МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg}\dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{(169x^2 - y^2)} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$$

1) $169x^2 - y^2 = (13x - y)(13x + y) \Rightarrow \cancel{13x+5}$

2) вычтем из 1-го ур-ия 2-ое и получим следующее следствие:

$13x - y = 216 = 6^3$

3) Преобразуем искомую систему: $\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{216(13x+y)} = 92 \\ y + \sqrt[3]{216(13x+y)} = -124 \end{cases}$

$(13x+y) + 12\sqrt[3]{13x+y} = -32$

Замена: $t = \sqrt[3]{13x+y} \Rightarrow t^3 + 12t + 32 = 0$

$\Rightarrow (t+2)(t^2 - 2t + 16) = 0$

$\cancel{D=0}$ $D<0$ $\Rightarrow$ корней нет $\Rightarrow \sqrt[3]{13x+y} = -2$

$\Rightarrow 13x + y = -8$

4) $\begin{cases} 13x + y = -8 \\ 13x - y = 216 \end{cases} \Rightarrow x = 8 \Rightarrow y = -104 - 8 = -112$

Ответ: $(8; -112)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$\cancel{8 \log_{3x^2}} \sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $\log_{3x^2} x^9 \ge 0$

$3x^2 \ne 1$

$9x^3 \ne 1$

$x > 0$

$\log_{3x^2} x^9 = 9 \log_{3x^2} x$; $\cancel{\log_9 x^3}$ $\log_{9x^3} \frac{1}{x^3} = -3 \log_{9x^3} x$

$\to 3\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -3 \log_{9x^3} x$, $\boxed{x=1}$ подходит, далее преобразуем:

$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3x^2}} \le \frac{-1}{\log_x 9x^3} \to \sqrt{\frac{1}{\log_x 3 + 2}} \le \frac{-1}{2\log_x 3 + 3}$, $\log_x 3 = t$

$\cancel{2\log_x 3 + 3 \ge 0}$ $\quad 2\log_x 3 + 3 < 0 \to \log_x 3 < -\frac{3}{2}$, теперь возведем в квадрат обе части:

$\frac{1}{t+2} \le \frac{+1}{4t^2+9+12t} \to \frac{\overbrace{t+2-4t^2-9-12t}^{= -4t^2-11t-7}}{(2t+3)^2(t+2)} \ge 0$

$\cancel{-4t^2-11t-7=}$ По методу интервалов найдем решения:

$-4t^2-11t-7=0$

$D = 121 - 28\cdot 4 = 9 \to t_{1,2} = \frac{11 \pm 3}{-8} = -1; -\frac{14}{8} \to t_{1,2} = -1; -\frac{7}{4}$

$\frac{-4(t+1)(t+\frac{7}{4})}{(2t+3)^2(t+2)} \ge 0$ $\quad$ $+ \; -2 \; - \; -\frac{7}{4} \; + \; -1 \; -$ $\quad t$ $\quad \to t \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{7}{4}; -1)$

Не влияет на знак

Запишем теперь с условием на возв. в кв.: $\begin{cases} t \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \\ t \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{7}{4}; -1) \end{cases}$

$\to t \in (-\infty; -2)$

$\to \log_x 3 < -2 \to \frac{1}{\log_3 x} + 2 < 0 \to \frac{1 + 2\log_3 x}{\log_3 x} < 0$

По методу интервалов: $\log_3 x \in (-\frac{1}{2}; 0) \to x \in (\frac{1}{\sqrt{3}}; 1)$

см. стр 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

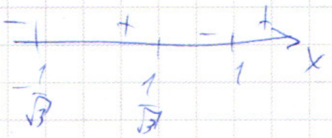
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолжение:

рационализация

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right) \\ ОДЗ: \ \log_{3x^2} x^9 \geq 0 \to \log_{3x^2} x \geq 0 \to (x-1)(3x^2-1) \geq 0 \end{cases}$$



$\to x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup [1; +\infty)$

$\Rightarrow x$ не имеет пересечений с ОДЗ.

