МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha \cdot + \cos 2\alpha = -1$

$\cancel{\cos 2\alpha}$

$\cancel{4 \sin\alpha\cos\alpha}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n$

$2\beta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi k$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$(x-2)^2 + \cancel{9y}\ 9(y-1)^2 = 22$

$x^2 + 4y^2 - 4xy = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$(x - 4y)(x - y)$

$x^2 + 4y^2 + x + 2y = 5xy + 2$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 5xy - 5x - 20y + 2 + 5y^2$

$\cancel{5xy - 5x - 20y + 2 = 12}$

$\cancel{5xy - 5x - 20y - 10 = 0}$

$\cancel{xy - x - 2y - 1 = 0}$

$\cancel{x(y-1) - y - 1 = y}$

$\cancel{(x-1)(y-1) = y}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha(\cos 2\beta + \cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta + \sin 4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$$

$$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$$

$$\sin 2\alpha(\cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta(2\cos 2\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 2\beta(1 + 2\cos 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$$

$$(2\cos 2\beta + 1)(\sin(2\alpha + 2\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$$

$$(2\cos 2\beta + 1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$$

$$(2\cos 2\beta + 1) = 1 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2+9y^2-4x-18y=5xy-5x-20y+2+5y^2$$

$$5xy-5x-20y+5y^2-10=0$$

$$xy-x-2y+y^2-2=0$$

$$x(y-1)+(y-1)^2=3$$

$$(y-1)(x+y-1)=3$$

$$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$$

$$x^2+4y^2+x-xy+2y-4xy-2=0$$

$$x^2-4xy+4y^2+x(1-y)+2(y-1)=0$$

$$(x-2y)^2+(2-x)(y-1)=0$$

$$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$\begin{cases} k-2t=\sqrt{kt} \\ k^2+9t^2=22 \\ t(t+k+2)=3 \end{cases}$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=22$$

$$t=y-1 \Rightarrow y=t+1$$

$$k=x-2 \Rightarrow x=k+2$$

$$x-2y=k+2-2t-2=k-2t$$

$$(x+y-1)=t+k+2$$

$$\begin{cases} k^2-4tk+4t^2=kt \\ k^2+9t^2=22 \\ t(t+k+2)=3 \end{cases}$$

$$k^2-4kt+4t^2=5kt+4t$$

$$(k-2t)^2=\cancel{(k+1)4t}\ t(5k+4)$$

$$k-2t=$$

$x \geq 2y$

$$k-5kt+4t^2=0 \qquad k+2\geq 2t+2$$

$$(k-4t)(k-t)=0 \qquad k\geq 2t$$

$$\left[\begin{array}{ll} k=4t & 4t\geq 2t \quad 2t\geq 0 \quad t\geq 0 \\ k=t & t\leq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x-2=4y-4 & y\geq 1 \\ x-2=y-1 & y\leq 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} 4y=x+2 & y\geq 1 \\ y=x-1 & y\leq 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x+2}{4}\geq 1 \\ x\leq 2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x\geq -2 \\ x\leq 2 \end{array}\right.$$

1) $k=4t,\ t\geq 0,\ x\geq -2,\ y\geq 1$

$$k^2+9t^2=22$$

$$16t^2+9t^2=22$$

$$25t^2=22$$

$$t^2=\frac{22}{25}$$

$$t=\frac{\sqrt{22}}{5} \qquad k=\frac{4\sqrt{22}}{5}$$

$$y=\frac{\sqrt{22}}{5}+1 \qquad x=\frac{4\sqrt{22}}{5}+2$$

2) $k=t,\ t<0,\ y\leq 1,\ x\leq 2$

$$10t^2=22$$

$$t=-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{10}}=-\sqrt{2{,}2}$$

$$y=1-\sqrt{2{,}2}$$

$$x=2-\sqrt{2{,}2}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$|x^2+18x|^{\log_{12}5}+x^2\geqslant|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x>0$

$\cancel{|x|^2+18x|}$

$\cancel{\log_{12}5\,\log_{12}|x^2+18x|+\log_{12}x^2\geqslant\log_{12}13\,\log_{12}|x^2+18x|-\log}$

$$|x^2+18x|^{\log_{12}5}+x^2+18x\geqslant|x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$t=(x^2+18x)$ $\quad t^4+1\geqslant2\sqrt{t^4\cdot f_5}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1\geqslant2t^{\log_{12}\sqrt{\frac{5}{12}}}$

$$t^{\log_{12}5}+t\geqslant t^{\log_{12}13}\qquad 2=t^{\log_{12}12^2}$$

$$\log_{12}5\log_{12}t+\log_{12}t\geqslant\log_{12}13\log_{12}t$$

$$\log_{12}t(\log_{12}5+1-\log_{12}13)\geqslant0$$

$2=t^{\log_t2}$

$$\log_{12}t\cdot\log_{12}\frac{60}{13}\geqslant0$$

$t\geqslant1$

$x^2+18x\geqslant1$

$x^2+18x-1\geqslant0$

$D=18^2+4=328$

$$\begin{array}{r}\times\ 18\\18\\\hline 144\\18\\\hline 324\\+\ 4\\\hline 328\end{array}$$

