МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

+ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

+ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

+ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

+ 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

+ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

+ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

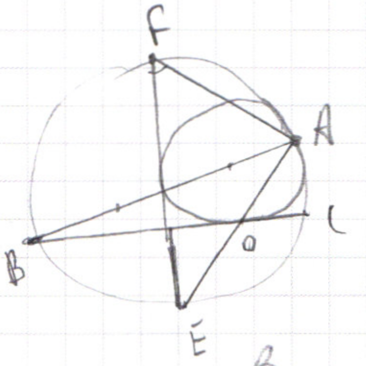
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4)

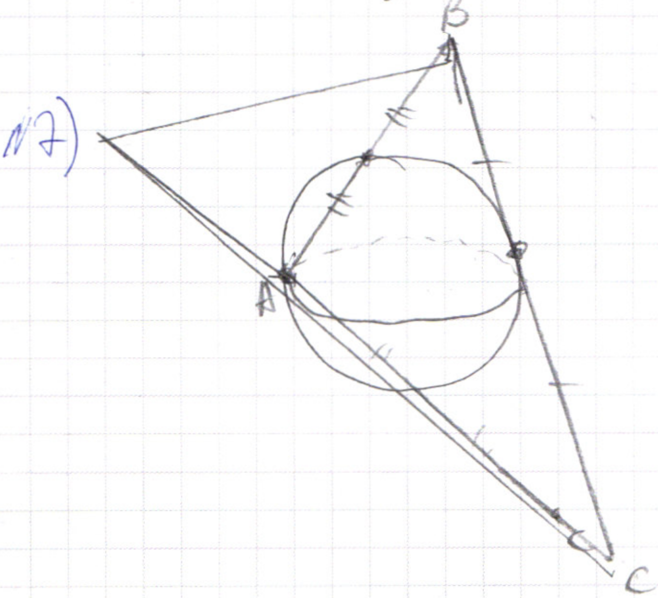


AD = 8

BD = 17

BC = 25

№7)



№1)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$tg\,\alpha$ - ? $\cos\alpha \neq 0$.

$12 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 11 =$

$= -15 + 11 = -4$

$4 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -5 + 3 = -2$

2

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$1 + \cos 4\beta = 1 + 2\cos^2 2\beta - 1 = 2\cos^2 2\beta = 2(1 - \sin^2 2\beta) = 2 - 2\sin^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta$

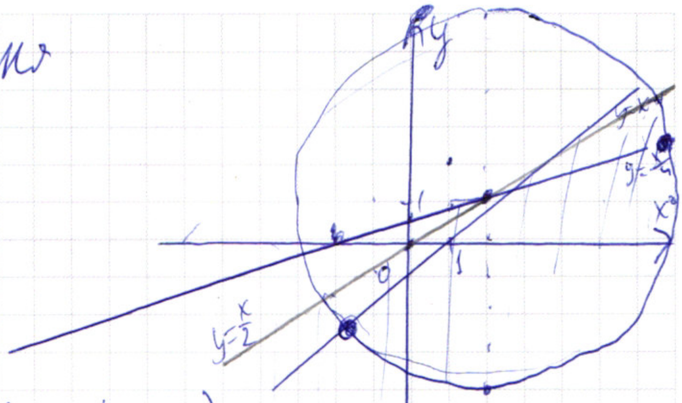
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ 2 корня



1) $(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

(2;1)

(0;6)

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$ эллипс $(2;1)$ $r=5$

2) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2y\geq 0 \Rightarrow x\geq 2y;\ y=\frac{x}{2}$

$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$

$x^2-4xy+4y^2=(x-2y)(y-1)=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y+4y^2=2$

$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$x=\frac{-(1-5y)\pm\sqrt{25y^2+1-10y-4(4y^2+2y-2)}}{2}=\frac{(5y-1)\pm(3y-3)}{2}$

$25y^2+1-10y-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2;\quad x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1$

$(x-4y+2)(x-y-1)=0=(x-4y+2)(x-y-1)=0$

2) $y=\frac{x+2}{4}$

$x=4y-2$

$(x-2)$

$(4y-2-2)^2+9(y-1)^2=25$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$25(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=1$

