МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№6

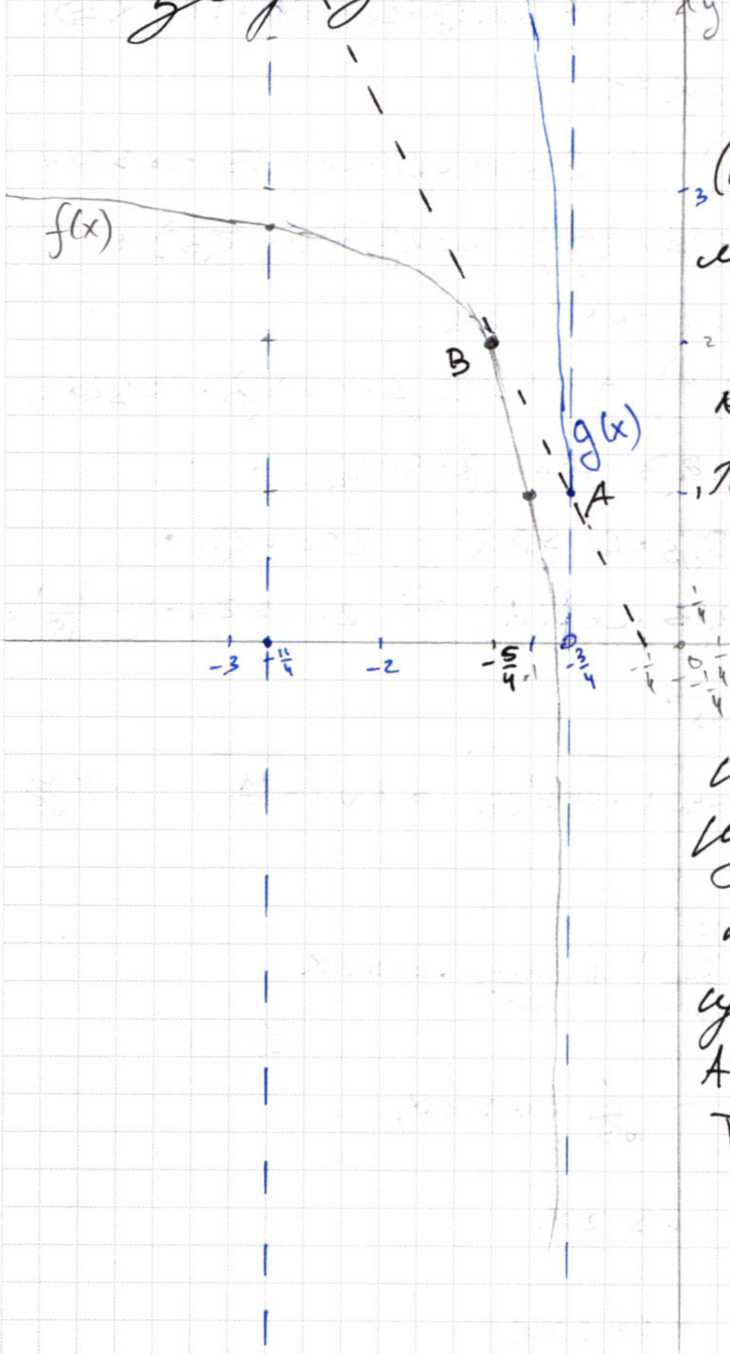
$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ (1)

Заметим, что $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$

Пусть ~~y = 12x+11~~ $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$ ← гипербола

$g(x) = -8x^2-30x-17$ ← парабола $u(x) = ax+b$

Изобразим их на графике:



Для того, чтобы неравенство (1) выполнялось, необходимо, чтобы $f(x)$ была ~~выше~~ не выше $u(x)$, а также $g(x)$ ~~выше~~ не ниже $u(x)$ ~~и не более одной общей точки пересечения.~~

Мин. знач. b достигается при прохождении $u(x)$ через точку A и касании с гиперболой. (в (1) нестрогие нер-ва)

Из графика следует, что $\min(b)$ достигается при проходе $u(x)$ через A и B.