324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

328	2
164	2
82	2
41	

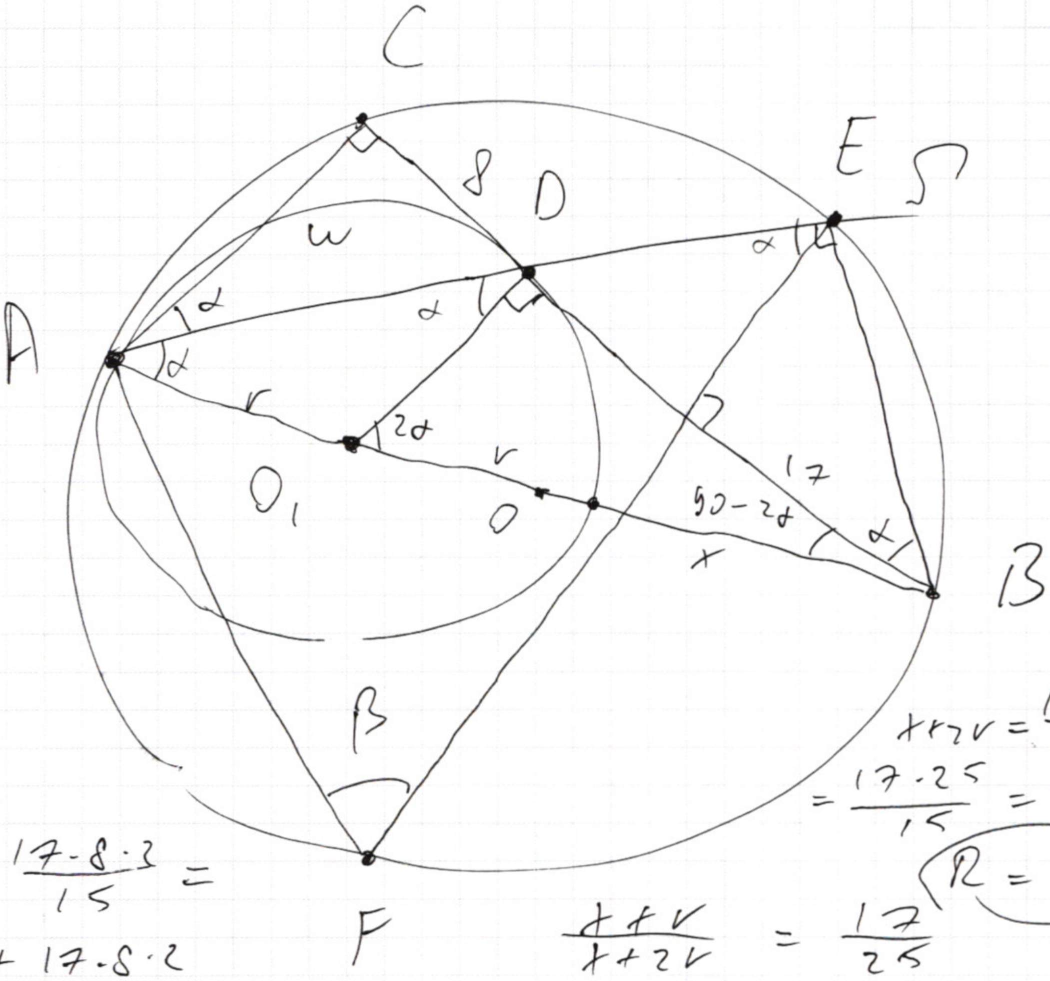
$x_1=\dfrac{-18+2\sqrt{82}}{2}$

$x_2=\dfrac{-18-2\sqrt{82}}{2}$

$x\in\left(-\infty;\frac{-18-2\sqrt{82}}{2}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{-18+2\sqrt{82}}{2};+\infty\right).$

$x\in(-\infty;-9-\sqrt{82}]\cup[-9+\sqrt{82};+\infty).$



$x+2r=$

$=\frac{51}{5}+\frac{17\cdot8\cdot3}{15}=$

$=\frac{153+17\cdot8\cdot2}{15}$

$\cancel{R=\frac{x+2r}{2}=\frac{153+17\cdot8\cdot2}{30}}$

$x+2r=\frac{17\cdot3}{5}+\frac{17\cdot16}{15}=$

$=\frac{17\cdot25}{15}=\frac{17\cdot5}{3}$

$R=\frac{17\cdot5}{6}$

$\frac{x+r}{x+2r}=\frac{17}{25}$

$17^2=x(x+2r)$

$x+2r=\frac{17^2}{x}$

$\frac{(x+r)x}{17^2}=\frac{17}{25}$

$(x+r)x=\frac{17^3}{25}$

$144 \times 4 = 576$

$324 + 576 = 1800$

$25x+25r=17x+34r$

$8x=9r \Rightarrow x=\frac{9}{8}r$

$\left(\frac{9}{8}r+r\right)\frac{9}{8}r=\frac{17^3}{25}$

$\frac{17}{8}\cdot\frac{9}{8}r^2=\frac{17^3}{25}$

$\frac{9}{64}r^2=\frac{17^2}{25} \Rightarrow \frac{3}{8}r=\frac{17}{5}$

$r=\frac{17\cdot8}{15}=\frac{80+56}{15}=\frac{136}{15}$

$x=\frac{9}{8}r=\cancel{136}\ \frac{17\cdot8}{15}\cdot\frac{9}{8}=\frac{17\cdot3}{5}=\frac{51}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~ТВ~~

