МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$(x-2)(y-1)\geq 0$

$x\geq 2y$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$ (первое уравнение возвели в квадрат)

$x^2-5xy+4y^2+2y+x-2=0$

$(y+(1-x))(4y-(2+x))=0$

I. $y=x-1$. подставляем в первое уравнение

$x-2x+2=\sqrt{x^2-x-x-2x+2+2}$

$2-x=\sqrt{x^2-4x+4}$

$2-x=\sqrt{(x-2)^2}$. Это может быть только при $x\leq 2$

II. $y=\frac{x+2}{4}$. подставляем в первое уравнение.

$x-\frac{x+2}{2}=\sqrt{\frac{x(x+2)}{4}-x-\frac{x+2}{2}+2}$

$\frac{x}{2}-1=\sqrt{\frac{x^2}{4}-x+1} \iff \frac{x}{2}-1=\sqrt{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}$

Это может быть только при $x\geq 2$.

- Подставим $y=x-1$ во второе уравнение.

$x^2+9(x-1)^2-4x-18(x-1)=12$

$10x^2-18x+9-4x-18x+6=0$

$10x^2-40x+15=0 \iff 2x^2-8x+3=0$ $\quad x=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$, т.к. $x\leq 2 \Rightarrow y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

• Подставим $y = \frac{x+2}{4}$ во второе уравнение.

$$x^2 + 9\cdot\frac{x^2+4x+4}{16} - 4x - \frac{9}{2}(x+2) - 12 = 0 \quad \Big|\cdot 16$$

$\times\frac{12}{16}$ $\frac{72}{192}$ $+\frac{144}{192}$ 336

$$25x^2 + 36x + 36 - 64x - 72x - 144 - 192 = 0$$

$$25x^2 - 100x - 300 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0. \Rightarrow x = 6, \text{ т.к. } x \geq 2 \Rightarrow y = 2.$$

Ответ: $\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ и $(6; 2)$. ~~первое число - x, вто-~~

в каждой скобке первое число $-x$, второе $-y$.

№ 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$\log_{12}(x^2+18x) \Rightarrow x^2+18x > 0$. Пусть $x^2+18x = t$, $t > 0$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13} \qquad \Rightarrow t \in (0; 144]$$

При $t > 144$ левая часть меньше правой, т.к. $f(t) = t^{\log_{12}13} - t - 5^{\log_{12}t}$ — возрастающая, а при $t = 144$ достигается равенство.

$$0 < t \leq 144 \Rightarrow x^2 + 18x \leq 144 \Rightarrow (x-6)(x+24) \leq 0 \Rightarrow x \in [-24; 6]$$

$$x^2 + 18x > 0 \Rightarrow x(x+18) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

А) $8x^2+(a+30)x+(b+17)\le 0$ при всех $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$

график-парабола с ветвями вверх. $\Rightarrow$ достаточно потребовать, чтобы $f(-\frac{11}{4})\le 0$ и $f(-\frac{3}{4})\le 0$, где $f(x)=8x^2+(a+30)x+(b+17)$

$\frac{121}{2}-\frac{11(a+30)}{4}+b+17\le 0$

$242-11a-330+4b+68\le 0 \Leftrightarrow 11a+20\ge 4b$

$\frac{9}{2}-\frac{3(a+30)}{4}+(b+17)\le 0$

$18-3a-90+4b+68\le 0 \Leftrightarrow 3a+4\ge 4b$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow b\le\frac{11}{4}a+5$ и $b\le\frac{3}{4}a+1$

Б) $\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3}\le 0$ при всех $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$ (т.е. $4x+3<0$)

$12x+11-(4ax^2+4bx+3ax+3b)\ge 0$

$4ax^2+(4b-12+3a)x+(3b-11)\le 0$ $\quad g(x)=4ax^2+(4b-12+3a)x+(3b-11)$

I. $a=0$

Из части А): $b\le 1$

Из части Б): $4(b-3)x+(3b-11)\le 0$ при всех $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\ge\frac{11-3b}{4(b-3)}$ (т.к. $b<3$ из части А).

$-\frac{11}{4}\ge\frac{11-3b}{4(b-3)}$ $\quad -11(b-3)\le 11-3b\Rightarrow 8b\ge 22\Rightarrow b\ge\frac{11}{4}$. Не может быть.

II. $a>0\Rightarrow$ ветви $g(x)$ вверх $\Rightarrow$ достаточно потребовать чтобы $g(-\frac{11}{4})\le 0$ и $g(-\frac{3}{4})\le 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{121}{4}a - 11b + 33 - \frac{33}{4}a + 3b - 11 \leq 0$ $\quad$ $\begin{array}{r}-121\\33\\\hline 88\end{array}$

$22a - 8b + 22 \leq 0 \Rightarrow 4b \geq 11a + 11 \quad \Rightarrow b \geq \frac{11}{4}a + \frac{11}{4}$

$\frac{9}{4}a - 3b + 9 - \frac{9}{4}a + 3b - 11 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq 0.$ Всегда.