Тогда $\begin{cases} \cancel{\frac{-5}{42}}\,2 = a\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+b \\ 1 = a\left(-\frac{3}{4}\right)+b \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 1 = a\left(-\frac{3}{4}\right)+b \\ 1 = -\frac{a}{2} \to a = -2 \end{cases}$

$1 = \frac{3}{2}+b$

$b = -\frac{1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$-\frac{1}{\sqrt5}=\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha$ (1)

$-\frac{4}{5}=\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha \Leftrightarrow$

Если $tg\alpha$ определён, то $\cos\alpha\neq0$.

$\Leftrightarrow \sin2\alpha\cdot(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha+$

$+\sin2\alpha \Leftrightarrow$ ~~$\sin2\alpha\cdot(\cos2\beta-\sin2\beta)(\cos2\beta+\sin2\beta)+$~~

~~$+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha$~~

$\Leftrightarrow \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-\cancel{1}+\cancel{1})+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=$

$=2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=$

$=$ ~~$2\cos2\beta(\sin2\alpha+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)$~~ $2\cos2\beta\cdot$

$\cdot(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)\overset{(1)}{=}2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=$

$=-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$ $\quad\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac45}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

~~Подставим в (1), получим:~~

~~$\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{\sqrt5}=\sin2\alpha\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha\\ -\frac{1}{\sqrt5}=\sin2\alpha\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha\end{array}\right.\Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1=-2\sin2\alpha+\cos2\alpha\\ -1=-2\sin2\alpha-\cos2\alpha\end{array}\right.$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 = 2\cdot\frac{4}{5} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

$\sin 4\beta = 2\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta = \left[\begin{array}{l} -2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5}\end{array}\right.$

Тогда $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} -\frac{4}{5} = \sin 2\alpha\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \\ -1 = -2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{4}{5} = \sin 2\alpha\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \\ -1 = -2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} -\frac{4}{\cancel{5}} = \sin 2\alpha\cdot\frac{8}{\cancel{5}} + \frac{4}{\cancel{5}}\cdot\cos 2\alpha \\ -1 = -2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{4}{\cancel{5}} = \sin 2\alpha\cdot\frac{8}{\cancel{5}} - \frac{4}{\cancel{5}}\cos 2\alpha \\ -1 = -2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} -4 = 8\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha \\ -1 = -2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\end{cases} \\ \begin{cases} -4 = 8\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha \\ -1 = -2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} -4 = 8\sin 2\alpha - 4 + 8\sin 2\alpha \\ -1 + 2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha\end{cases} \\ \begin{cases} -4 = -8\sin 2\alpha + 8\sin 2\alpha - 4 \\ \cos 2\alpha = -2\sin 2\alpha + 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2\sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -1\end{cases} \\ \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = 1\end{cases}\end{array}\right.$

~~tg α = a~~

tgα =

~~tgα =~~

~~Ответ~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

№5

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ (1)

$f(x)=\left[\frac{x}{4}\right]$. $x\in[1;24]$, по усл. нас интересуют лишь натуральные $(x;y)$ $\Rightarrow$ $x\in\mathbb{N}$.

Тогда $\underline{[x/4]\in[0,6]}$.

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\left[\frac{1}{4y}\right]$ $y\in[1;24]$, аналогично вышесказанному, $y\in\mathbb{N}$. Тогда $\left[\frac{1}{4y}\right]=0$

(т.к. $\frac{1}{4y}\le\frac{1}{4}$ при $\forall y\ge1$).