$y-1=\pm 1$

$y=1\pm 1$

$y_1=2$

$y_2=0$

$y_1=2$; $x=6$; $2\leq\frac{6}{2}$ (+)

$y_2=0$; $x=-2$; $0\leq-1$ (−)

1) прямая $y=x-1$; и; $y\leq\frac{x}{2}$

$(x-2)^2+9(x-1-1)^2=25$

$(x-2)^2+9(x-2)^2=25$

$(x-2)^2=\frac{25}{10}$

$x-2=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}=\pm\frac{5\sqrt{10}}{10}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ $x=2\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ

$(6;2)$

$\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$x-4y+2=0$

$4y=x+2$ $y=\frac{x+2}{4}$

$x-1=y$

$\sqrt{10}\leq\frac{\sqrt{10}}{2}$ (−)

$y_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$; $2\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\leq 2+\frac{\sqrt{10}}{2}$ (−)

$y_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$; $2-\sqrt{10}\leq 2-\frac{\sqrt{10}}{2}$ (+)

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

d3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ ОДЗ $x^2+18x>0$

$t = x^2+18x$

$x(x+18)>0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$5^{\log_{12} t} + x^2 \geq |t|^{\log_{12}13} - 18x$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} + t \geq 0$

$f(t) = t^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} + t$

$f'(t) = \log_{12}5\, t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - \log_{12}13\, t^{\log_{12}\frac{13}{12}} + 1$

$y = \frac{13}{2}y$

$z = 13y = 48$

$90 \cdot 27 = 117$

[1; 13]

$x = \frac{15}{2}y$

$2 \leq 15y = 48$

$2 \leq 17y = 48$

$2 \leq 14y = 48$

$2 \leq 23$

2,5; 9; 22,5

17; 19; 21; 23; 25; 27; 29;

5) урсс [1; 24] $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$x = y$

$24 + 16 + 8 + 6 + 5 + 4 + 3 + 3 + 2 \cdot 4 + 1$

$\frac{x}{y} = 1,5$ $x = 1,5y$ $1 \leq \frac{3}{2}y \leq 24$

$2 \leq 3y \leq 48$

$\frac{2}{3} \leq y \leq 16$

[1; 16]

16

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]$ $x = 5,5y$

$1 \leq \frac{11}{2}y \leq 24$

$2 \leq 11y \leq 48$

$1 \leq y \leq 4$

~~Пусть $x \bmod 4 = 0$ 1 2~~ 3

$x = \frac{5}{2}y$

$1 \leq \frac{5}{2}y \leq 24$

$1 \leq y \leq 9$

$f\left(p \cdot \frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(p) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) + f(p)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(p \cdot \frac{x}{y}\right) + f(p) < 0$ $f\left(\frac{px}{y}\right) + f(p) < 0$

$x = 3,5y$

$1 \leq \frac{7}{2}y \leq 24$

$1 \leq y \leq 6$

$f\left(\frac{px}{y}\right) + \left[\frac{p}{4}\right] < 0$

$p = -2$

$\frac{x}{y} = 1$ $\frac{x}{y} = 3,5$

$f\left(\frac{-2x}{y}\right) + \left[\frac{-2}{4}\right]$ $f\left(-\frac{2x}{y}\right) < 1$ $\frac{x}{y} = \frac{A}{-2} = p$

$\frac{x}{y} = 1,5$ $\frac{x}{y} = 4,5$

$f(-1)$

$f(-2) = -1$ $f(-5) = -2$ $\frac{9 \cdot 5}{2} = 9 \cdot 2,5$

$f(-3) = -1$ $f(-7) = -2$

$\frac{x}{y} = 2,5$ $1 \leq y \leq 5$

$2 \leq 24 \leq 48$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$, $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

Решение:

$f(x) = -8x^2-30x-17$

$f(-\frac{11}{4}) = 5$, $f(-\frac{3}{4}) = 1$

$g(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$

$-\frac{5}{4} \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$; $g(-\frac{5}{4}) = 2$

$f(x)-ax-b$ – непрерывная ф-ция, поэтому, если она больше либо равна нуля, для $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, то больше и в точке $-\frac{3}{4}$.