Итак, при $a>0$: $\begin{cases} b \geq \frac{11}{4}a + \frac{11}{4} \\ b \leq \frac{11}{4}a + 5 \\ b \leq \frac{3}{4}a + 1 \end{cases}$ $\quad \frac{11}{4}a + 5 > \frac{3}{4}a + 1$, т.к. $a+2>0$

$\frac{11}{4}a + \frac{11}{4} \leq \frac{3}{4}a + 1$

$2a + \frac{7}{4} \leq 0 \Rightarrow$ такого не может быть. Тогда случай $a>0$ невозможен (т.к. $b \geq \frac{11a}{4} + \frac{11}{4}$ и $b \leq \frac{3}{4}a + 1$, но $\frac{11a}{4} + \frac{11}{4} > \frac{3}{4}a + 1$).

III. $a<0 \Rightarrow$ ветви $g(x)$ вниз

$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} g(-\frac{3}{4}) \leq 0 \\ \frac{12-4b-3a}{8a} \geq -\frac{3}{4} \end{cases} \\ ② \begin{cases} g(-\frac{11}{4}) \leq 0 \\ \frac{12-4b-3a}{8a} \leq -\frac{11}{4} \end{cases} \\ (4b-12+3a)^2 - 16a(3b-11) \leq 0 \end{array}\right.$

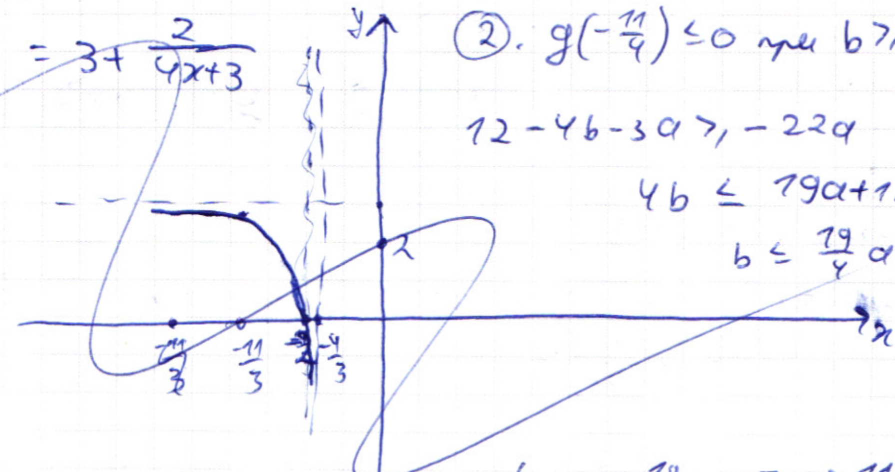
① $g(-\frac{3}{4}) \leq 0$ всегда (это уже выяснили).

$12 - 4b - 3a \leq -6a$

$4b \geq 12 + 3a \Rightarrow b \geq \frac{3}{4}a + 3$

Но мы уже выяснили, что $b \leq \frac{3}{4}a + 1 \Rightarrow$ этот случай невозм.

$f(x)$, $g(x)$: $\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$



② $g(-\frac{11}{4}) \leq 0$ при $b \geq \frac{11}{4}a + \frac{11}{4}$

$12 - 4b - 3a \geq -22a$

$4b \leq 19a + 12$

$b \leq \frac{19}{4}a + 3$

Есть ~~прямые~~ промежутки $(-\infty; -\frac{19}{4}a + 3]$, $[\frac{11}{4}a + \frac{11}{4}; +\infty)_a$.

Они должны пересекаться $\Rightarrow -\frac{19}{4}a + 3 \geq \frac{11}{4}a + \frac{11}{4}$ $\quad \frac{15}{2}a \leq \frac{1}{4}$

$a \leq \frac{1}{30}$ V.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Заметим, что $f(2)=f(3)=0$, $f(5)=f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=$
$=f(19)=4$, $f(23)=5$.

Кроме того, $f(2\cdot b)=f(2)+f(b) \Rightarrow f(2b)=f(b)$ для любого рационального b. Аналогично $f(3b)=f(b)$.

Тогда $f(1)=f(2)=f(3)=0$, $f(4)=f(2)=0$, $f(6)=f(3)=0$,
$f(8)=f(4)=0$, $f(9)=f(3)=0$, $f(10)=f(5)=1$, $f(12)=f(6)=0$,
$f(14)=f(7)=1$, $f(15)=f(5)=1$, $f(16)=f(8)=0$, $f(18)=f(9)=0$,
$f(20)=f(10)=1$, $f(21)=f(7)=1$, $f(22)=f(11)=2$, $f(24)=$
$=f(12)=0$.