$$\cos(90-2\alpha) = \frac{17}{x+r} = \frac{17}{\frac{17\cdot 3}{5}+\frac{17\cdot 8}{15}} = \frac{17}{\frac{17\cdot 17}{15}} =$$

$$= \frac{15}{17}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ 64 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$$

$$\beta = 90-2\alpha+\alpha = 90-\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\frac{8}{17} = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\frac{8+17}{17} = 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{34}$$

$$\cos\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34} = \sin\beta \qquad 1-\frac{25}{34} = \frac{9}{34}$$

$$\frac{AE}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow \frac{AE\sqrt{34}}{5} = \frac{17\cdot 5}{3}$$

$$AE = \frac{17\cdot 5\cdot 5}{3\cdot\sqrt{17}\sqrt{2}} = \frac{25\sqrt{17}}{6}\sqrt{2} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$$

$$AF = \frac{17\cdot 5}{3}\cdot\sin\alpha = \frac{17\cdot 5}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{17\cdot 5}{\sqrt{17}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17}\cdot 5}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{34}\cdot 5}{2}$$

$$EF = AF\cos\beta + AE\cos\alpha = \frac{\sqrt{34}\cdot 5}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$EF = \frac{15}{2} + \frac{5\cdot 5\cdot 5}{6} = \frac{5\cdot 9+5\cdot 25}{6} = \frac{5\cdot 34}{6} = \frac{5\cdot 17}{3} = D$$

$EF = D \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{34} \cdot 25}{6} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 34}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} =$

$= \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 17}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2125}{12} \approx 177$

$125 \cdot 17$: $875 + 1250 = 2125$

$2125 : 12 = 177$ (остаток 1)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$x \vdots y$

$x \notin p$

$y \notin p$

x	y	
4	4	14
6	6	14
8	8	13
9	9	13
10	10	14
12	12	12
14	14	14
15	15	14
16	16	12
18	18	13
20	20	12
21	21	14
22	24	14
24	24	11

$\Sigma = 185$

$14 \cdot 8 + 13 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 11 =$

$= 112 + 26 + 36 + 11 =$

$= 112 + 73 = 185$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

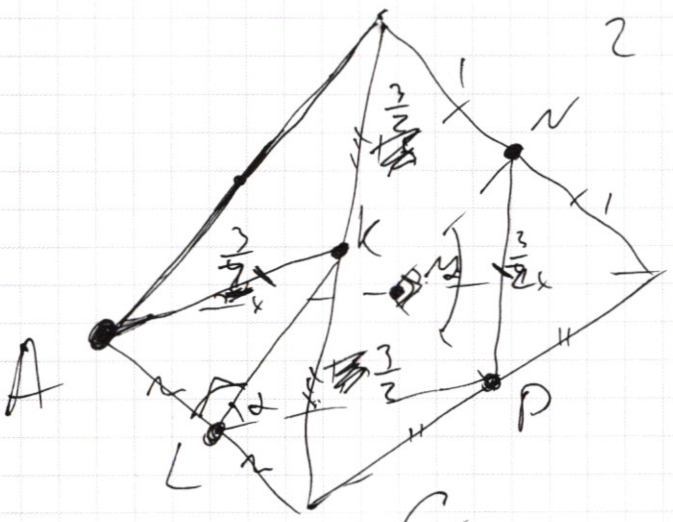
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.