По условию будем иметь:

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b \le f(-\frac{11}{4}) = 5 \quad (1) \\ -\frac{3}{4}a+b \le f(-\frac{3}{4}) = 1 \quad (2) \\ -\frac{5}{4}a+b \ge g(-\frac{5}{4}) = 2 \quad (3) \Leftrightarrow \frac{5}{4}a - b \le -2 \quad (3)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a \le -1 & (3)'+(2) \Leftrightarrow a \le -2 \\ -\frac{3}{2}a \le 3 & (3)'+(1) \Leftrightarrow a \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}+b \le 1 & (2) \Leftrightarrow b \le -0,5 \\ \frac{5}{2}+b \ge 2 & (3) \Leftrightarrow b \ge -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow b = -0,5$$

Ответ: $(a; b) = (-2; -0,5)$

№3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Решение:

Поскольку есть выражение $\log_{12}(x^2+18x)$, то $x^2+18x > 0$.

$y := x^2+18x > 0$, получим

$5^{\log_{12} y} + y \geq |y|^{\log_{12} 13} = y^{\log_{12} 13} \quad (y>0)$

$5^{\log_{12} y} \geq y^{\log_{12} 13 - 1} \iff y^{\log_{12} 5 - \log_{12} 13 + 1} \geq 0$, что верно, поскольку

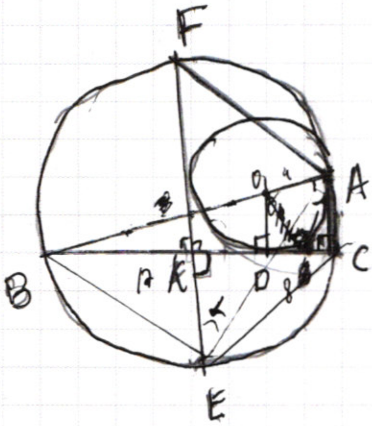
$\parallel$
$y^{\log_{12} 5}$

$\log_{12} 5 - \log_{12} 13 + 1 = \log_{12} \frac{60}{13} > 0.$

Получили $y>0$, $\therefore$ $x^2+18x>0$, $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

№4) Чертёж



Решение:

Пусть ~~ч~~ r - радиус меньшей окружности, ~~а~~ O_1 - её центр, тогда $O_1D \perp CB$. $\angle ACB = \angle AEB = 90°$. Пусть $\angle CAE = \alpha = \angle CBE$. $AC \parallel FE$, т.к. $CK \perp FE$. Тогда $\angle AEF = \alpha$.

$O_1D \perp FE \Rightarrow \angle O_1DA = \angle CEA = \alpha$; $\angle ~~DAD~~ = \alpha$, значит $\angle ABC = 90 - 2\alpha$, $\angle AFE = \angle ABC + \angle FBE = 90 - \alpha$, значит $\angle FAE = 90°$, т.е. ~~ABAFE~~ AB пересекается с FE в центре большей окружности. $\angle BCE = \alpha = \angle CBE$, сл-но $\triangle CEB$ - равнобедренный.

Значит EK делит CB пополам, $\therefore$ $EK = \frac{8+17}{2} = \frac{25}{2}$

$DK = CK - CD = \frac{25}{2} - 8 = \frac{9}{2}$; $\frac{17}{25} = \frac{r}{AC}$ (из подобия $\triangle O_1DB$ и $\triangle ACB$), тогда $AC = \frac{25r}{17} \Rightarrow AD = \sqrt{\frac{5^4}{3} + \frac{625 \cdot r^2}{289}}$; $AD \cdot DE = CD \cdot DB$

$DE = \frac{8 \cdot 17}{AD}$, $\frac{DE}{AD} = \frac{DK}{CD}$ (из подобия $\triangle DKE$ и $\triangle ADC$), тогда