Заметим также, что $f\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)=f\left(\frac{1}{a}\right)+f(a) \Rightarrow$
$\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$ для любого рац. a.

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

Достаточно найти кол-во пар нат. x и y $(1\le x\le 24,\ 1\le y\le 24)$ таких, что $f(x)<f(y)$.

11 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(6)=f(8)=f(9)=f(12)=f(16)=f(18)=\cancel{f(20)}=f(24)=0$.

7 $f(5)=f(7)=f(10)=f(14)=f(15)=f(20)=f(21)=1$

2 $f(11)=f(22)=2$

1 $f(13)=3$

2 $f(17)=f(19)=4$

1 $f(23)=5$

Если $y=23$, то вариантов для x 23.

Если $y=17$ или 19, то вариантов для x 21.

если $y=13$, то вариантов для x 20.

Если $y=11$ или 22, то вариантов для x 18.

Если $y=5, 7, 10, 14, 15, 20$ или 21, то вариантов для x 11.

Если y что-то другое, то вариантов для x нет, так как тогда $f(y)=0$.

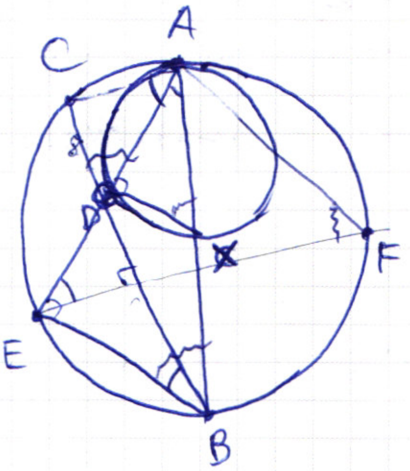
Итого всего пар подходящих (x,y):

$1\cdot 23+2\cdot 21+1\cdot 20+2\cdot 18+7\cdot 11=23+42+20+36+77=$

$=65+56+77=121+77=198$.

Ответ: 198

№4



Дано: $CD=8$, $BD=17$

Найти: r, R, S_{AEF}, $\angle AFE$.

r – радиус ω, R – радиус Ω.

$BD^2=BX\cdot BA \Rightarrow BX\cdot BA=17^2$, то есть $(2R-2r)\cdot 2R=17^2 \Rightarrow$

$ED\cdot DA=CD\cdot DB \Rightarrow ED\cdot DA=136.$ $\Rightarrow \cancel{AD=\frac{136}{}}$ $ED=\frac{136}{AD}$

$\angle ADX=\angle AEB=90°$, т.к. AX и AB – диаметры (т.к. окр. касаются) $\Rightarrow \triangle ADX \sim \triangle AEB$ по двум углам ($\angle A$ общий) $\Rightarrow \frac{AX}{\cancel{AXB}\ AB}=\frac{AD}{AE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DE}=\frac{AX}{XB} \Rightarrow \frac{AD}{DE}=\frac{2r}{2R-2r} \Rightarrow \frac{AD^2}{136}=\frac{2r}{2R-2r} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD^2=\frac{136r}{R-r}=\frac{2\cdot 136r}{17^2/2R}=\frac{4\cdot 136rR}{17^2}=\frac{32rR}{17}$ (*)

$$\begin{cases} ED\cdot DA=136 \\ BX\cdot BA=17^2 \Rightarrow BX=\frac{17^2}{BA} \\ \frac{AD}{DE}=\frac{BA-BX}{BX} \end{cases}$$

$\frac{AD}{DE}=\frac{BA^2}{17^2}-1 \Rightarrow 136\left(\frac{4R^2}{17^2}-1\right)=AD^2$

продолж. на с. 9

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

Из второго: $2\cdot\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$ (*)

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ (т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$)

$\cancel{I}$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cancel{\sin}\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = ?\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{\cdot\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1}$

Пусть $\sin 2\alpha = m$, $\cos 2\alpha = n$, $\sin 2\beta = e$, $\cos 2\beta = s$

$$\begin{cases} m^2+n^2 = e^2+s^2 = 1 \\ ms + ne = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2e(ns - me) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

I. $ns - me = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow e = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ~~из второго~~ из (*)

1) $s = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} 2m - n = -1 \\ 2n + m = \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m - n = -1 \\ 2m + 4n = \frac{4}{\cancel{\sqrt{5}}} \end{cases} \Rightarrow 5n = \cancel{\frac{4}{\sqrt{5}}+1} \Rightarrow n = \cancel{\frac{4}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m = \cancel{\frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{3}{5}}$ 0

$\cancel{tg\, 2\alpha = \frac{m}{n} = \frac{\frac{2}{5\sqrt{5}}-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5\sqrt{5}}+\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}-2}{\frac{4}{\sqrt{5}}+1} = \frac{2-2\sqrt{5}}{4+\sqrt{5}}}$ 0