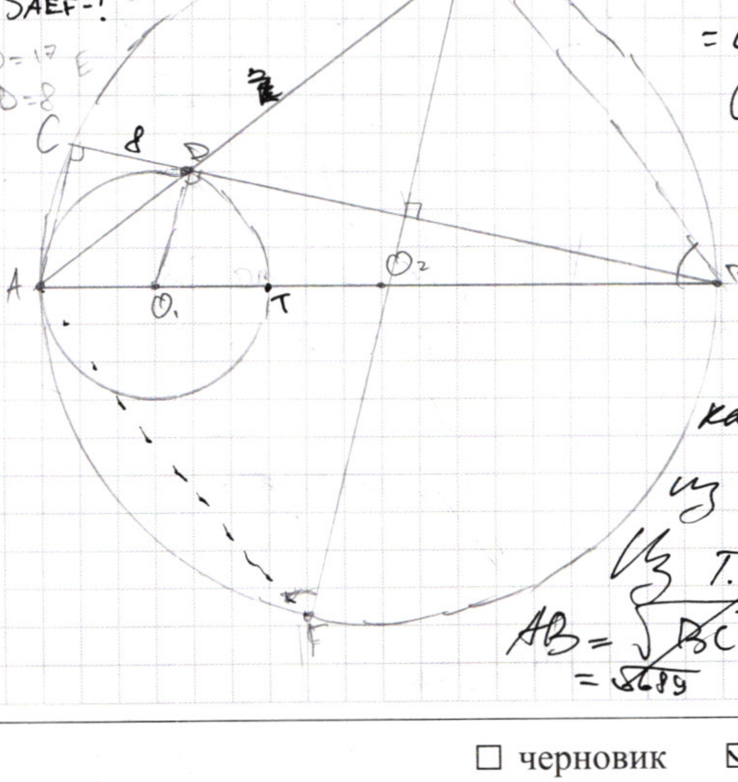
Значит, $f(x)\ge0$; $f\left(\frac{1}{y}\right)=0\Rightarrow$ их сумма (1) неотрицательна $\Rightarrow$ не существует таких $(x;y)$, при которых $\underline{f\left(\frac{x}{y}\right)<0}$.

Ответ: 0 пар.

№4

Найти:
1) R_1 - ? R_1 - радиус ω
2) R_2 - ? R_2 - радиус Ω
3) $\angle AFE$ - ?
4) S_{AEF} - ?

$BD=17$
$CD=8$



~~1) $\angle EDB=\angle ADC$ (как верт.)~~
~~$\angle EKD=90^\circ=\angle ACD$ ($\angle ACD=\angle ACB=90^\circ$ т.к. AB - диаметр Ω)~~
~~O_1 - центр ω, O_2 - центр Ω. $O_1\in AB$, т.к. A - точка касания ω и Ω.~~
~~$CD=AC=8$, как отрезки касательных, проведённые из одной точки к ω.~~

Из т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{64+25^2}=\sqrt{689}$

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

Пусть $x^2+18x=t\geq 0$

$t \geq t^{\log_{12}13}-5^{\log_{12}t}$

ООН:

$x^2+18x\geq 0$

$x(x+18)\geq 0$

$x\in(-\infty;-18]\cup$

$\cup[0;+\infty)$

Значит, $|x^2+18x| =$

$= x^2+18x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 2y \\ x^2-5xy+4y^2=-x-2y+2 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\geq 2y \\ x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0 \quad (1) \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases} \boxed{\Longleftrightarrow}$$

Рассмотрим (1). Решим как квадратное отн. x:

$D=(5y-1)^2-4\cdot(4y^2+2y-2)=25y^2-10y+1-$
$-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2\geq 0$

$$x_{1,2}=\left[\begin{array}{l} \frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \\ \frac{5y-1+3-3y}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y+1 \\ x=4y-2 \end{array}\right. \\ x\geq 2y \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (y+1-2)^2+(3y-3)^2=25 \quad (2) \\ x=y+1 \\ x\geq 2y \end{cases} \\ \begin{cases} (4y-2-2)^2+(3y-3)^2=25 \quad (3) \\ x=4y-2 \\ x\geq 2y \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