$AB = 1$

$BD = 2$

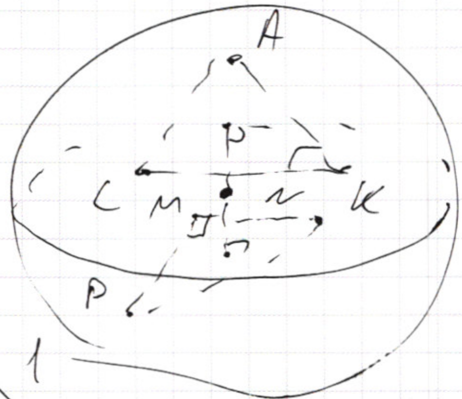
$CD = 3$

вписанный в = окр ⇒

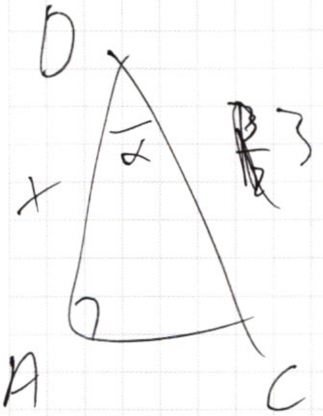
⇒ на равных дугах

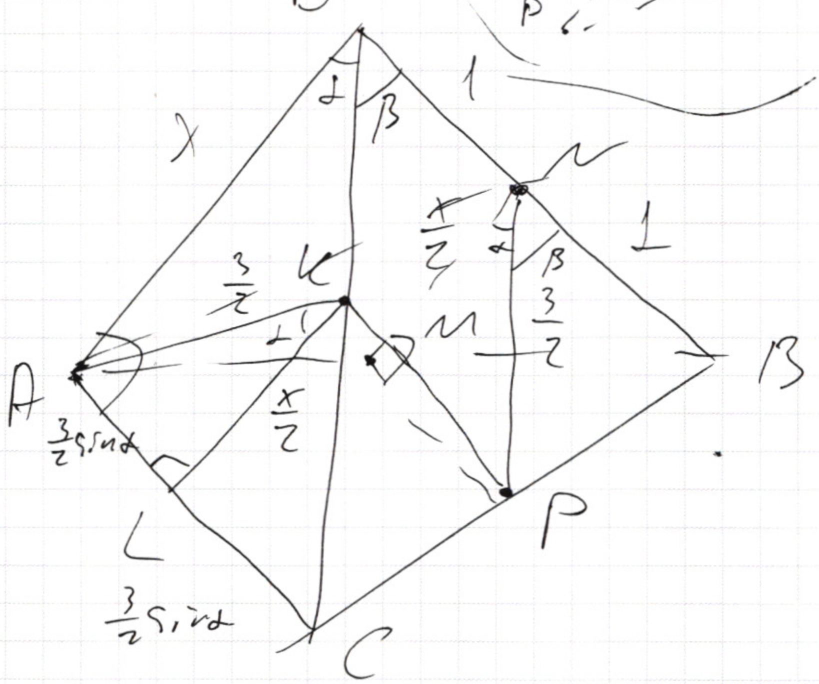
B равные стороны ⇒

⇒ a =



(AKL) || (MNP)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in P$

$y \notin P$

$\frac{x}{y} \notin P$

x	y
2	6
3	8
5	9
7	10
11	12
13	14
17	15
19	16
23	18
29	20
	21
	24

$\Sigma = 9$

$\Sigma = 126$

$$\begin{array}{r} 252 \\ +185 \\ \hline 437 \end{array}$$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} \frac{5}{12}} + 1 \geq t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} + 1 \geq \frac{13}{12}^{\log_{12} t}$

$t = 144$ $\quad \left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^2$

$x \in P$

$y \in P$ $\Rightarrow \Sigma = 81$

$$\begin{array}{r} 185 \\ +126 \\ 81 \\ \hline 392 \end{array}$$

$25 + 144 = 169$

$$\sum = 81 + 126 + 185 = 392$$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ 12x+9 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq -$

$24x + 22 = -16x^2 - 12x - 4x - 3$

$3 + \frac{2}{4x+3}$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)^2 = 0$

$x = -\frac{5}{4}$

$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2}$

$12x + 11 = -8x^2 - 6x - 2x - \frac{3}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = kx + b$

$1 = -\frac{3}{4}k + b$

$5 = -\frac{11}{4}k + b$

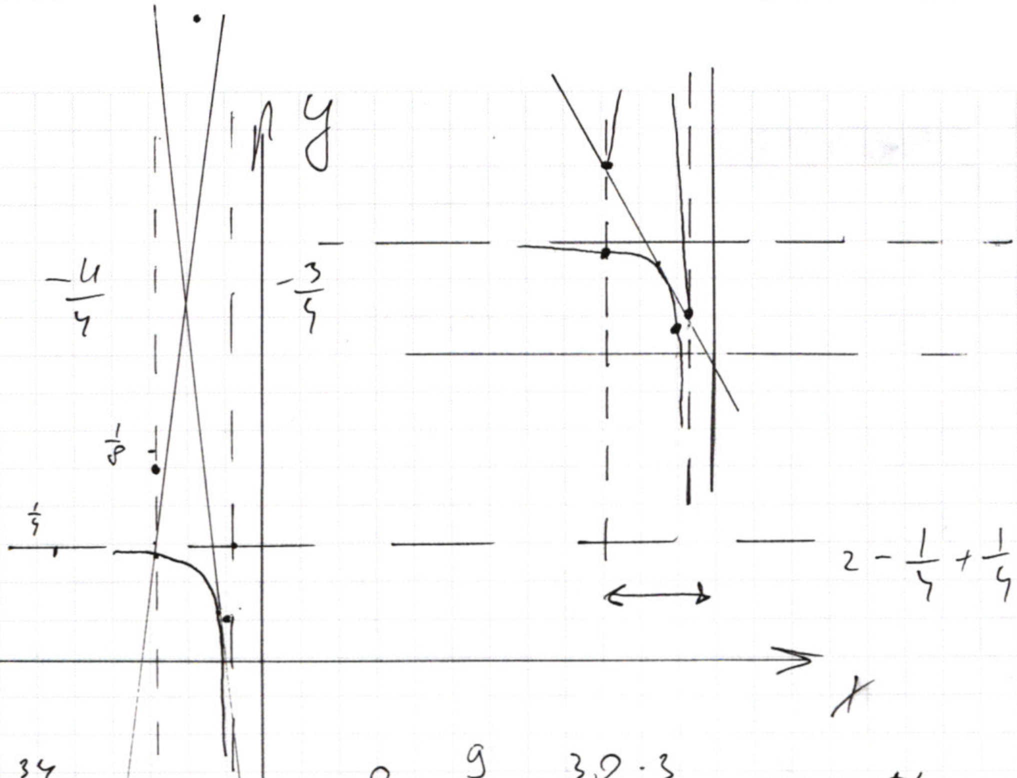
$4 = k\left(\frac{3}{4} - \frac{11}{4}\right)$