2) $s = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} 2m - n = -1 \\ -2n + m = \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 1 \\ 2m - 4n = \frac{4}{\cancel{\sqrt{5}}} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ 5n = \cancel{1 - \frac{4}{\sqrt{5}}}\ -3 \Rightarrow n = \cancel{\frac{1}{5} - \frac{4}{5\sqrt{5}}}\ -\frac{3}{5} \Rightarrow m = \cancel{\frac{2}{5\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{4}{5}$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{m}{n} = \cancel{\frac{\frac{2}{5\sqrt{5}} - \frac{2}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{4}{5\sqrt{5}}}} = \cancel{\frac{2 - 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 4}} \quad -\frac{4}{3}$$

II. $ns - me = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $s = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} 2m + n = -1 \\ 2n - m = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n + 4m = -2 \\ 2n - m = -2 \end{cases} \Rightarrow m = 0,\ n = -1$$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = 0$

2) $s = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$$\begin{cases} -2m + n = -1 \\ -2n - m = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2m + n = -1 \\ -2m - 4n = -4 \end{cases} \Rightarrow \quad 5n = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{5} \Rightarrow m = \frac{4}{5}$$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{m}{n} = \frac{4}{3}$

Итак, $\mathrm{tg}\,2\alpha = \{0, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\}$

$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$ (всё определено почти)

- $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = 0$
- $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \quad 6\,\mathrm{tg}\,\alpha = 4 - 4\,\mathrm{tg}^2\alpha$

  $2\,\mathrm{tg}^2\alpha + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2 = 0$

$(\mathrm{tg}\,\alpha + 2)(2\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\,\alpha = \{\frac{1}{2}, -2\}$

- $\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \quad 6\,\mathrm{tg}\,\alpha = 4\,\mathrm{tg}^2\alpha - 4 \Rightarrow \ 2\,\mathrm{tg}^2\alpha - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2 = 0$

  $(\mathrm{tg}\,\alpha - 2)(2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 1) = 0$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \{-\frac{1}{2}; 2\}$

Понятно что раз все значения $\mathrm{tg}\,2\alpha$ достигаются (т.к. все переходы равносильны), то и все значения $\mathrm{tg}\,\alpha$ достигаются.

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = \{\pm\frac{1}{2}; \pm 2; 0\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

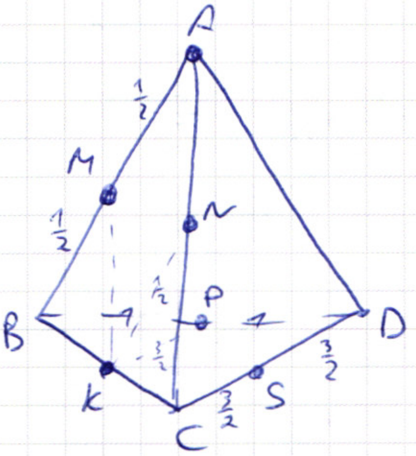
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



Дано: $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$

Найти: BC-?

Заметим, что $MK=AN$ и $MK \parallel AN$, т.к. MK-сред. линия в $\triangle ABC$, а N-сер. AC $\Rightarrow$ $AMKN$-параллелограмм.

A, M, N, K – на одной окружности (т.к. они на одной сфере и в одной плоскости) $\Rightarrow$ $AMKN$ – вписанный параллелограмм $\Rightarrow$ $AMKN$ – прямоугольник $\Rightarrow$ $\angle BAC=90^\circ$

$MN \parallel PS$ и $MN=PS$, т.к. MN и PS-сред. линии в $\triangle ABC$ и $\triangle BDC$ соотв. $\Rightarrow$ $MNSP$-параллелограмм $\Rightarrow$ $MNSP$-прямоугольник, т.к. M, N, S, P на одной окр. $\Rightarrow$ $NS \perp PS \Rightarrow AD \perp BC$.

№4 (продолжение)

$136\left(\frac{4R^2}{17^2}-1\right)=AD^2 \Rightarrow ED^2=\frac{136^2}{AD^2}=\frac{136}{\frac{4R^2}{17^2}-1}$

$\angle CAE=\angle DBE_4=\angle DEF$

$\angle AFE=\angle ABE=\angle AXD=\angle ADC$, т.к. DC-касат.