Ответ: 0; $\cancel{2}$ $\frac{1}{2}$; 2

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 1 \\ \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Downarrow \begin{cases} \cos\alpha = \pm 1 \\ \sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 1 \end{cases}$$

Из осн. триг. подстановки: $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$

$t = \operatorname{tg}\alpha$

Тогда (1) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\cancel{\sqrt5}} = \dfrac{2t}{1+t^2}\cdot\left(-\dfrac{2}{\cancel{\sqrt5}}\right) + \dfrac{1}{\cancel{\sqrt5}}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ -\dfrac{1}{\cancel{\sqrt5}} = \dfrac{2t}{1+t^2}\left(-\dfrac{2}{\cancel{\sqrt5}}\right) - \dfrac{1}{\cancel{\sqrt5}}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 = \dfrac{-4t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ -1 = \dfrac{-4t}{1+t^2} - \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -(1+t^2) = -4t+1-t^2 \\ -1-t^2 = -4t-1+t^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 = -4t \\ \cancel{2}t^2 - \cancel{4}_2 t = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} = \operatorname{tg}\alpha \\ t(t-2) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = 2 \end{array}$$

$y = \frac{2}{4x+3} + 3$ $x=-1$ $y = \frac{2}{-1} + 3 = -2+3 = 1$

$y = -8x^2 - 30x - 17$

$x = -\frac{5}{4}$

$y = \frac{2}{-\frac{5}{4}\cdot 4+3} + 3 = \frac{2}{-2} + 3 = -1+3 = 2$

$x = -\frac{11}{4}$ $y = \frac{2}{-11+3} + 3 =$

$= \frac{2}{-8} + 3 =$

$= -\frac{1}{4} + 3 =$

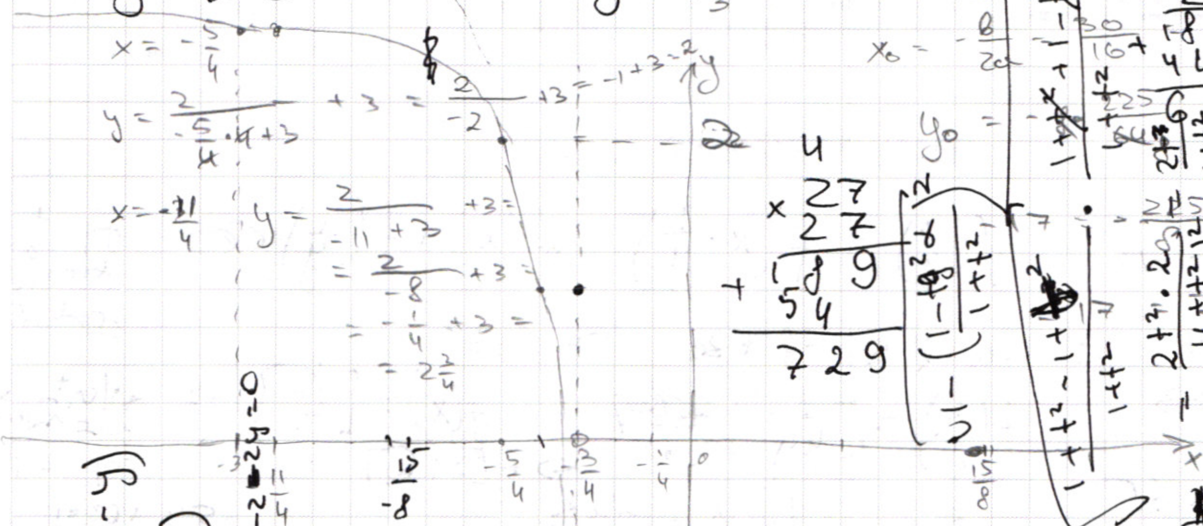
$= 2\frac{3}{4}$

$x_0 = -\frac{b}{2a}$

$y_0 =$

$\frac{225 \cdot 2}{8}$

$\frac{225\cdot 3}{8}$ -17



-3 $-\frac{15}{8}$ $-\frac{5}{4}$ $-\frac{3}{4}$ $-\frac{1}{4}$ 0

$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ +54 \\ \hline 729 \end{array}$