$4 = k \cdot -\frac{8}{4}$

$k = -2$

$1 = \frac{3}{2} + b$

$b = -0,5$



$-8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - \frac{34}{2} = y$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - \frac{34}{2} = y$

$y = \frac{165 - 155}{2} = 5$

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$-8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17 = y$

$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - \frac{34}{2} = y$

$\frac{45 - 43}{2} = y$

$\frac{2}{2} = y = 1$

$f(x)\ a x + b$

$g(x) = -2x - \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = g(x)$

$-8x^2 - 30x - 17 = 0$

$8x^2 + 30x + 17 = 0$

~~$(4x+17)(2x+1)$~~

$900 - 32 \cdot 17 = 900 - 4 \cdot 16 \cdot 17 = 900 -$

$- 4 \cdot 272 = \cancel{900} < 0$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$\frac{-12 \cdot \frac{11}{4} + 11}{-11 + 3} = \frac{11(1-3)}{-8} = \frac{-2 \cdot 11}{-8} = \frac{11}{4}$

Ответ: $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (3)

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (1)

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ (2)

~~sin 2α~~

(1) + (2):

$\sin 2\alpha(\cos 2\beta + \cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta + \sin 4\beta) =$
$= -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin 2\alpha(\cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta + 1 - 1) +$
$+ \cos 2\alpha(\sin 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta(2\cos 2\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cdot$
$\cdot (2\cos 2\beta + 1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$

$(2\cos 2\beta + 1)(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$

$(2\cos 2\beta + 1)(\sin(2\alpha + 2\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$

подставим (3):

$(2\cos 2\beta + 1)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta + 1 = 1 + \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 2\beta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

из (3): $2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$

(очевидно, что $l = k - n$, $l \in \mathbb{Z}$)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

тогда $tg\alpha = tg\left(\frac{\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) - \arccos(\frac{2\sqrt5}{5})}{2} + \pi l\right), l \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $tg\alpha = tg\left(\frac{\arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) - \arccos(\frac{2\sqrt5}{5})}{2} + \pi l\right), l \in \mathbb{Z}$.

№2.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $x \geq 2y$, тогда:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4xy = xy - x - 2y + 2 \quad (1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 22 \end{cases}$$

преобразуем (1):

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 5xy - 5x - 20y + 2 + 5y^2$ (3)

Приравняем правые части (2) и (3):

$12 = 5xy - 5x - 20y + 2 + 5y^2$

$5y^2 + 5xy - 5x - 20y - 10 = 0$

$y^2 + xy - x - 4y - 2 = 0$

$x(y-1) + (y-1)^2 - 2y - 3 = 0$

$x(y-1) + (y-1)^2 - 2(y-1) = 5$

$(y-1)(x + y - 1 - 2) = 5$

$(y-1)(x + y - 3) = 5$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \Rightarrow x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

получаем систему:

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (y-1)(x+y-3) = 5 \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 22 \end{cases}$$

пусть $t = y - 1 \Rightarrow y = t + 1$
$k = x - 2 \Rightarrow x = k + 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда: $x+y-3=k+t$;

$x-2y=k+2-2t-2=k-2t \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} k-2t=\sqrt{kt} & (1) \\ t(k+t)=5 \\ k^2+9t^2=22 \end{cases}$

из (1): $k \geq 2t \Rightarrow k^2-4kt+4t^2=kt \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2-5kt+4t^2=0$

$(k-t)(k-4t)=0$

$\left[\begin{array}{l} k=t \Rightarrow t \geq 2t \Rightarrow t \leq 0 \Rightarrow y-1\leq 0 \Rightarrow y\leq 1 \\ k=4t \Rightarrow 4t\geq 2t \Rightarrow t\geq 0 \Rightarrow y-1\geq 0 \Rightarrow y\geq 1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x-2=y-1, \ y\leq 1 \\ x-2=4y-4, \ y\geq 1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=x-1, \ y\leq 1 \\ y=\frac{x+2}{4}, \ y\geq 1 \end{array}\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x\geq 2 \end{array}\right.$

1) $k=t$, $t\leq 0$, $y\leq 1$, $x\leq 2$

$10t^2=22 \Rightarrow t=-\sqrt{2,2}=k$

$y=1-\sqrt{2,2}$; $x=2-\sqrt{2,2}$ (входит в ОДЗ).