$\triangle DCA \sim \triangle XDA$ по двум углам ($\angle AXD=\angle CDA$ и прямые углы) $\Rightarrow$ $\angle DAX=\angle CAD \Rightarrow AD$-бисс. $\angle CAB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ E- сер. дуги $CB \Rightarrow EF$-диаметр окр. Ω

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Из $\triangle CAB$ и св. бисс.: $\frac{8}{17}=\frac{CA}{2R} \Rightarrow 4R^2=\frac{17^2\cdot CA^2}{64}=$

по теор. $\frac{17^2(DA^2-64)}{64}=$ ~~$17^2(136$~~ $=\frac{17^2\left(136\left(\frac{4R^2}{17^2}-1\right)-64\right)}{64}$

$64\cdot 4R^2=17^2\left(136\cdot\frac{4R^2}{17^2}-136-64\right)$

$256R^2=136\cdot 4R^2-200\cdot 17^2$

$288R^2=200\cdot 17^2 \Rightarrow 144R^2=100\cdot 17^2 \Rightarrow R=\frac{170}{12} \Rightarrow$

$\times\begin{array}{r}136\\4\\\hline 544\end{array}$ $-\begin{array}{r}544\\256\\\hline 288\end{array}$

$\Rightarrow AD^2=136\left(\frac{4\cdot\frac{170^2}{12^2}}{17^2}-1\right)=136\left(\frac{400}{144}-1\right)=\frac{256\cdot 136}{144}=$

$=\frac{64\cdot 136}{36}=\frac{16\cdot 136}{9} \Rightarrow$ из $(*)$ $\frac{16\cdot 136}{9}=\frac{32\cdot 170}{12\cdot 17}\cdot r$

$r=\frac{16\cdot 136\cdot 12\cdot 17}{9\cdot 32\cdot 170}=\frac{16\cdot 136\cdot 12}{9\cdot 320}=\frac{4\cdot 136\cdot 4}{3\cdot 80}=\frac{136}{75}$

~~Ответ~~: $\frac{136}{75}$ и $\frac{170}{12}$

$ED=\frac{136}{AD}=\frac{136}{\frac{4}{3}\sqrt{136}}=\frac{3}{4}\sqrt{136} \Rightarrow AE=\frac{3}{4}\sqrt{136}+\frac{4}{3}\sqrt{136}=$

$=\frac{25}{12}\sqrt{136} \Rightarrow AE^2=\frac{25\cdot 25\cdot 136}{144} \Rightarrow AF^2=EF^2-AE^2=$

$=4\cdot\frac{170^2}{144}-\frac{25\cdot 25\cdot 136}{144}=\frac{1}{144}\left(4\cdot 5\cdot 5\cdot 4\cdot 17\cdot 17-25^2\cdot 136\right)=$

$=\frac{5}{144}\left(16\cdot 17^2-5\cdot 25\cdot 136\right)=\frac{5}{144}\cdot 1324 \Rightarrow AF=\frac{1}{6}\sqrt{331\cdot 5}$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\end{array}$ $\times\begin{array}{r}289\\16\\\hline 1734\\289\\\hline 4624\end{array}$ $\times\begin{array}{r}136\\25\\\hline 680\\272\\\hline 3300\end{array}$ $-\begin{array}{r}4624\\3300\\\hline 1324\end{array}$ $\frac{1324}{144}=\frac{331}{36}$

$S_{AEF}=\frac{1}{2}AE\cdot AF=\frac{25}{24}\sqrt{136}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{331\cdot 5}=\frac{25}{144}\sqrt{136\cdot 5\cdot 331}$

$\angle AFE=\arcsin\frac{\frac{25}{12}\sqrt{136}}{\frac{170}{6}}=\arcsin\frac{\frac{25}{2}\sqrt{136}}{170}=\arcsin\frac{5\sqrt{136}}{2\cdot 34}=$

$=\arcsin\frac{5}{68}\sqrt{136}$ Ответ: $\frac{136}{75}$ и $\frac{170}{12}$; $\frac{25}{144}\sqrt{136\cdot 5\cdot 331}$; $\arcsin\frac{5}{68}\sqrt{136}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad tg\alpha - ?$ $\quad 9y^2-18y+(x^2-4x-12)=0$

$= -9(x^2-4x-21)$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad 81 - 9x^2+36x+108 = -9x^2+36x+189 =$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad + \frac{108}{81}$ 189

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\quad (x-2)^2 + \cancel{9}\cancel{(3y-6)}^2 = \cancel{4}\,25$ $\quad (3y-3)^2$ $\quad 9(y-1)^2$

$xy-x-2y+2 \geq 0$

$y(x-2)+(2-x) \geq 0$

$\boxed{(y-1)(x-2)\geq 0}$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$ $\quad \frac{10}{4} + 9\frac{10}{4}$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$ $\quad (1-x)(-2-x)$ $\quad 9(y-1)^2$

$4y^2+(2-5x)y+(x^2+x-2)=0$

$25x^2-20x+4-16x^2-16x+32 = 9x^2-36x+36 = 9(x^2-4x+4) = 9(x-2)^2$

$\frac{2-5x \mp 3x+6}{8} = \frac{8-8x}{8} = 1-x$ $\quad 5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$(y+(1-x))(4y-(2+x))$ $\quad t(t-144) \leq 0$

