на NC)

$\left.\begin{array}{l} NC \parallel QP \\ NQPC \text{ - вписан} \end{array}\right\} \Rightarrow NQPC$ - равнобедренная трапеция (т.к. только около равнобедренной трапеции можно описать ω).

$\Downarrow$

$NQ = CP = CD$.

$NQ = CD$

$NQPC$ - равнобедренная трапеция $\Rightarrow \angle NQP + \angle NCP = 180° \Rightarrow \angle NQP = 180° - \angle NCP \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle NQP + \angle CDQ = 180° \Rightarrow CD \parallel NQ$ (односторонние углы, секущая QD).

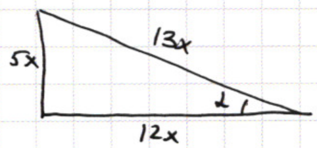
Имеем: $\left.\begin{array}{l} NQ \parallel CD \\ NQ = CD \end{array}\right\} \Rightarrow NQDC$ - параллелограмм $\Rightarrow NC = QD$; ~~AH~~

$S_{NQDC} = CD \cdot QD \cdot \sin\angle CDQ$

$CD = 24$

$QD = NC = 26.$

$\angle CDQ = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$



5, 12, 13 – ~~тогда~~ Пифагорова тройка.

$tg\,\alpha = \frac{5}{12} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{13}.$

Таким образом, $\sin\angle CDQ = \frac{5}{13}.$

Имеем: $S_{NQDC} = CD \cdot QD \cdot \sin\angle CDQ = 24 \cdot 26 \cdot \frac{5}{13} = 240.$

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$;

$\angle NQC = 90°$;

$S_{NCDQ} = 240.$

№5.

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos(x - \frac{\pi}{3}) & (1) \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin(x+\frac{\pi}{6}). & (2) \end{cases}, \quad (tg x + tg y) - ?$$

$$tg x + tg y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x+y)\cdot 2}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

Рассмотрим (1) уравнение системы:

$\sin(x-y) = -9\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$\sin x\cos y - \sin y\cos x = -9(\cos x\cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3})$

$\sin(x-y) = -9\cos x - 9\sqrt{3}\sin x$

Рассмотрим (2) уравнение системы:

$\cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$2\cdot\cos(x-2y+\frac{\pi}{3}) = 20\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(x-2y+\frac{\pi}{3}) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos(x-\frac{\pi}{3}) \\ \cos(x-2y+\frac{\pi}{3}) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos(-\frac{\pi}{2} + x + \frac{\pi}{6}) = \sin(x+\frac{\pi}{6})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \quad (1) \\ \cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right) = 10\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

(1): $\sin(x-y) + 9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$

((1) : (2)): $\frac{\sin(x-y)}{\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{9}{10}$

$10\sin(x-y) + 9\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

Если $a = x-y$, $b = x+y$, то:

$$\begin{cases} x-y=a \\ x+y=b \end{cases}$$
$-2y = a-b$
$-y = \frac{a-b}{2}$

$10\sin a + 9\cos\left(a+\frac{a-b}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$10\sin(x-y) + 9\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$10(\sin x\cos y - \sin y\cos x) + 9\left(\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-2y\right) - \sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-2y\right)\right) = 0$

$10\sin x\cos y - 10\sin y\cos x + 9\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-2y\right) - 9\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-2y\right) = 0 \quad |:\sin x\cos x$

$10\frac{\cos y}{\cos x} - 10\frac{\sin y}{\sin x} + 9\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-2y\right)}{\sin x} - 9\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2y\right)}{\cos x} = 0$

$10\sin x\cos y - 10\sin y\cos x + 9\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-2y\right) - 9\sin x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-2y\right) = 0 \quad |: \cos x\cdot\cos y$