$\frac{8 \cdot 17}{AD^2} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{8}$, $\therefore$ $AD^2 = 2176 : 9 = 64 + \frac{625 \cdot r^2}{289} \iff r = \frac{\sqrt{4624400}}{75} = \frac{136}{15}$; $AC = \frac{25 \cdot 136}{17 \cdot 15} = \frac{40}{3}$ $\quad AB = \sqrt{625 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{7225}{9}} = \frac{85}{3}$, т.е.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R=\frac{85}{6}$, $\square ACEF$ – равнобед. трапеция ($AF=CE$) т.к. $AB=FE$ (симметрия) и $\angle \cancel{FAE} = \angle AEB = 90°$, $AFBE$ – прямоугольник, $EK\cdot FK = CK^2$; $\frac{625}{4} = EK\cdot\left(\frac{85}{3}-EK\right)$ отсюда $EK=\frac{125}{6}$; $CE=\sqrt{CK^2+EK^2}=\sqrt{\frac{10625}{18}}=\frac{25\sqrt{34}}{6}=AF$, Тогда в $\triangle AFE$: $AE=\sqrt{EF^2-AF^2}=\sqrt{\frac{7225}{9}-\frac{10625}{18}}=\frac{5\sqrt{34}}{2}$.

Тогда $S_{AFE}=\frac{AE\cdot AF}{2}=\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{5\sqrt{34}}{2\cdot 2}=\frac{2125}{12}$

$\sin\angle AFE=\frac{5\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{3}{85}=\frac{3\sqrt{34}}{34}=\frac{3}{\sqrt{34}}$

Ответы:

$\angle AFE=\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$; $4=\frac{136}{15}$;

$R=\frac{85}{16}$; $S_{AFE}=\frac{2125}{12}$

~~$\angle AFE=0$~~

$\angle AFE=\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$

№5) $f(ab)=f(a)+f(b)$ $f: Q^+\to R$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $x,y\in N$

$0=f(1)=f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=-f\left(\frac{y}{x}\right)$ (1)

Из (1) делаем вывод, что либо ровно одно из чисел $f(x/y)$ и $f(y/x)$ меньше нуля, из оба меньше нуля.

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(6)=0$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(12)=0$

$f(16)=0$

$f(18)=0$

$f(24)=0$, $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$ $\Leftrightarrow$ ~~тогда~~ $f(x)=f(y)$, т.е. $f(x)=f(y)=0$.

Такая вариантов есть 11 · 11

$f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(10)=1$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(20)=1$

$f(11)=2$, $f(22)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$, $f(19)=4$

$f(21)=5$, $f(23)=5$

$f(x)=f(y)=1$ (Вариантов 6 · 6)

$f(x)=f(y)=2$ (Вариантов 2 · 2)

$f(x)=f(y)=3$ (1 · 1 вариант)

$f(x)=f(y)=4$ (2 · 2 вар-ов)

$f(x)=f(y)=5$ (2 · 2 вар-ов)

$11^2+6^2+2^2+1^2+2^2+2^2=170$

Всего выбрать пару $(x;y)$: 24^2 вариантов, 24^2-170 вар-ов, чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)\neq 0$, $\frac{24^2-170}{2}=203$ (вариантов) $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

Ответ: 203

№2)
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+9y^2-4x-18y=12 \\ xy-x-2y+2=\cancel{(x-y+1)}\ x(y-1)-2(y-1)=(y-1)(x-2) \end{cases}$$

Получается $x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$!

$x^2+9y^2-4x-18y=12 \Rightarrow (x^2-4x+4)-4+(9y^2-18y+9)-9=12;$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Получается
$$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \end{cases}$$

Обозначим $u=x-2$; $v=y-1 \Rightarrow x=u+2$; $y=v+1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y = u+2-2v-2 = u-2v \quad , uv \geq 0$

$\begin{cases} u-2v = \sqrt{uv} \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u-2v)^2 = uv \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2-4uv+4v^2=uv \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5v^2+5uv=25 \\ \cancel{u^2+9v^2=25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2+uv=5 \Rightarrow \cancel{u^2+9v^2=25} \\ u^2+9v^2=25 \end{cases} \begin{cases} u^2+uv=5 \\ u=\pm\sqrt{25-9v^2} \end{cases}$

Подставим u : $\cancel{v+u=\pm\sqrt{}}$ $v\left(\pm\sqrt{25-9v^2}\right) = 5-v^2$

$v^2\left(25-9v^2\right) = 25-10v^2+v^4$

$25v^2-9v^4 = 25-10v^2+v^4$

$10v^4-35v^2+25=0 \Rightarrow 2v^4-7v^2+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v^2=1 \\ v^2=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=\pm 1 \\ v=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$y = v+1 \Rightarrow$