$\Rightarrow x = 1$ и больше нет корней.

Ответ: 1

N 3

Пусть число — $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, остатки — r_1, r_2, r_3

Тогда остаток от деления на $10^k = \overline{a_{8-k}a_{9-k}a_{10-k}\ldots}$

$\Rightarrow$ переберем возможные степени 10, отталкиваясь от суммы остатков: 1) $10^1, 10^2, 10^3$ — не может быть, ведь тогда $r_1+r_2+r_3 \leq 999+99+9$

2) $10^4, 10^3, 10^2$ — аналогично не может, ведь $r_1+r_2+r_3 \leq 9999+999+99+9 < 12828$

3) $10^5, 10^4, 10^3$ — может быть

4) $10^6, 10^5, 10^4$ — может быть, но тогда $a_2, a_3 = 0$, иначе $r_1+r_2+r_3 > 12828$

5) $10^7, 10^6, 10^5$ и бо́льшие степени — не подходят, ведь $a_1 \neq 0 \Rightarrow r_1+r_2+r_3 > 12828$

I) Итак первый случай: $10^5, 10^6, 10^4$:

$\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} = 12828$

$\Rightarrow 3\overline{a_4a_5a_6a_7} = 12828 \Rightarrow \overline{a_4a_5a_6a_7} = 4276$

$\Rightarrow a_1 = 1, 2, \ldots, 9 \Rightarrow$ 9 таких чисел.

II) Второй случай: $10^5, 10^4, 10^3$: $\overline{a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7}$

$a_3 < 2$, иначе больше $12828 \Rightarrow a_3 = 1, 0$.

1) $a_3 = 0$: $2\overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} = 12828$;

$2\overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + 2000a_4 = 12828 \Rightarrow 3\overline{a_5a_6a_7} + 2000a_4 = 12828$

Заметим, что $12828 ⋮ 3$; $3\overline{a_5a_6a_7} ⋮ 3 \Rightarrow a_4 ⋮ 3 \Rightarrow a_4 = 3; 6; 9$ — точно не подходит

$a_4 = 3$: $3\overline{a_5a_6a_7} = 6828$ — не может быть, ведь $3\overline{a_5a_6a_7} \leq 3 \cdot 999$

$a_4 = 6$: $3\overline{a_5a_6a_7} = 828 \Rightarrow \overline{a_5a_6a_7} = 276$

— таких чисел будет столько: $\underbrace{\overline{a_1a_2}}_{9 \cdot 10}\underbrace{a_3a_4a_5a_6a_7}_{0\ 6\ 276}$ = 90 комбинаций a_1 и a_2

заданы однозначно

$\Rightarrow$ 90 чисел

2) $a_3 = 1$:

$10000 + 2\overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} = 12828$

$2\overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} = 2828$ — $a_4 = 0, 1$; иначе $2\overline{a_4a_5a_6a_7} \geq 4000$

$a_4 = 0$: $3\overline{a_5a_6a_7} = 2828 \Rightarrow \overline{a_5a_6a_7} = \frac{2828}{3}$ — не целое число

$\Rightarrow$ не подходит

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение №3!

$a_4 = 1$! $2000 + 3\overline{a_5a_6a_7} = 2828 \to 3\overline{a_5a_6a_7} = 828 \to \overline{a_5a_6a_7} = 276$