$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \end{array}$

$x = -\frac{3}{4}$

$y = -8\cdot\frac{9}{16} - 30\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{90}{4} - 17 =$

$= \frac{36}{2} - 17 = 1$

$= 18$

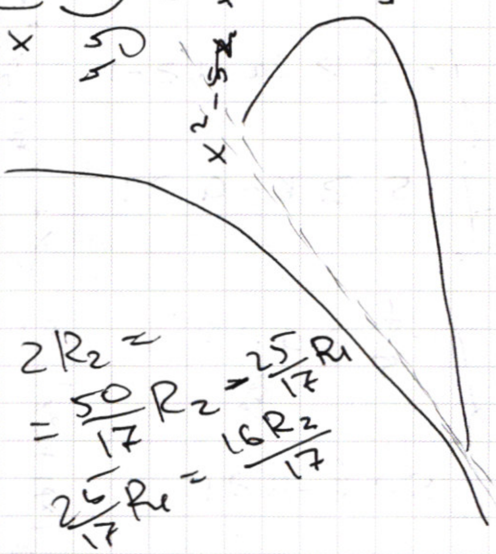
$\begin{array}{r} 64 \\ \times 9 \\ \hline 576 \end{array}$

$\sqrt{5} = 2$

$x(x-\sqrt{5}) + \sqrt{5}(\sqrt{5} - x) = -4y(x-\sqrt{5})$

$(x-\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) + 4y = 0$

$\begin{array}{r} 11 \\ \times 15 \\ \hline 55 \\ +11 \\ \hline 165 \end{array}$



$-\frac{b}{2a} = -\frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$x = -\frac{11}{4}$

$y = -8\cdot\frac{121}{16} + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 =$

$= \frac{-121 + 15\cdot 11}{2} - 17 =$

$= \frac{44}{2} - 17 = 5$

$2R_2 =$

$= \frac{50}{17}R_2 = \frac{25}{17}R_1$

$\frac{25}{17}R_1 = \frac{16R_2}{17}$

$1600 + 576 =$

$= 2176$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 = -x - 2y + 2$

$D = 16 - 36y^2 + 48 =$

$= 64 - 36y^2$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot$

$\cdot \cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha)$

$x^2 - 4x + 9y^2 - 12 = 0$

$x_1 + x_2 = 4$

$x_1 \cdot x_2 = 9y^2 - 12$

$25 - 25\cdot\frac{7}{3} + \frac{49\cdot 4}{9} = -5 - \frac{7}{3} + 2$

$23 - 24\cdot\frac{7}{3} + \frac{49}{9} = 0 - 12$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 13 = 0$

x^2 $x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 13$

$x^2 - 2$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 13$

$3y \cdot 2 \cdot 3 =$

$= 9\cdot 2y = 18y$

$9 + 16 = 25$ $x = 5$

$3y - 3 = 4$ $3y = 7$

$y = \frac{7}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №13
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $x=-1$: $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$1=\frac{-1}{-1}=\frac{-12+11}{-4+3} \le -a+b \le -8+30-17=5$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\left[\frac{1}{4y}\right]=0$! $\quad f(x)=\left[\frac{x}{4}\right] \to \in[0;6]$

$1\le b-a\le 5$

$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{}{\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}}$ $\quad -5y+60=1$

При $x=-2$: $\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$ $\quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$

$\boxed{\frac{13}{5}}=\frac{-13}{-5}=\frac{-24+11}{-8+3}\le -2a+b\le -8\cdot4+60-17=-32-17+60=\boxed{1}$

$\cos\alpha/2=\frac{\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{13}{5}\le -2a+b\le 1 \quad |\cdot(-1)$

