МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Зо~~ Задача 5.

Про функцию f нам известно что для любых положительных рациональных a и b верно что $f(ab) = f(a) + f(b)$, тогда

$$f(n) = f(1) + f(n) \Rightarrow f(1) = 0$$ (это выполнено для любого положительного, рационального n, но если надо доказать в частности, то просто возьми n=2)

$$f(1) = f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right)$$ – для $\forall n$ положительного и рационального

$$0 = f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f(n) = -f\left(\frac{1}{n}\right)$$

Тогда: $f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$ должно быть $<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < f(y)$.

Рассмотрим какие значения принимает $f(n)$ при $1 \le n \le 24$ и $n \in N$

$f(1) = 0$; $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) = 0$;
$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$; $f(8) = f(4) + f(2) = 0$;
$f(9) = f(3) + f(3) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$; $f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$;
$f(12) = f(3) + f(4) = 0$; $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$; $f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(3) + f(5) = 1$
$f(16) = f(8) + f(2) = 0$; $f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$; $f(18) = f(2) + f(9) = 0$; $f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$;
$f(20) = f(4) + f(5) = 1$; $f(21) = f(3) + f(7) = 1$; $f(22) = f(11) + f(2) = 2$; ~~f(23)~~
$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$; $f(24) = f(12) + f(2) = 0$.

$\left.\begin{matrix} 0<1 \\ 0<2 \\ 0<3 \\ 0<4 \\ 0<5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ когда $x \in \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24\}$, а $y \in \{5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23\}$

Это $11 \cdot 13$ "143" пар чисел

$\left.\begin{matrix} 1<2 \\ 1<3 \\ 1<4 \\ 1<5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ когда $x \in \{5; 7; 10; 14; 15; 20; 21\}$, а $y \in \{11; 13; 17; 19; 22; 23\}$

Это $7 \cdot 6$ "42" пар чисел

Задача 5 продолжение

$$\left.\begin{matrix} 2<3 \\ 2<4 \\ 2<5 \end{matrix}\right\}$$ когда $x \in \{11; 22\}$, а $y \in \{13; 17; 19; 23\}$
Это $2 \cdot 4 = 8$ пар чисел

$$\left.\begin{matrix} 3<4 \\ 3<5 \end{matrix}\right\}$$ когда $x = 13$, а $y \in \{17; 19; 23\}$
Это $1 \cdot 3 = 3$ пары чисел.

$4<5$ когда $x \in \{17; 19\}$, а $y = 23$
Это $2 \cdot 1 = 2$ пары чисел

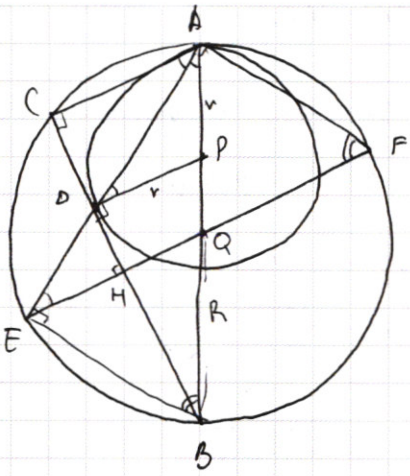
Следовательно всего пар чисел подходящих условию $f(x)<f(y)$

$143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 50 + 148 = 198$ пар чисел.

Ответ: 198

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Дано: $\Omega(Q; R)$; $\omega(P; r)$

Ω касает ~~ω~~ в A; AB - диаметр Ω

BC касается ω в D; $AD \cap \Omega = E$

$EH \perp BC$; $EH \cap \Omega = F$

$CD = 8$; $BD = 17$

Найти: радиусы (R и r); $\angle AFE$ и $S_{\triangle AEF}$

Решение: ~~центр окружности Ω ∈ AB и центр окр. ω (P) ∈ AB т.к. если через A провести касательную к окружности, то радиусы этих окружности будут перпендикулярны ей ∠ACB = 90° т.к. опирается на полуокружность (AB-диаметр)~~

Q - центр окр Ω и $Q \in AB$ т.к. AB - диаметр Ω; Если через A провести касательную к окружности ω и Ω, то их радиусы будут перпендикулярны ей => ~~параллельны друг другу~~ лежать на одной прямой AB ~~и лежать на одной прямой~~, а т.к. ω касает Ω внутренним образом, то $P \in AB$.