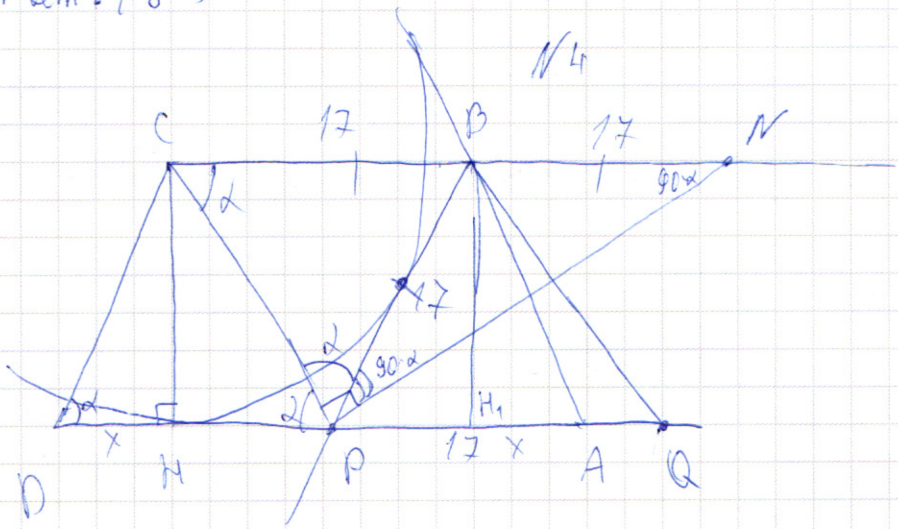
Итак: $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \to \overline{a_1a_2\,11276} \to$ 90 чисел

$\underbrace{a_1a_2}_{\text{90 комбинаций}}$

Итого: $9 + 90 + 90 = 189$ различных чисел

Ответ: 189

№4



1) $CH = R$ – радиус ω; $\angle NCP = \alpha$, $tg\alpha = \frac{15}{8}$;

т.к. C – центр, то PC – биссектриса угла DPB $\to \angle DPC = \angle CPB = \alpha$

$\to \triangle CPB$ – р-б. $\to CB = BP \to \triangle PBN$ также р-б $\to BP = BN$

$\to BP$ – медиана прямоугол $\triangle \to BP = \frac{1}{2}CN = 17$

2) ~~$\angle ADC = CH$~~ ~~$tg\angle ADC = \frac{CH}{DH}$~~ пусть $DH = x$, тогда $DH = AH_1 = x$

$AP = x + PH_1 = 17$ и $H_1H = 17 \to HP = x \to CH$ – высота и медиана

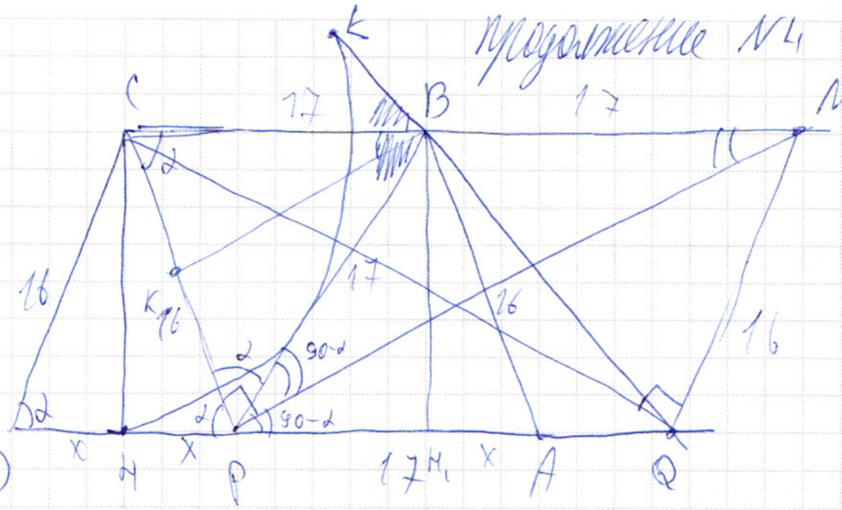
$\to \triangle CDP$ – р-б $\to \angle CDA = \angle CPD = \alpha$

3) $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{15}{8}$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \to \sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\cos\alpha = \frac{8}{17}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Продолжение N4



Опустим $BK \perp CP$:

$BK = h$

~~CK~~ $\sin\alpha = \frac{15}{17} = \frac{h}{17}$

$\rightarrow h = 15$

$\rightarrow CK = 8$

$\rightarrow CP = 16 = CD$

BCPA – параллелограмм $\rightarrow BA = CP = 16$

$\sin\alpha = \frac{CH}{CP} = \frac{15}{17} \rightarrow CH = \frac{15\cdot 16}{17}$

4) Пусть QB касается ω в т. L $\rightarrow \angle CBP = \angle CBL = 180 - 2\alpha$

$\Rightarrow \angle PBL = 360 - 4\alpha \rightarrow \angle PBQ = 4\alpha - 180^\circ$

$\rightarrow \angle BQD = 180 - (180 - 2\alpha) - (4\alpha - 180) = 2\alpha - 4\alpha + 180^\circ = 180 - 2\alpha$

$\rightarrow \triangle PBQ$ – р/б $\rightarrow BP = BQ = 17 \rightarrow \triangle CQN$ – прямоугол – ведь медиана $QB = \frac{1}{2} CN = 17$

$\Rightarrow \angle CQN = 90^\circ$

5) CNQP – вписанный четырехугольник (ведь $\angle CPN = \angle CQN$), а точнее трапеция

$\Rightarrow$ равнобокая $\rightarrow NQ = 16$, также $\angle DQN = 180 - \alpha \rightarrow QN \parallel DC$

$\rightarrow$ NCDQ – параллелограмм

$\rightarrow S_{NCDQ} = CH\cdot CN = \frac{15\cdot 16}{\cancel{17}}\cdot \cancel{17}\cdot 2 = 32\cdot 15 = 480$

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{15}{8}$; $\angle NQC = 90^\circ$; $S_{NCDQ} = 480$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \Big| \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$$

$$\to \sqrt{3}\cos(x-y) + \underbrace{\frac{1}{2}\cos(2x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y)}_{\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x-y\right)} = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$$

$$-\sqrt{3}\cos(x-y) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+2x-y\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$$

$$-\sqrt{3}\cos(x-y) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos(x-y) \quad \Big| \quad \cos(x-y)\neq 0 - \text{поделим}$$

$$\to \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$x+\frac{\pi}{6}$ $\to x$

$x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $x = -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

1) Обратимся ко второму ур-ию: $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x+(x-y)\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\to \overbrace{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x-y)\right)}^{\frac{7}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin(x-y) = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \pm\frac{1}{2} \to \cancel{\sin(x-y) = 12\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)+}$$

$$\to \pm\frac{1}{2}\sin(x-y) = 2{,}5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) \Rightarrow \sin(x-y) = \pm 5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$$

$$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} = \frac{\pm 5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)}{\cos x\cos y}$$

2) $\sin x = -\frac{1}{2}$ или -1

для „−" $5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$; для „+" $5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$

$$\sqrt{3}\cos x\cos y = -7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - \underbrace{\sqrt{3}\sin x\sin y}_{-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y \text{ или } -\sin y} = \left[\begin{array}{l} -7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y \\ \text{или} \\ +\sin y \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$tg\,x - tg\,y$

$\frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y}$

$\frac{5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)}{\cos x\cos y}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x-y\right)$

$\sqrt{3}\cos(x-y)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x-y\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos(x-y) = -\sqrt{3}\,\cancel{\cos x-y}$

$-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x =$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x+(x-y)\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$\pi+\frac{\pi}{3}$

$x = -$

$-\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi-\pi}{6}$

$x+\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x-y)+\frac{1}{2}\sin(x-y) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{+7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)}{2}+\frac{1}{2}\sin(x-y) = 6-\frac{7}{2} = \frac{5}{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin(x-y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$

$\cos(x-y)+\sin x\sin y \qquad \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$

$-\frac{7}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)+\sin x\sin y$

$\cos x\cos y = \frac{-7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - \sin x\sin y}{\sqrt{3}}$