2) $k=4t$, $t\geq 0$, $y\geq 1$, $x\geq 2$

$16t^2+9t^2=22$

$t^2=\frac{22}{25} \Rightarrow t=\frac{\sqrt{22}}{5} \Rightarrow k=\frac{4\sqrt{22}}{5}$

$y=\frac{\sqrt{22}}{5}+1$; $x=\frac{4\sqrt{22}}{5}+2$ (входит в ОДЗ)

Ответ: $(2-\sqrt{2,2}; 1-\sqrt{2,2})$; $(\frac{4\sqrt{22}}{5}+2; \frac{\sqrt{22}}{5}+1)$.

~ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$

Пусть $t = x^2+18x$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

~~$\ln 5^{\log_{12} t} + \ln t$~~

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5 - 1} + 1 \geq t^{\log_{12}13 - 1}$

~~$t^{\log_{12}4} + 1 \geq t^{\log_{12}12}$~~

~~$t^{\log_{12}4} + 1 \geq t$~~

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$ (1)

Заметим, что $y = t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$ – монотонно возрастающая ф-ция, т.к. $\log_{12}\frac{13}{12} > 0$, а $y = t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1$ – монотонно убывающая, т.к. $\log_{12}\frac{5}{12} < 0 \Rightarrow$ $g(t) = t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \uparrow$, $h(t) = t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1 \downarrow$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow g(t) = h(t)$ в 1 точке, левее которой выполняется условие (1). (Монотонность ф-ций определена на $t>0$, т.к. $t = x^2+18x$, а $x^2+18x>0$ по ОДЗ.)

Заметим, что $g(t) = h(t)$ при $t = 144$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}144} + 1 = \left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1 = \frac{169}{144}$

$\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}144} = \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$ $\Big| \Rightarrow t \in (0; 144] \Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

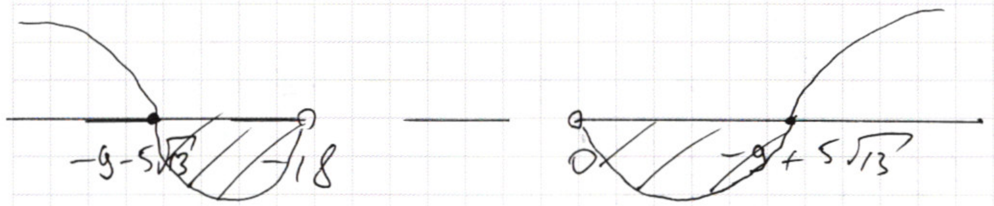
$\Rightarrow x^2+18x\le 144$ $\quad (x^2+18x>0)$
$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$x^2+18x-144\le 0$

$D=324+976=1300\Rightarrow$

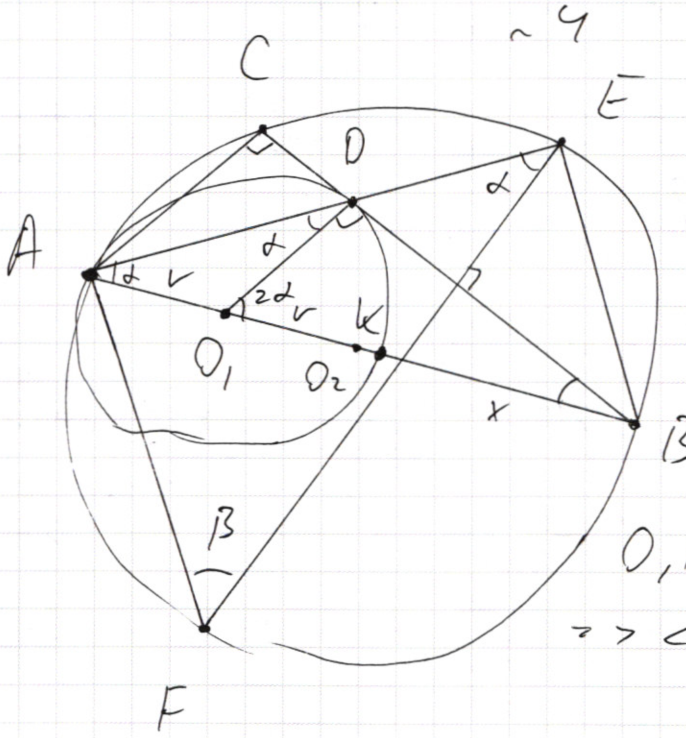
$\Rightarrow x_1=\dfrac{-18-10\sqrt{13}}{2}=-9-5\sqrt{13}$ $\quad (<-18)$

$x_2=\dfrac{-18+10\sqrt{13}}{2}=-9+5\sqrt{13}$ $\quad (>0)$



Ответ: $x\in[-9-5\sqrt{13};-18)\cup(0;-9+5\sqrt{13}]$.