$\cancel{-4y+4xy}$

$+4y-4xy$ $\quad 4y^2+2y-5xy$

$4y^2+4y(1-x)-(2+x)y-(2-x-x^2)$ $\quad 1 \geq t^{\log_{12}13-1}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0$ $\quad x(x+18)>0 \Rightarrow \boxed{x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$ $\quad \log_{12} t = \frac{\log_{12} 5}{\log_t 5}$

$\boxed{144}$

$x^2+18x = t, \quad t>0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12}13}$ $\quad 25+144 \geq 169$

5

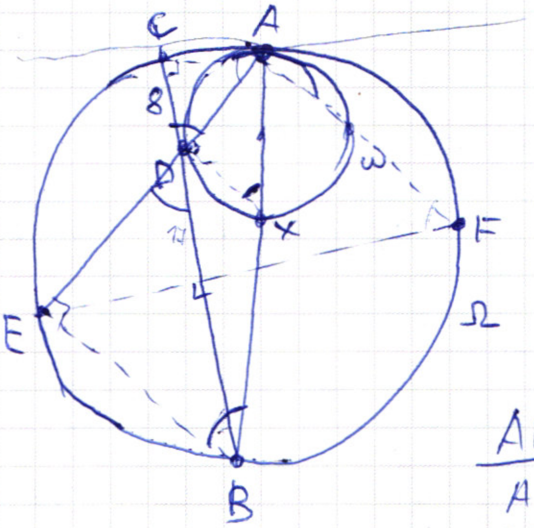
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$



$CD \cdot DB = AD \cdot DE = 136$

$AD = \frac{136}{DE}$

$BX \cdot BA = 17^2$

$(2R - 2r) \cdot 2R = 17^2$

$(R - r) \cdot R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\frac{AD}{AE} = \frac{2r}{2R}$ $\quad \frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{2r}{2R - 2r}$ $\quad \frac{136}{DE^2} = \frac{r}{R - r}$ $\quad (R - r) \cdot R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$ $\quad \frac{225}{8}$

$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$\frac{AX}{AB} = \frac{DA}{AE}$ $\quad \frac{8}{DX} = \frac{AD}{AX}$ $\quad \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$\frac{11}{4} a + 5 \geq \frac{3}{4} a + 1$

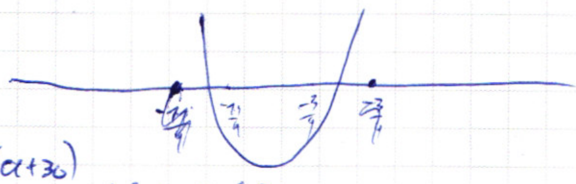
$2a + 4 \geq 0$ $\quad \frac{DE}{DX} = \frac{17}{2r}$ $\quad 3 + \frac{2}{4x + 3}$ $\quad \frac{225}{64}$ $\quad -\frac{225}{136} \; 89$

$a + 2 \geq 0$ $\quad \frac{89}{8}$ $\quad -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} -$

$-\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 =$ 5 $\quad -\frac{11}{4}$

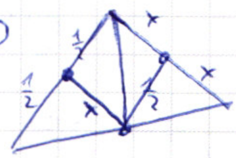
$ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$ при всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$x^2 + 2x + 1$ $\quad 8x^2 + (a + 30)x + (b + 17) \leq 0$



$f\left(-\frac{11}{4}\right) \leq 0$

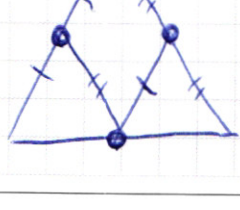
$f\left(-\frac{3}{4}\right) \leq 0$



$\frac{121}{2} - \frac{11(a + 30)}{4} + b + 17 \leq 0$

$242 - 11a - 330 + 4b + 68 \leq 0$ $\quad 242 \; 68 \; 310$

$\boxed{20 + 11a \geq 4b}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{32rR^2}{32rR+136\cdot 17}=r$$

$32R^2=32rR+136\cdot 17$

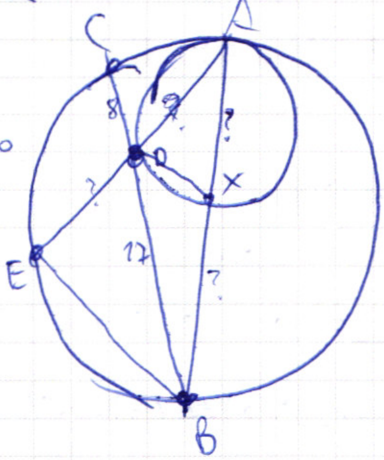
$4R^2=4rR+17^2$

$4R(R-r)=17$

$ED\cdot DA=136$

$BX\cdot BA=17^2$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$



$BX\cdot BA$

$AD\cdot DE$

$$\frac{AD}{DE}=\frac{BA-BX}{BX}$$

$$\frac{AD}{DE}=\frac{AX}{BX}$$

$$BX=\frac{17^2}{BA}$$

$\sin 30+\sin 90=2\cdot\sin 60\cdot\cos 30$

$\frac{1}{2}+1=2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}=\frac{\sqrt3}{2}$

$$\frac{4R^2}{17^2}-1=\frac{AD}{DE}=\frac{BA-\frac{17^2}{BA}}{\frac{17^2}{BA}}=$$