$\sin x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 продолжение

$\rightarrow \cancel{\cos x \cos y = 2 - 7\sqrt{3}}$

$-7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) = \cancel{\frac{7}{2}\sin}\ -\frac{7}{2}\cos y - \frac{7\sqrt{3}}{2}\sin y$

$\cancel{x = \frac{\pi}{2}} \rightarrow \sqrt{3}\cos x\cos y = -\frac{7}{2}\cos y - 3\sin y$ или $-\frac{7}{2}\cos y + \left(\frac{2-7\sqrt{3}}{2}\right)\sin y$

$\rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x\cos y = -\frac{7}{2\sqrt{3}}\cos y - \sqrt{3}\sin y \quad - \text{для } \left(-5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\right) \\ \cos x\cos y = -\frac{7}{2\sqrt{3}}\cos y + \frac{(2-7\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}\sin y \quad - \text{для „+"} \end{array}\right.$

$\rightarrow \operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \dfrac{-5\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cdot 2\sqrt{3}}{-7\cos y + (2-7\sqrt{3})\sin y}$

№ 6

1) $\dfrac{2x+26}{2x+3} = \cancel{3}\dfrac{6(2x+3)+8}{2x+3} = 6 + \dfrac{8}{2x+3}$

$ax+b \geq 6 + \dfrac{8}{2x+3} \rightarrow$ ~~$ax+b$ должно быть $\geq$ максимума~~ $6+\dfrac{8}{2x+3}$

$\forall x$

гипербола, убывающая $\cancel{\forall} x \in \left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Максимум для $6+\dfrac{8}{2x+3}$ достигается при минимальном $\left|\dfrac{8}{2x+3}\right|$

$\rightarrow x = -\dfrac{19}{2} \rightarrow \cancel{ax+b \geq} \dfrac{61}{\cancel{2}}$

2) $ax+b \leq 1 + \sqrt{-x^2-13x-\frac{33}{4}}$

параболa ветвями вниз

№6 продолжение:

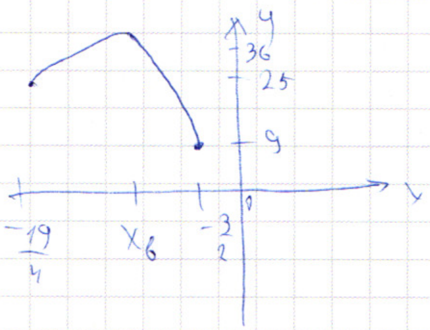
Исследуем $f(x)=-x^2-13x-\frac{33}{4}$

1) $f\left(-\frac{3}{2}\right): -\frac{9}{4}+\frac{39}{2}-\frac{33}{4}=\frac{69}{4}-\frac{33}{4}=\frac{36}{4}=9$