№4



$AO_1=O_1K=r$
(r - радиус ω)(O_1 - центр ω)
$KB=x$
$O_1D\perp BC$ (по условию)
Пусть $\angle O_1AD=\alpha$
$AO_1=O_1D\Rightarrow\angle O_1DA=\alpha$
$O_1D\perp BC$; $EF\perp BC\Rightarrow$
$\Rightarrow\angle FEA=\alpha$

$\angle DAK$ – вписанный в ω; $\angle DO_1K$ – центральный в $\omega\Rightarrow\angle DO_1K=2\alpha$; AB – диаметр $\Omega\Rightarrow\angle ACB=90^\circ$

Заметим, что $\triangle BO_1D\sim\triangle BAC$ ($O_1D\parallel AC\Rightarrow\angle BO_1D=$
$=\angle BAC$; $\angle B$ – общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x+r}{17} = \frac{x+2r}{25} \Rightarrow \frac{x+r}{x+2r} = \frac{17}{25}$ (1)

BD - касательная к ω; BA - секущая $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD^2 = BK \cdot AB \Rightarrow 17^2 = x(x+2r) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r + x = \frac{17^2}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(x+r)x}{17^2} = \frac{17}{25} \Rightarrow x(x+r) = \frac{17^3}{25}$

Из (1): $25x + 25r = 17x + 34r \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x = 9r \Rightarrow x = \frac{9}{8}r$

$(r + \frac{9}{8}r)\frac{9}{8}r = \frac{17^3}{25}$

$\frac{17}{8} \cdot \frac{9}{8} r^2 = \frac{17^3}{25} \Rightarrow \frac{9}{64} r^2 = \frac{17^2}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{r = \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}}$

AB - диаметр $\Rightarrow R$ (радиус Ω) $= \frac{x+2r}{2}$

$x = \frac{9}{8}r = \frac{17 \cdot 8}{15} \cdot \frac{9}{8} = \frac{17 \cdot 3}{5} = \frac{51}{5}$

$x + 2r = \frac{17 \cdot 3}{5} + \frac{17 \cdot 16}{15} = \frac{17 \cdot 25}{15} = \frac{17 \cdot 5}{3}$

$\boxed{R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}}$

$\angle O_1BD = 90 - 2\alpha$ (из $\triangle O_1BD$)

$\cos(90 - 2\alpha) = \frac{17}{x+r} = \frac{17}{\frac{17 \cdot 3}{5} + \frac{17 \cdot 8}{15}} = \frac{17 \cdot 15}{17 \cdot 17} =$

$= \frac{15}{17} = \sin 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{34} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\angle CAE = \angle CAB - \alpha$; $\angle CAB = \angle DO_1B = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \alpha$ и опирается на дугу $CE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EBC = \alpha \Rightarrow \angle ABE = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что $\angle\beta = \angle AFE$ опирается на $\smile CE$

$\Rightarrow \angle\beta = 90 - \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \boxed{\sin\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}}$

$\frac{AE}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow \frac{AE\sqrt{34}}{5} = \frac{17\cdot 5}{3} \Rightarrow AE = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$\frac{AF}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow AF = \frac{5\sqrt{34}}{2}$

$EF = AF\cos\beta + AE\cos\alpha = \frac{5\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} + \frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}$

$EF = \frac{15}{2} + \frac{5^3}{6} = \frac{5\cdot 9 + 5\cdot 25}{6} = \frac{5\cdot 34}{6} = \frac{5\cdot 17}{3}$

$\Rightarrow EF = AB \Rightarrow \triangle AEF$ - прямоугольный,

т.к. ~~он~~ $\angle A$ опирается на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S_{AEF} = \frac{1}{2} AE\cdot AF = \frac{1}{2}\,\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{\sqrt{34}\cdot 5}{2} = \frac{2125}{12}}$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\sin\beta = \frac{5\sqrt{34}}{34}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

№5.

для выполнения $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ необходимо, чтобы $x \vdots y$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in P \\ y \in P \end{cases} \\ \begin{cases} x \in P \\ y \notin P \end{cases} \\ \begin{cases} x \notin P \\ y \in P \end{cases} \end{array}\right.$$

~~$y \in P$~~
~~$x \notin P$~~

1) $x \notin P$; $y \notin P$

x	y	возможное кол-во вариантов y для каждого x, чтобы $x/y \notin P$
4	4	14
6	6	14
8	8	13
9	9	14
10	10	14
12	12	12
14	14	14
15	15	14
16	16	12
18	18	13
20	20	12
21	21	14
22	22	14
24	24	11

$\Sigma = 185$

2) $x \in P$
$y \notin P$ Аналогично продлеваем с теми же цифрами, но теперь $x \in P \Rightarrow \Sigma = 126$

3) $x \notin P$
$y \in P$ $\Sigma = 126$

~~4) $y \in P$~~ Ответ: $126 \cdot 2 + 185 = 437$.

№5.