$\overset{10\,tg x}{\cancel{10\,tg x\cos y}} - 10\,tg y + 9\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}-2y\right)}{\cos y} - 9\,tg x\sin\left(\frac{\pi}{3}-2y\right) = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(x-y) = \sqrt{1-\sin^2(x-y)} = \sqrt{1 - 81\cos^2(x-\frac{\pi}{3})}$

$\cos(2(x-y)) = 2\cos^2(x-y) - 1 = 1 - 2\sin^2(x-y)$

$\sin(2(x-y)) = 2\sin(x-y)\cos(x-y)$

$\frac{\cos 2\alpha \cos\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta}{10} = \frac{\sin\alpha}{-9}$

$\frac{\sin(x-y)}{-9} = \frac{\cos(x-2y+\frac{\pi}{3})}{10}$

$10\sin(x-y) = -9\cos(x-2y+\frac{\pi}{3})$

~~$-9 \quad 18 \quad 10 =$~~

~~$-9 - 1 = -10$~~

$-9\cos 2\alpha\cos\beta + 18\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta = 10\sin\alpha.$

№6.

$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \le ax + b \le -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$ $\quad [\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$

$x^2 + 5x - \frac{175}{4} = x^2 + \frac{5}{2}\cdot 2x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} - \frac{175}{4} = (x+\frac{5}{2})^2 - \frac{200}{4} = (x+\frac{5}{2})^2 - 50$

$\sqrt{50 - (x+\frac{5}{2})^2} \le ax + b \le \frac{-(2x-2)^2 + 85}{12}$

$-\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4} = \frac{-4x^2 + 8x + 81}{12} =$

$4x^2 - 8x - 81 = (2x)^2 - 2\cdot 2x \cdot 2 + 4 - 4 - 81 = (2x-2)^2 - 85$ $\quad 85 - 49 = 36$

$\frac{1}{2} \le x \le \frac{9}{2} \Rightarrow 1 \le 2x \le 9 \Rightarrow -1 \le 2x - 2 \le 7$

~~$\frac{(2x-2)^2 - 85}{12} > \sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2}$~~

$0 \le (2x-2)^2 \le 49$ $\quad \le \frac{85}{12}$

$-85 \le (2x-2)^2 - 85 \le -36$

$85 - (2x-2)^2 \ge 0$

$-\frac{85}{12} \le \frac{(2x-2)^2 - 85}{12} \le -3$

$85 \ge (2x-2)^2$

$50 \ge (x+\frac{5}{2})^2$

$85 | 5$
$17 |$

$-49 \le -(\ldots)^2 \le 0$

$\sqrt{85} \ge 2x - 2$

$-\frac{85}{49}$
36

$36 \le -(2x-2)^2 + 85 \le 85$

$x \le 1 + \frac{\sqrt{85}}{2}$

$5\sqrt{2} \ge x + \frac{5}{2}$

$x \le 5\sqrt{2} - \frac{5}{2}$!

сильнее $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x \le 5\sqrt{2} - \frac{5}{2}$!

$5\sqrt{2} - \frac{5}{2} \quad \overset{<}{\vee} \quad 1 + \frac{\sqrt{85}}{2} \quad) \cdot 2$