$\begin{cases} -\frac{13}{5}\ge 2a-b\ge -1 \\ 1\le b-a\le 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{8}{5} > \\ 1\le b-a\le 5\end{cases} \begin{cases} -\frac{13}{5}\ge 2a-b\ge -1 \\ 5\ge b-a\ge 1\end{cases}$

$\begin{cases} 2\le 2b-2a\le 10 \\ \frac{13}{5}\le -2a+b\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{8}{5}\ge a\ge 0 \\ 5\ge b-a\ge 1\end{cases}$

$\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{12x+9+2}{4x+3}=\boxed{3+\frac{2}{4x+3}}$

$5\ge b-\frac{8}{5}\ge 1$

$5+\frac{8}{5}\ge b\ge 1+\frac{8}{5}$

$\sin 2\alpha\,(\underbrace{\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta}_{2\cos^2\beta-1}+y)$

$289\cdot 4=1136$

$4\cdot289-256$ $\quad 16\cdot16=256$ $\quad 1136-256=880=220\cdot4$

$2\sin2\alpha-\cos^2\beta$

$2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=\cos\alpha$ $\quad \frac{\cos\alpha+1}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $\quad tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha/2}{\cos\alpha/2}$

$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ $\quad \frac{1-\cos\alpha}{2}=\sin^2\frac{\alpha}{2}$ $\quad \cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$tg^2\frac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha)=1-\cos\alpha$ $\quad tg^2\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha=1-\cos\alpha$

$5^{\log_{12}(x^2+12x)}+x^2\ge|x^2+12x|^{\log_{12}13}-12x$

Решим (2): $(y-1)^2+(3(y-1))^2=25$

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2=25$

$y-1=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}=\pm\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+1\\ y=-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+1\end{array}\right.$

Решим (3): $(4(y-1))^2+(3(y-1))^2=25$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$y-1=\pm1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+3\\ y=\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+1\end{cases}\\ \begin{cases}x=3-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\\ y=1-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\end{cases}\\ \begin{cases}x=6\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\geq2y\Leftrightarrow x-2y\geq0\end{array}\right.$

$\to\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+3-2\frac{\sqrt5}{\sqrt2}-1=-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+2>0$

$\to 3-\cancel{\frac{\sqrt5}{\sqrt2}}-2+\cancel{2}\frac{\sqrt5}{\sqrt2}=1+\frac{\sqrt5}{2}>0$ $\qquad -\frac{\sqrt8}{\sqrt2}=-2$

$\to 6-4=2>0$

$-2-0=-2<0\to$ не подходит

Ответ: $\left(\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+3;\frac{\sqrt5}{\sqrt2}+1\right)$; $\left(3-\frac{\sqrt5}{\sqrt2};1-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)$; $(6;2)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$C(-\frac{11}{4}; 5)$ Из построения видим, что

$\cancel{g_1(x) = 2x + \frac{5}{2}}$ эта прямая ($\cancel{y = -2x + \frac{1}{4}}$ $y = -2x - \frac{1}{2}$)

$\cancel{g_1(-\frac{11}{4}) = -\frac{11}{2} + \frac{5}{2}}$ проходит через C. Проведим

это подстановкой $C(-\frac{11}{4}; 5)$ $5 = \frac{11}{2} - \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$

равенство верно

При иных значениях a и b ~~g(x)~~ $u(x)$ будет проходить либо выше точек A или C, либо ниже точки B $\Rightarrow$ часть графика $u(x)$ будет выше части графика $g(x)$ или ниже части графика $f(x)$, что противоречит нер-ву (1). Значит, $\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow$ единственное решение

Ответ: $\{(-2; \frac{1}{2})\}$.