$y = \left[\begin{array}{l} 0, \; v=-1 \\ 2, \; v=1 \\ 1-\sqrt{\frac{3}{2}}, \; v=-\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1+\sqrt{\frac{3}{2}}; \; v=\sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right.$

Пусть $y=0$, сл-но: $\begin{cases} (x-2)^2+9=25 \\ \sqrt{x(x-2)} = \sqrt{2-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=\pm 4 \Leftrightarrow \\ x= \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \\ x=\sqrt{2-x} \end{cases}$

$\Rightarrow -2 = \sqrt{2+2} \Rightarrow \varnothing \quad , \quad 6$

Пусть $y=2$ сл-но $\begin{cases} (x-2)^2+9=25, \; x-2=\pm 4 \\ x-4=\sqrt{x-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \\ x-4=\sqrt{x-2} \end{cases} \Leftrightarrow x=6$

$(6;2)$ – решение.

Пусть $y = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2 + 9(\pm\sqrt{\frac{3}{2}})^2 = 25 \Rightarrow (x-2)^2 = 25 - \frac{45}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} + 2 \\ (\pm\sqrt{\frac{5}{2}} + 2) \pm 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 2 = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \pm 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{(y-1)(x-2)}\end{cases}$

$y \neq 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$, т.к. левая часть будет отрицательной.

$y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$; $x = 2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$; Если $x = 2 + \sqrt{\frac{5}{2}}$, то под корнем будет отриц. число. При подстановке $x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$ — выйдет $\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$, верно, значит $(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}})$ — решение.

Ответ $(6; 2)$, $(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2})$

11) $\begin{cases}\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\end{cases} \Leftrightarrow$

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos(2\beta)$

$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1\end{array}\right. \Rightarrow$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$-1 = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \\ 2\sin 2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\sin 2\alpha = -2\cos^2\alpha \\ 2\sin 2\alpha = -2\sin^2\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{2}\cos^2\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sin^2\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -\frac{1}{2}\cos\alpha \\ \sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = -\frac{1}{2}\sin\alpha\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \leftarrow \text{tg}\,\alpha \text{ не сущ.} \\ \sin\alpha = 0 \\ \text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2} \\ \text{tg}\,\alpha = -2\end{array}\right. (*)$

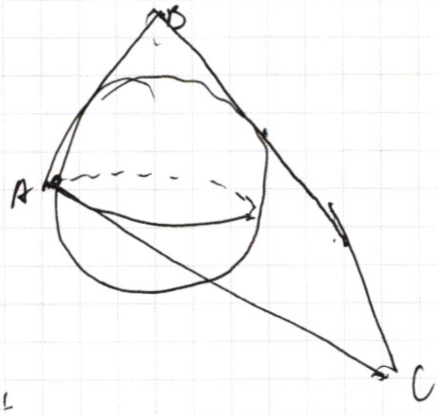
(*) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2} \\ \text{tg}\,\alpha = -2 \\ \text{tg}\,\alpha = 0\end{array}\right.$

Т.к. получилось три возможных решения, а по условию их не менее трёх, значит (*) есть ответ.

Ответ $-\frac{1}{2}; -2; 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7)



Решение:

A, M_1, N_1, K – лежат на одной сфере и пл-ти, значит они лежат на одной окр-ти. ∴ $\angle M_1AN_1 + \angle M_1KN_1 = 180°$.
$M_1K \parallel AC$, $N_1K \parallel AB$, значит $\angle M_1AN_1 = \angle M_1KN_1 = 90°$
$M_1M_2 \parallel AD$, $M_1M_2 = \frac{AD}{2}$; значит $M_1M_2N_2N_1$ – пара-мм, т.к.
т-ки M_1, M_2, N_1, N_2 на одной сфере, то они на одной окр-ти,
т.е. – он прям-ик, $M_1M_2 \perp M_1N_1 \Rightarrow AD \perp BC$. Пусть $H \in BC$
и $AH \perp BC \Rightarrow AH \parallel AC$. Из этого ~~плоск~~ $(ADH) \perp BC$, ∴
$DH \perp BC$; $DH = BD \sin\angle HBD$, $DH = CD \cdot \sin\angle ACD$; $\frac{BH}{CH} = \frac{BD}{CD}$; $\frac{BD}{CD} \cdot \sin\angle ABD$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)