$3 \le \ldots \le \frac{85}{12}$

$+\frac{35}{49}$
134

$10\sqrt{2} - 5 \quad \overset{<}{\vee} \quad 2 + \sqrt{85}$

$\frac{85}{12} \le 7\frac{1}{12}$

$10\sqrt{2} \quad \overset{<}{\vee} \quad 7 + \sqrt{85}$

$9 \le \sqrt{85} \le 10$

$200 \quad \overset{<}{\vee} \quad 49 + 85 + 14\sqrt{85}$

$66 \quad \overset{<}{\vee} \quad 14\sqrt{85}$

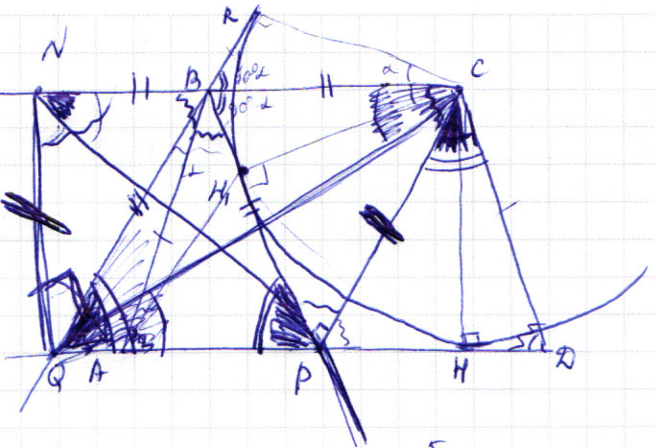
$33 \quad \overset{<}{\vee} \quad 7\sqrt{85}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\angle A D C$ - ?
$\angle NQC$ - ?
S_{NCDQ} - ?

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$AP = 13$
$NC = 26$.

$\frac{NP}{PC} = \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{NP}{NC} = \frac{5}{13} \Rightarrow$

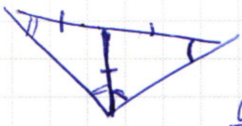
$\Rightarrow NP = \frac{5NC}{13} = 10$

$PC = \frac{12NP}{5} = \frac{12 \cdot 10}{5} = 24$

$CH = \frac{NP \cdot PC}{NC} = \frac{\cancel{10}^{5} \cdot 24}{\cancel{26}_{13}} = \frac{120}{13}$

$\frac{CH}{PH} = \frac{5}{12} \Rightarrow PH = \frac{12CH}{5} = \frac{12 \cdot 120^{24}}{13 \cdot 5} = \frac{144 \cdot 2}{13} = \frac{288}{13}$

B - середина NC => BC = 13 = BP.



$HD = \frac{AD - BC}{2}$. APCB - параллелограмм => CP = AB = CD = 24.

$\frac{CH}{CP} = \frac{5}{13} \Rightarrow CP = \frac{13CH}{5} = \frac{13 \cdot 120^{24}}{5 \cdot 13} = 24$

$\sin \angle ADC = \frac{CH}{DC} = \frac{120^{5}}{13 \cdot 24} = \frac{5}{13} \Rightarrow \angle ADC = \arcsin\frac{5}{13}$

$180° - 2h$

~~DH_1~~ $= \frac{CH_1}{DH_1} = \frac{5}{12} \Rightarrow PH_1 = \frac{12CH_1}{5} = \frac{12 \cdot 120}{13 \cdot 5} = \frac{288}{13}$ $13 - \frac{288}{13}$

№3

$X \bmod 10^{n-1} + X \bmod 10^{n} + X \bmod 10^{n+1}$

$12531 \mid 3$, 4177

4177

$531 \mid 3$, 1

~~$x+x+x = 3$~~
~~$y+y+y = 2$~~..

~~xyz~~

$$\begin{array}{r} 11xyz \\ + \quad 1xyz \\ xyz \\ \dots \\ \hline 12\dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11177 \\ + \quad 1177 \\ + \quad 177 \\ \hline 12531 \end{array}$$

$3z + 10 \cdot 3y + 3 \cdot 100x = 531$

$x = 1$: $300 + 30y + 3z = 531$

$30y + 3z = 231$

$10y + z = 77$

$z \le 10$, $y \le 10$ =>

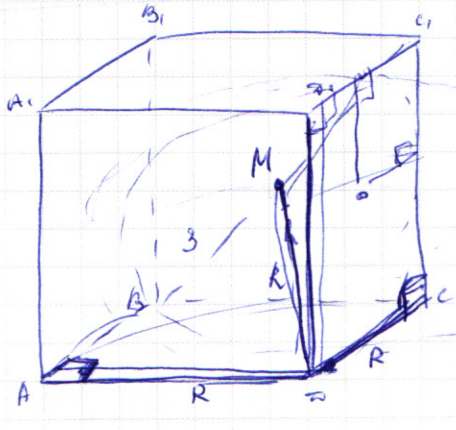
=> $z = 7$, $y = 7$

$\overline{ab}11177$

$\overline{ab} = \{10; 11; \dots; 99\}$.