$=\frac{AD}{DE}$

$$=\frac{BA^2-17^2}{17^2}$$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$$\left(\frac{4R^2}{17^2}-1\right)\cdot 136=$$

$=AD^2$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

30 90

$\frac{3}{2}$ 60 120

$\sqrt3$

$\frac{3}{4}$ $2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot -1$

30 , 90

$2\cdot\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

30 и 90

60 и 120

$-\sqrt3\cdot-\frac{1}{2}$

$\sqrt3$

$2\cdot$

$-\sqrt3\cdot$

$\frac{3}{2}$

$\sqrt3$ $\sqrt3\cdot$

$$tg 2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{2}$$

$$tg 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

$tg 60=\sqrt3$

$\sqrt3=$

$x^2+18x-144=0$

144
81
225

$-9+15$

$\frac{3}{4}a+$

$$=\cancel{\frac{2}{ctg}}\quad\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$b\le\frac{3}{4}a+1$

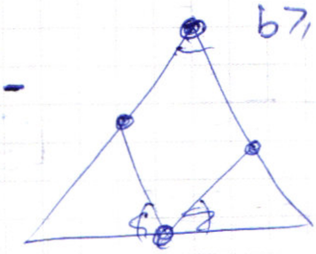
$b\ge\frac{11}{4}a+\frac{11}{4}$

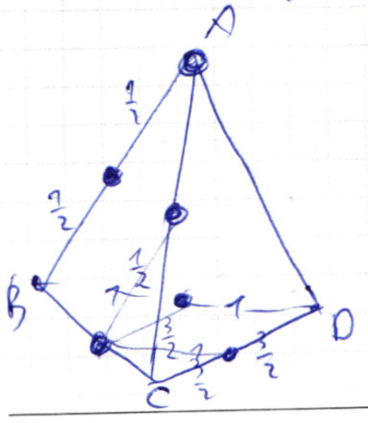
$\frac{3}{4}a+1<\frac{11}{4}a+\frac{11}{4}$

$2a+\frac{7}{4}>0$

$a>-\frac{7}{8}$

$(\log_{12}13)\ t^{\log_{12}13}-1-$





$5^{\log_{12}t}+t\ge t^{\log_{12}13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(2)=f(3)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f(5)=1$, $f(7)=1$

$f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$

$f(2b)=f(b)$

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$

$f(5)=1$ $\quad$ ~~f6~~ $f(8)=f(9)=0$

$f(6)=0$ $\quad$ $f(10)=1$

$f(7)=1$ $\quad$ $f(11)=$ ~~f(12)=0~~ 2

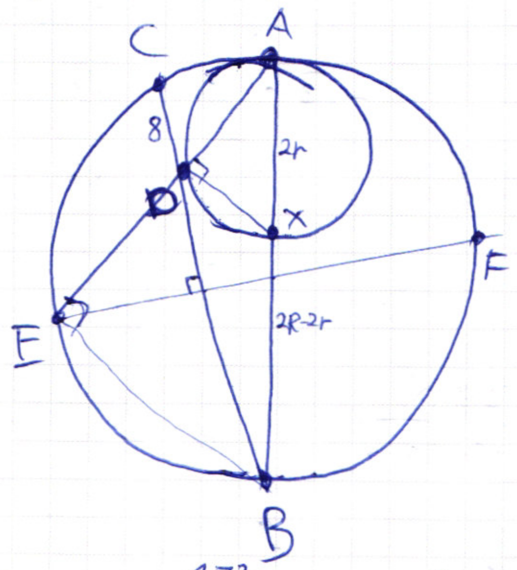
~~f(8)=0~~ $\quad$ ~~f6~~

2 и $\frac{1}{2}$ $\quad$ $f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$0=0+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$AD\cdot DE=136$ $\quad$ $BD=17$

$Bx\cdot BA=17^2$



$$\begin{cases}(2R-2r)\cdot 2R=17^2\\ AD\cdot DE=136\\ \dfrac{AD}{DE}=\dfrac{2r}{2R-r}\end{cases}$$