$\angle ACB = 90°$ т.к. он опирается на полу окружность, $\angle PDB = 90°$ т.к. BD - касательная к ω, а PD - радиус ω

$\Downarrow$

$\triangle BCA \sim \triangle BDP$ по двум углам ($\angle DBP$ общий)

$\Downarrow$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BP}{DB} \Rightarrow \frac{2R}{17+8} = \frac{2R-r}{17} \Rightarrow r = 17 \cdot 2R\left(\frac{1}{17} - \frac{1}{25}\right) \Rightarrow r = \frac{16}{25}R$$

$$\Downarrow$$

$$R = \frac{25r}{16}$$

~~Из треугольника PDB~~ Так как PDB прямоугольн, то:

$$PB^2 = PD^2 + DB^2 \Rightarrow (2R-r)^2 = r^2 + 17^2 \Rightarrow \left(\frac{25r}{8} - r\right)^2 = r^2 + 17^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{17}{8}\right)^2 \cdot r^2 = r^2 + 17^2 \Rightarrow r^2\left(\frac{17^2-8^2}{8^2}\right) = 17^2 \Rightarrow r^2 = \frac{17^2 \cdot 8^2}{17^2 - 8^2} \Rightarrow r^2 = \frac{17^2 \cdot 8^2}{25 \cdot 9} \Rightarrow r = \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3}$$

$$r = \frac{136}{15} \Rightarrow R = \frac{25}{16} \cdot \frac{136}{15} = \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3} = \frac{85}{6}$$

Задача 4 продолжение.

Пусть $\angle DAP = \alpha$, тогда $\angle ADP = \alpha$ т.к. $\triangle APD$ равнобедр $AD = DP$ радиусы.

$\angle DPH = 90^\circ = \angle DHE$ т.к. $EH \perp BC$

$\Downarrow$

$DP \parallel EH$ (EF) т.к. накрест лежащие углы равны. $\Rightarrow \angle ADP = \alpha = \cancel{\angle AEF}$ $\angle AEF$.

$\angle AEB = 90^\circ$ т.к. AB - диаметр. $\Rightarrow \angle ABE = 90^\circ - \angle EAB = 90^\circ - \alpha$

$\angle ABE = \angle AFE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ т.к. $\angle AFE + \angle AEF = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$, то

$\triangle AFE$ прямоугольный.

$$\sin 2\alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{17+8}{2R} = \frac{25\cdot 3}{85} = \frac{15}{17}$$

угол 2α острый т.к. находится в прямоугольном ~~прямоугольные~~ треугольнике

$\Downarrow$

$$2\alpha = \arcsin\left(\frac{15}{17}\right)$$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$$

$$\angle AFE = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{\arcsin\left(\frac{15}{17}\right)}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$$

$$AE = 2R\cos\alpha \ ; \ AF = 2R\sin\alpha$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} \text{ т.к. } \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{2R\cos\alpha \cdot 2R\sin\alpha}{2} =$$

$$= 2R^2 \sin\alpha\cos\alpha = R^2 \sin 2\alpha = R^2 \cdot \frac{15}{17} = \frac{85^2}{6^2} \cdot \frac{15}{17} = \frac{85\cdot 5^2}{2} = \frac{2125}{2} =$$

$$= 1062{,}5$$

Ответ: радиус меньшей окр. $= \frac{136}{15}$, радиус большей окр. $\frac{85}{6}$,

$\angle AFE = \frac{\pi}{4} - \frac{\arcsin\left(\frac{15}{17}\right)}{2}$; $S_{\triangle AEF} = 1062{,}5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $a=x-2$; $b=y-1$, тогда

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 2b \Rightarrow b\geq 2b \Rightarrow b\leq 0 \\ a=b \\ 10b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} a\geq 2b \Rightarrow 4b\geq 2b \Rightarrow b\geq 0 \\ a=4b \\ 25b^2=25 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} \end{array}\right.$$

Вернёмся к первонач. пер.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$; $(6;2)$

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$$

Пусть $a = x^2+18x$ заметим что $x^2+18x>0$ т.к. $\log_{12}(x^2+18x)$ существует

Тогда:

$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$$

При $0<a\leq 1$: $a \geq a^{\log_{12}13}$, а $5^{\log_{12}a}>0$

$$\log_{12}a \geq \log_5(a^{\log_{12}13}-a)$$

$\cancel{a \geq 12^{\log_5(a^{\log_{12}13}-a)}}$

$$\log_{12}5 \geq \log_a(a^{\log_{12}13}-a)$$

$\cancel{\log_{12}5 \geq}$

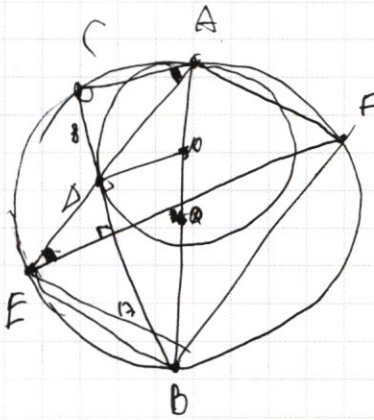
$$a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}-a$$

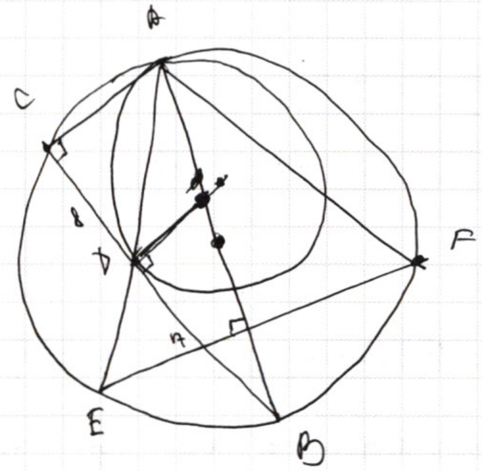
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

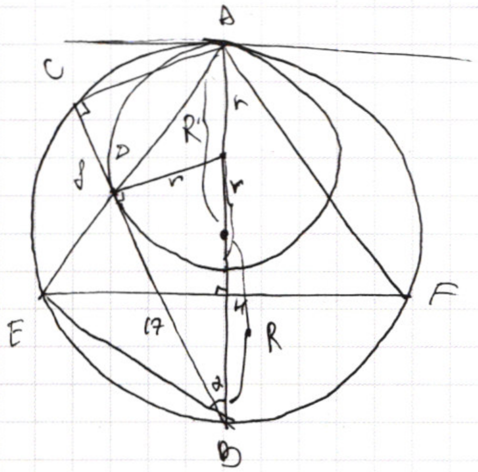
$\cancel{5^{\log_{12}} Ex}$ $\cancel{\log_{12}(12+1) = \log_{12}}$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13} - 18x$$







$\cancel{\frac{17}{25} = \frac{R+r}{2R}}$

$$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$$

$$\frac{8}{25} = \frac{r}{2R}$$

$$2R = \frac{25r}{8}$$

$$25r = aR$$

$$17^2 + r^2 = (2R-r)^2$$

$$17^2 + r^2 = \frac{17^2 r^2}{8^2}$$

$$r^2 \left(\frac{17^2}{8^2} - 1\right) = 17^2$$

$$r = \sqrt{\frac{17^2}{\frac{17^2-8^2}{8^2}}} = \sqrt{\frac{(17\cdot 8)^2}{17^2-8^2}}$$

$$2R \sin\alpha = EA$$

$$2R \cos\alpha = EB$$

$$EH = \frac{EA \cdot EB}{2R} = 2R \sin\alpha \cos\alpha$$

$$AH = \sqrt{EA^2 - EH^2} =$$

$$= 2^2R^2\sin^2\alpha - 2^2R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$2R\sin\alpha\sqrt{(1-\cos^2\alpha)} =$$

$$= 2R\sin^2\alpha$$

$$\frac{EH \cdot AH}{2} = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha \cdot 2R\sin^2\alpha}{2} < 4R$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

$$\sin 2\alpha - \cos 2\beta + \sin 2\beta - \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}.$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x\geq2$
$y\geq1$

$(x-2)(y-1)$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2 = 25$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2 = \cancel{2}5^2$$