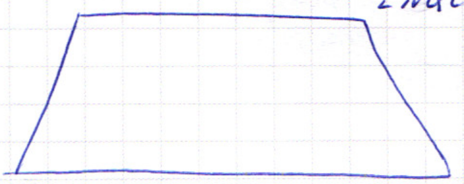
~~100~~ $99 - 10 + 1 = 90$

Ответ: 90 штук.



$\angle RBC = \angle BQP$ - соответственные =>

=> $QB = BP = 13$ => $QB = NB = BC$ => $\angle NQC = 90°$.



$S_{NCDQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{NC + QD}{2}\right) \cdot CH$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$X \mod 9^{n-1} + X \mod 9^n + X \mod 9^{n+1} = 12531$

12531 $\quad 71 \mod 9 = 8 \qquad 7 \mod 9 = 7$

$7654321 \mod 9 = \qquad 17 \mod 9 = -1$

$7654321 : 9 = 850410\cancel{2}3$ (72, 45, 45, 43, 36, 92, 90, 21, 18, 3)

$7+6+5+4+3+2+1 = 28 \quad 24 \mod 9 = 6.$

12531

$\cancel{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha}$.

$+\begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha - \sin\beta\end{cases}$

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\beta$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$!

1) $\sin(x-y) = -9\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$\sin x\cos y - \sin y\cos x = -9(\cos x\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{2}} + \sin x\underbrace{\sin\frac{\pi}{3}}_{\frac{\sqrt{3}}{2}})$

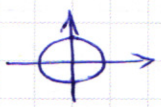
$2\sin x\cos y - 2\sin y\cos x = -9\cos x - 9\sqrt{3}\sin x$.

2) $\cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin(x+\frac{\pi}{6})$.

$2\left(\cos(x-2y)\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-2y)\right) = 20\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos\varphi = \frac{1}{2} \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(x-2y)\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \sin(x-2y)\sin\frac{\pi}{3} =$
$= \cos(x-2y+\frac{\pi}{3})$

$\begin{cases}\cos(x-2y+\frac{\pi}{3}) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ \sin(x-y) = -9\cos(x-\frac{\pi}{3})\end{cases}$



$-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{-3\pi+\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$.

$-9\cos(x-\frac{\pi}{3}) =$

$\sin(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = \underbrace{\sin(-\frac{\pi}{2})}_{-1}\cdot(\cos(x+\frac{\pi}{6})) + \underbrace{\cos(-\frac{\pi}{2})}_{0}\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(x+\frac{\pi}{6}) = \sin(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$

$\cos(-\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{6}) = \underbrace{\cos(-\frac{\pi}{2})}_{0}\cos(x+\frac{\pi}{6}) - \underbrace{\sin(-\frac{\pi}{2})}_{-1}\cdot\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \sin(x+\frac{\pi}{6})$

$tg x + tg y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} =$

$= \frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cdot\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}}$

$= \frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$

$2x-2y+x$

$\begin{cases}\cos(x-2y+\frac{\pi}{3}) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ \sin(x-y) = -9\sin(x+\frac{\pi}{6})\end{cases} \qquad \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

$\cancel{\cos(x-2y}$

$\cos(2(x-y)+(x+\frac{\pi}{3})) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\cos(2(x-y))\cos(x+\frac{\pi}{3}) - \sin(2(x-y))\sin(x+\frac{\pi}{3}) = 10\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}) = \sin(x-\frac{\pi}{6})\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + \cos(x-\frac{\pi}{6})\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} = \cos(x-\frac{\pi}{6})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = -44 \end{cases}$$