$2r=2R+\dfrac{17^2}{2R}$

$AD^2=\dfrac{136\cdot 2r}{2R-r}=\dfrac{136\cdot 4rR}{17^2}=$

$=\dfrac{32rR}{17}$

~~2R-2r~~

$2R-2r=\dfrac{17^2}{2R}$ $\quad$ $\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{4rR}{17^2}$ $\quad$ ~~AD=136~~ $DE=\dfrac{136}{AD}$

$\dfrac{AD^2}{136}=\dfrac{4rR}{17^2}$ $\quad$ $AD^2=\dfrac{32rR}{17}$

~~AD~~ $\dfrac{AD}{AD+\frac{136}{AD}}=\dfrac{r}{R}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AD^2}{AD^2+136}=\dfrac{r}{R}$ $\quad$ $r=\dfrac{R\cdot AD^2}{AD^2+136}$

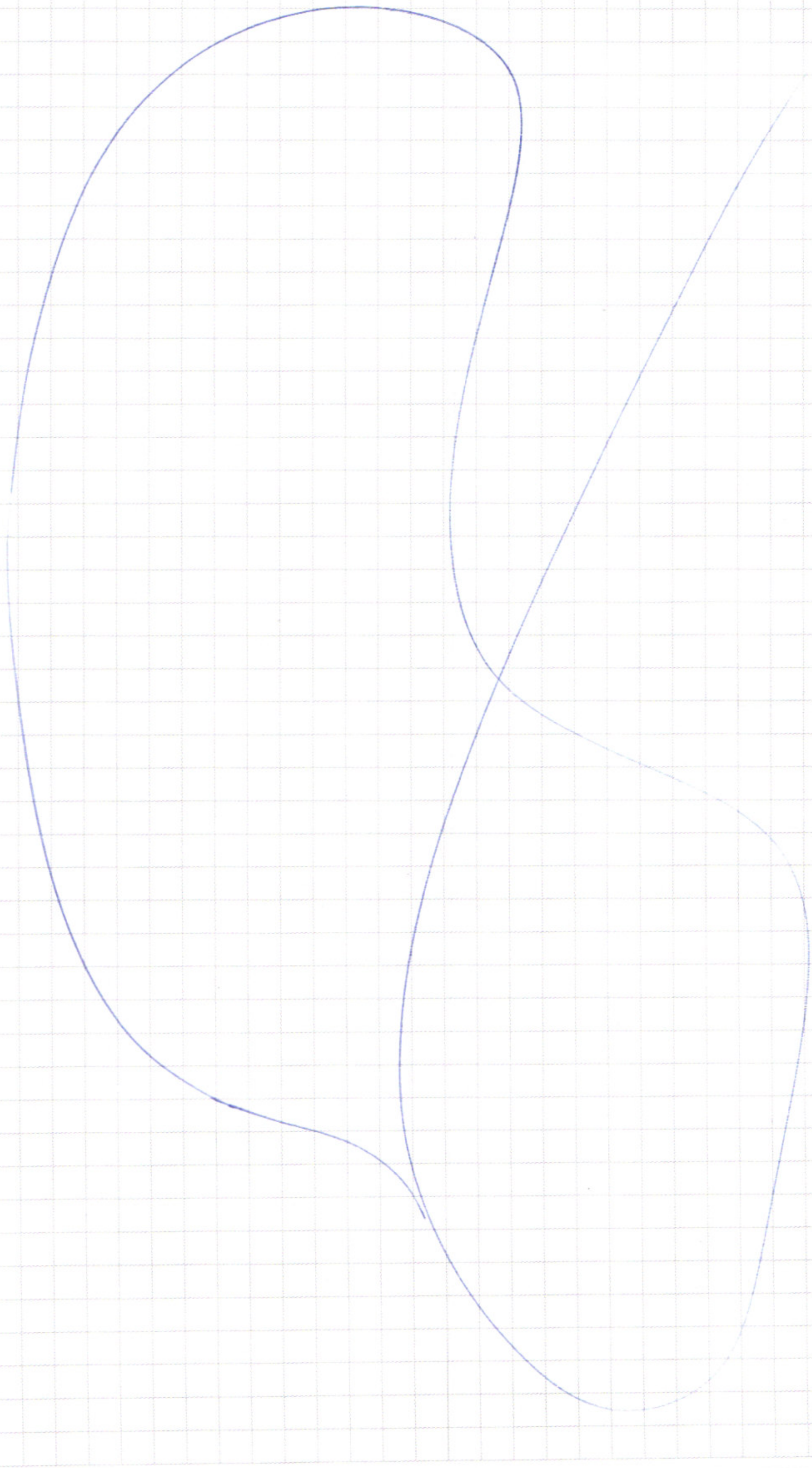
$AD^2=\dfrac{32R^2\cdot AD^2}{AD^2+136}$ $\quad$ $32R^2=AD^2+136$ $\quad$ $r=\dfrac{R\cdot\frac{32rR}{17}}{\frac{32rR}{17}+136}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)