$x\leq2$
$y\leq1$

$25=(y-1)^2\cdot9$

$\frac{25}{9}=(y-1)^2$

$y-1=\frac{5}{3}$ $\quad y=\frac{8}{3}$

$y\leq\frac{x}{2}$

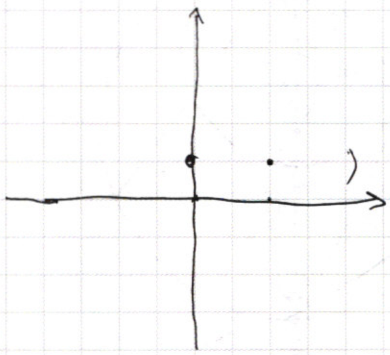
$(x-2y)\geq0$ $\quad \frac{5}{3}$

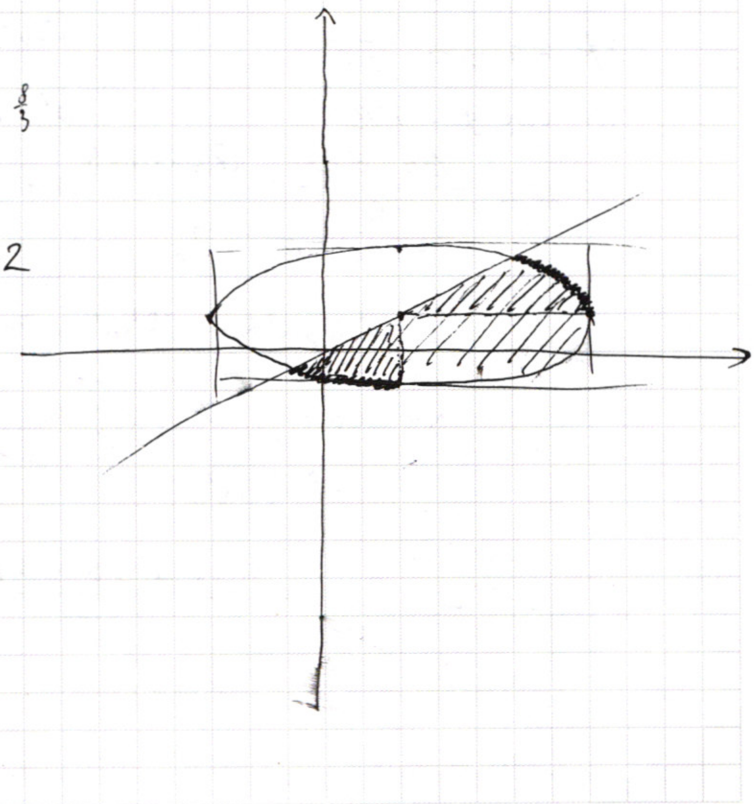
$$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$$

$$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0$$

$$\cancel{(x-2y)(x-2y)}$$

$$(x-4y)(x-y)+x+2y-2<0$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

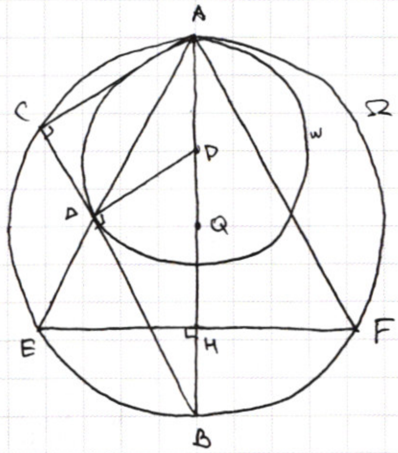
Задача 4

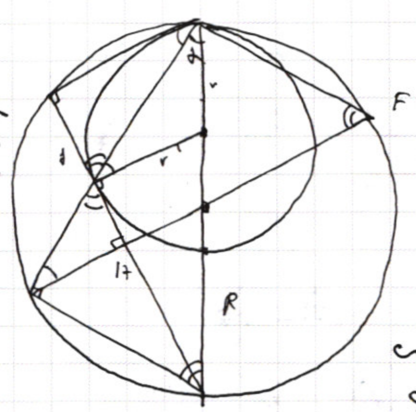
Дано: $\Omega(R; Q)$; $w(P; r)$ центр, радиус