$7x - y = 64$

$y = 7x - 64$

$7x - 64 + \sqrt[3]{49x^2 - (49x^2 - 2\cdot 7\cdot 64x + 64^2)} = -44$

$7x - 64 + \sqrt[3]{14\cdot 64x - 64^2} = -44$

$64 = 8\cdot 8 = 2^6$

$7x - 64 + 4\sqrt[3]{14x - 64} = -44$

$7x + 4\sqrt[3]{14x-64} = 20$

$64 - 28 = 36$

Пусть $t = \sqrt[3]{14x - 64} \Rightarrow \frac{t^3}{2} = 7x - 32$

$\log_2 4\cdot 8 = 2+3.$

$\frac{t^3}{2} + 4t + 12 = 0$

$t^3 + 8t + 24 = 0$

$24:\ \pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm8; \pm12; \pm24$

	1	0	8	24
−2	1	−2	12	0

a b c d e
b c d e
c d e

$a=0$

$b=6$, $c=1$, $d=7$, $e=7$; $b=5$, $c=7$ не подх.

$(t+2)(t^2 - 2t + 12) = 0$

$\to (t-1)^2 + 11 \geq 11$

$\frac{D}{4} = 1 - 12 < 0 \Rightarrow \not\exists$

$t = -2$ — корень $\Rightarrow -2 = \sqrt[3]{14x - 64}$

$-8 = 14x - 64$

$56 = 14x$

$x = 4 \Rightarrow y = 28 - 64 = -36$

12531

10^4: ~~abcde~~ abcd bcd cd

$b=4$

$c=$ площади не будет

Ответ: $(4; -36)$.

№2

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 5x > 0 \\ 5x \neq 1 \\ 125x > 0 \\ 125x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{5} \\ x \neq \frac{1}{125} \end{cases}$$

$2\sqrt{\log_{5x} x} \leq -2\cdot \log_{125x} x$

$\sqrt{\log_{5x} x} \leq -\log_{125x} x$

Если ~~$\log_{5x}$~~ $\log_{125x} x \leq 0$, то

$\log_{5x} x \leq \log_{125x} x$

$\frac{1}{\log_x 5x} \geq \frac{1}{\log_x^2 125x}$

$\frac{1}{\log_x 5 + 1} \geq \frac{1}{(\log_x 125 + 1)^2}$

$\frac{1}{\log_x 5 + 1} \geq \frac{1}{(3\log_x 5 + 1)^2}$

$\frac{1}{\log_x 5 + 1} - \frac{1}{(3\log_x 5 + 1)^2} \geq 0$

Пусть $\log_x 5 = t$

$\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(3t+1)^2} \geq 0$

$\frac{9t^2 + 6t + 1 - t - 1}{(t+1)(3t+1)^2} \geq 0$

$\frac{9t^2 + 5t}{(t+1)(3t+1)^2} \geq 0$

$\frac{t(9t+5)}{(t+1)(3t+1)^2} \geq 0$

$-1 \quad -\frac{5}{9} \quad -\frac{1}{3} \quad 0$

$\left[\begin{array}{l} -1 < t \leq -\frac{5}{9} \\ t > 0 \end{array}\right.$

$\log_x 5 > 0$ $\quad$ $\log_x 5 > -1$

$\log_x 5 \leq -\frac{5}{9}$ $\quad (x-1)(5-1) > 0$ $\quad (x-1)(5-x^{-1}) > 0$

$x^{-\frac{5}{9}} = 5$ $\quad (x-1)(5 - x^{-\frac{5}{9}}) > 0$ $\quad x > 1$ $\quad \frac{(x-1)(5x-1)}{x} > 0$

$\frac{1}{x^{\frac{5}{9}}} = 5$ $\quad x^{\frac{5}{9}} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ $\quad x = 5^{-\frac{9}{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)