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$-8x^2-30x-17$ - парабола, $x_0 = -\frac{15}{8}$ ~~...~~
ветви вниз; граничные значения:

$y\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$

$y\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$

$\frac{12x+11}{4x+3}$ - гипербола, асимптоты:

$x = -\frac{4}{3}$; $y = 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чтобы условие выполнялось, прямая $y = ax + b$ должна проходить ниже точек $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ и $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и при этом не пересекать гиперболу.

Уравнение прямой, проходящей через эти точки: $y = -2x - \frac{1}{2}$

$\left(1 = +\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)$ проверим эту прямую
$\left(5 = +\frac{11}{2} - \frac{1}{2}\right)$ на расположение относит. гиперболы.

$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2}$

$12x + 11 = -8x^2 - 6x - 2x - \frac{3}{2}$

$24x + 22 = -16x^2 - 12x - 4x - 3$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)^2 = 0$

$x = -\frac{5}{4}$ видим, что эта прямая касается гиперболы =>

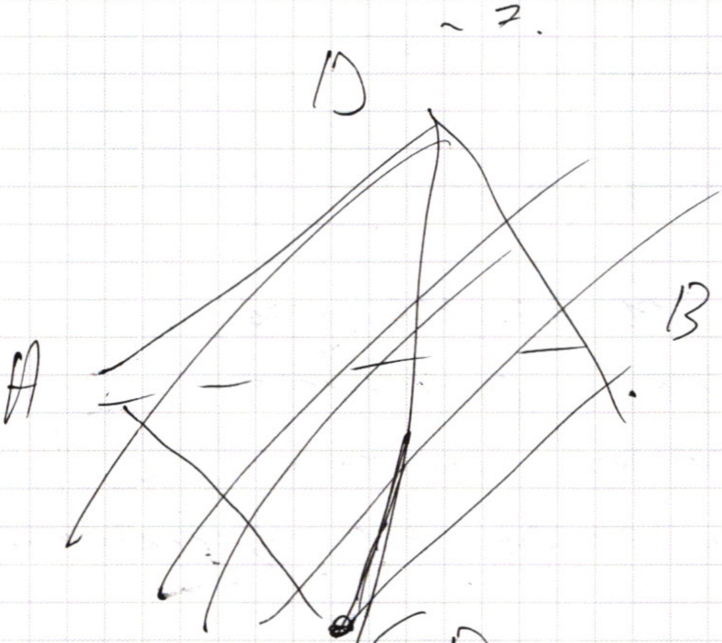
не может располагаться как-то иначе =>

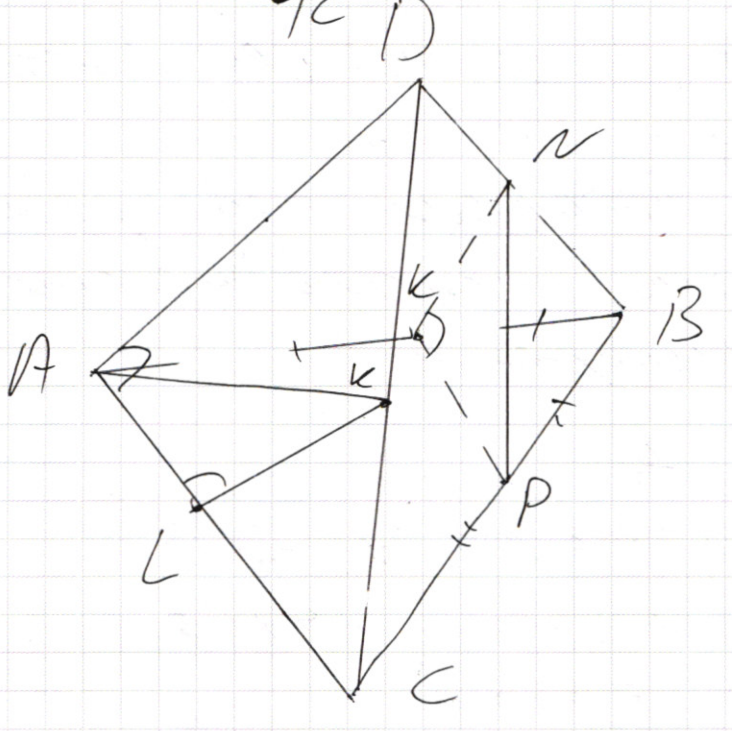
=> значение a и b – единственно и

$a = -2$; $b = -\frac{1}{2}$.

Ответ: $a = -2$; $b = -\frac{1}{2}$.

№7.





Заметим, что $LK \parallel KN$ (как ср. лин. они $\parallel AD$)

Также, $AL \parallel KP \Rightarrow (ALK) \parallel (KNP) \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ALK$ и $\triangle KNP$ вписаны в

равные окружности.

$\left.\begin{array}{l} LK \parallel KN \\ AL \parallel KP \end{array}\right| \Rightarrow \angle ALK = \angle NKP \Rightarrow AK = ND$

$NP = \frac{DC}{2} = AK \Rightarrow AK$ - медиана и $KK = \frac{DC}{2} \Rightarrow$

(из $(ADC) \parallel (KNP)$)

$\Rightarrow \angle DAC = 90^\circ = \angle NKP \Rightarrow ALK,$