Ω касается w в A ; AB - диаметр Ω

BC касается w в D ; $AD \cap \Omega = E$

EH ⊥





$$\frac{2R}{25} = \frac{2R - r}{17}$$

$$\frac{r}{17} = 2R\left(\frac{17-25}{17\cdot 25}\right)$$

$$r = \frac{16R}{25}$$

$$17^2 + r^2 = (2R - r)^2$$

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{25r}{8} - r\right)^2$$

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{17r}{8}\right)^2$$

$$r^2\left(\left(\frac{17}{8}\right)^2 - 1\right) = 17^2$$

$$\frac{2R}{25} = \frac{2R}{17} - \frac{r}{17} \qquad r = \sqrt{\frac{17^2\cdot 8^2}{17^2 - 8^2}} = \frac{17\cdot 8}{\sqrt{25\cdot 9}} = \frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}$$

$$\frac{r}{17} = \frac{2R}{17} - \frac{2R}{25} \qquad R = \frac{25\cdot 17\cdot 8}{16\cdot 5\cdot 3} = \frac{5\cdot 17}{2\cdot 3}$$

$$r = 17\cdot 2R\left(\frac{25-17}{17\cdot 25}\right) \qquad \sin 2\alpha = \frac{25}{2R} = \frac{25\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 17\cdot 2} = \frac{5\cdot 3}{17}$$

$$r = 2R\,\frac{8}{25}$$

$2\alpha = \arcsin\frac{15}{17}$

$2\alpha =$

$\alpha = \dfrac{\arcsin\frac{15}{17}}{2}$

$\frac{17}{8}$, 136 ; $\frac{17}{5}$, 85

Если $a = 12$

$5^{\log_{12} a} + a^{\log_{12} 12} \geq a^{\log_{12} 13}$

$\log_{12} a = \log_5 a$

$1 \geq 1^{\log_{12} 13}$

$5^1 + 12 \geq 13$

$5^2 + 12^2 \geq 13^2$, $a = 12^2$

$\log_{12} a = \log$

$\log_{12} a = \log_5\left(a^{\log_{12} 13} - a\right)$

$6^{\log_{12} a}$

$\log_5\left(a^{\log_{12} 13} - a\right) = \log_{12} a$

$12^{a^{\log_{12} 13}} - a = 5^a$

$12^{a^{\log_{12} 13}}$ 60^a

$\alpha < 1$

$5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13} - a$

$5^{\log_{12} a} \geq a\left(a^{\log_{12} 13 - 1}\right)$

$\log_{12} a/a$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq \left(x^2 + 18x\right)^{\log_{12} 13} - 18x$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$85 \cdot 25 = 425 + 170 = 2125$

$\log_3 9 = \log_2 4$

$\log_3 2 = \log_9 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ $f(p) = f(1) + f(p)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) < f(y)$

$f(n) = f(1) + f(n) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(n) + f\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$f(1) = f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(n) = -f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(1) = 0$
$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$
$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$
$f(4) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{2}{4}\right]$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = 1$

$b \geq 2b$
$b \geq 0$
$1 \geq 2$

$b < 0$
$1 \leq 2$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0 \end{cases}$

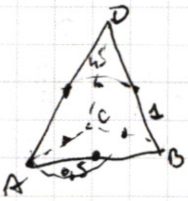
$\begin{cases} x - 2y = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 5^2 \end{cases}$

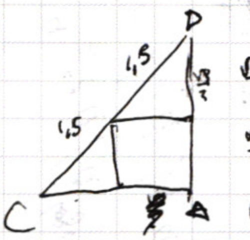
$\frac{12x+4}{4x+3} \leq ax + b$

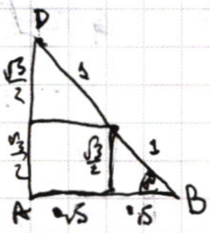
$12x + 4 = 4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b$

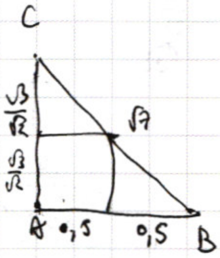
$4ax^2 + (3a + 4b - 12)x + 3b - 4 \geq 0$

$\sqrt{6+1}$

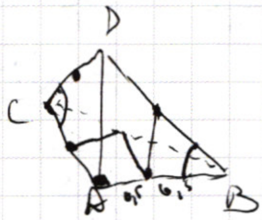


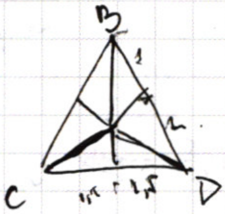






$\sqrt{9-3} = \sqrt{6}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$





$x - 2 = a$
$y - 1 = b$

$a - 2b = ab$

$a^2 + 3b^2 = 5^2$

$b = \frac{a}{a-2}$

$a^2 + \frac{3a^2}{(a-2)^2} = 5^2$

черновик чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)