$\Leftrightarrow 2R_2 = \frac{56R_2}{17} - \frac{25R_1}{17} \Leftrightarrow \frac{25R_1}{\cancel{17}} = \frac{16R_2}{\cancel{17}}$

$R_1 = \frac{16R_2}{25}$

Из т. Пифагора для $\triangle O_1DB$:

$O_1D^2 + BD^2 = O_1B^2 \quad \left(\frac{16R_2}{25}\right)^2 + \frac{289}{\cancel{625}} = \left(2R_2 - \frac{16R_2}{25}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{289}{\cancel{625}} = 4R_2^2 - 2\cdot 2R_2 \cdot \frac{16R_2}{25} \Leftrightarrow \frac{289}{\cancel{625}} = 4R_2^2 \cdot \left(1 - \frac{16}{25}\right) =$

$= 4R_2^2 \cdot \frac{9}{25} \quad \frac{17}{\cancel{25}} = 2R_2 \cdot \frac{3}{5} \Leftrightarrow \boxed{R_2} = \boxed{\frac{85}{6}}$

$R_1 = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} \cdot$ ... $R_1 = \frac{16^8}{25_5} \cdot \frac{85^{17}}{6_3} \Leftrightarrow$

2) $\frac{AC}{R_1} = \frac{25}{17}$ ... $\Leftrightarrow \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{136}{15}$

$AC = \frac{25}{17} R_1 = \frac{136^8}{15_3} \cdot \frac{25^5}{\cancel{17}} = \frac{40}{3}$

Из т. Пифагора для $\triangle ACD$: $AD^2 = CD^2 + AC^2 = 64 + \frac{1600}{9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ...

По т. о пересек. хордах $AD \cdot DE = CD \cdot BD = 8 \cdot 17$

Находим DE. $AD + DE = AE$.

$\frac{AE}{AB} = \cos(\angle BAE) = \sin(\angle ABE) = \sin(\angle AFE)$.

$\angle ABE = \angle AFE$ т.к. они опираются на дугу AE.

$\angle AFB = 90° \Rightarrow AEBF$ прямоуг. $\Rightarrow S_{AEF} = S_{AEB} = \frac{AE \cdot EB}{2}$

Ответ: $R_2 = \frac{85}{6}$ $R_1 = \frac{136}{15}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_1D \perp BC$ как радиус к касательной

$O_1D = R_1 = AO_1 = O_1T$

$TO_2 = R_2 - 2R_1 \quad O_2B = R_2$

~~$AB = AO_1 + O_1T + TO_2 + O_2B = 2R_1 +$~~

$O_1D \perp BC$; $AC \perp BC$ (т.к. AB – диаметр Ω) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle O_1DB$; $\angle ABC$ – общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ по двум углам

$\frac{AC}{O_1D} = \frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{AC}{R_1} = \frac{2R_2}{2R_2 - R_1} = \frac{25}{17}$

~~$AC = \frac{8}{25} R_1$ (1) $\quad 2R_2 = \frac{8}{25}(2R_2 - R_1) = \frac{16}{25}R_2 - \frac{8}{25}R_1 \Rightarrow$~~

~~$\overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{16}{25}R_2 - AC \quad 2R_2 - \frac{16}{25}R_2 =$~~

$\begin{cases} \cancel{AC = \frac{25}{17}R_1 \ (1)} \\ 2R_2 = (2R_2 - R_1)\cdot\frac{25}{17} \Rightarrow \end{cases}$ ~~$\Rightarrow \begin{cases} 2R_2 = \frac{50}{17}R_2 - AC \\ AC = \frac{16}{17}R_2 \ (2) \end{cases}$~~

~~Из т. Пифагора для п/у $\triangle ABC$:~~

~~$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow \underbrace{AC^2}_{(2)} + 625 = 4R^2$~~

~~$\frac{256}{289}R_2^2$~~

~~$625 = \left(4 - \frac{256}{289}\right)R_2^2 = \frac{880}{289} R_2^2 \cdot \frac{880}{289}$~~

~~$R_2 = \frac{25\cdot 17}{4\sqrt{220}}$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)