2) $f\left(-\frac{19}{2}\right)=25$

3) $f(x_в)=f\left(-\frac{13}{2}\right)=36$

$\Rightarrow$

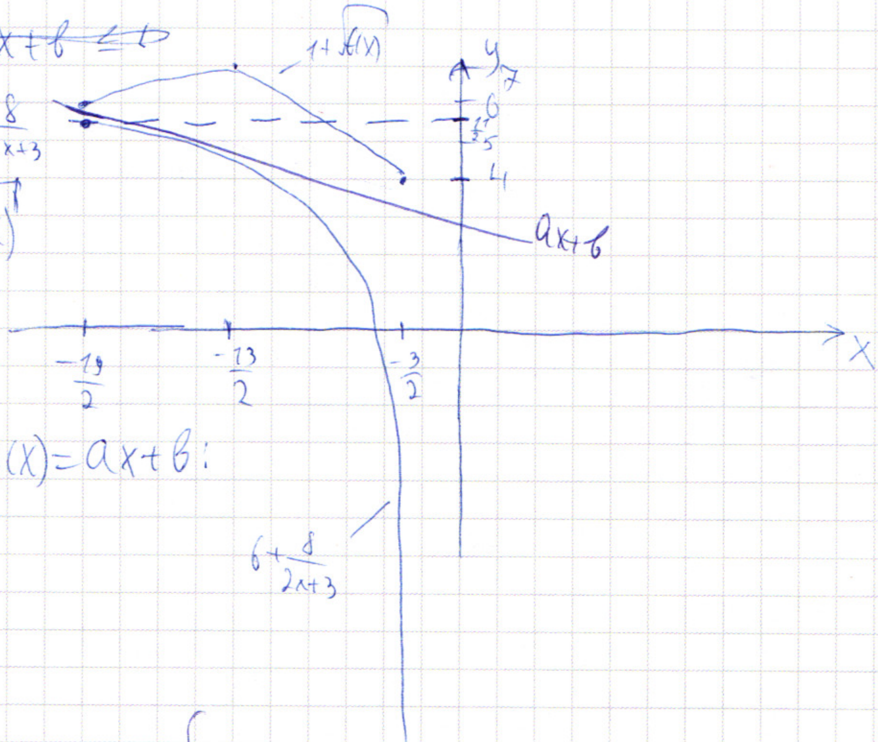


$\rightarrow$ ~~$ax+b \leq$ минимум $\left(1+\sqrt{-x^2-13x-\frac{33}{4}}\right)$ иначе в точке минимума не выполняется нер-во~~

$\Rightarrow ax+b \leq 1+\sqrt{9}=4$

~~3) Итого: $ax+b \leq 1$~~

$$\begin{cases} ax+b \geq \cancel{\frac{11}{2}}\ 6+\frac{8}{2x+3} \\ ax+b \leq 1+\sqrt{f(x)} \end{cases}$$



Условия для прямой $g(x)=ax+b$:

$$\begin{cases} g\left(-\frac{19}{2}\right) \leq 6 \\ g\left(-\frac{19}{2}\right) \geq \frac{11}{2} \\ g\left(-\frac{3}{2}\right) \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{19}{2}a+b \leq 6 \\ -\frac{19}{2}a+b \geq \frac{11}{2} \\ -\frac{3}{2}a+b \leq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{19a}{2}+b=6 \\ -\frac{3}{2}a+b=4 \end{cases}$$ — наивысшая прямая $\rightarrow \left(-\frac{1}{4}; \frac{29}{8}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$ $\quad \frac{1}{\log_{x^9} 3x^2}$ $\quad$ ОДЗ: $3x^2 > 0 \to x \ne 0$, $3x^2 \ne 1 \to x^2 \ne \frac{1}{3}$

$x^9 > 0 \to x > 0$

$\sqrt{9 \log_{3x^2} x} \le -3 \log_{9x^3} x$ $\quad 9x^3 > 0$ $\quad x^3 \ne \frac{1}{9}$

$\log_{3x^2} x^9 \ge 0$

$\sqrt{\log_{3x^2} x} \le -\log_{9x^3} x = \frac{1}{\log_x 9x^3}$ $\quad \log_x 9 + \log_x x^3 = $ $= \log_x 9 + 3$

$\frac{1}{\log_x 3x^2} = \frac{1}{2 + \log_x 3}$ $\quad \log_{9x^3} x \le 0$ $\quad (x-1)$ $\quad 3+2$

$2\log_x 3 + 3 \le 0$

$\log_3 1 \ge 0$

$\sqrt{\frac{1}{2+\log_x 3}} \le \frac{-1}{3 + 2\log_x 3} \to \sqrt{\frac{1}{2+t}} \le \frac{-1}{3+2t} \ge 0$

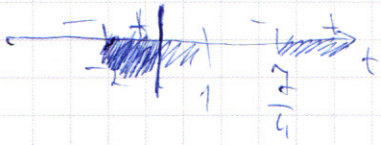
$\log_9 1 \ge 0$

$3 + 2t < 0 \to t < -\frac{3}{2}$ $\quad \frac{1}{\log_x 9 + 3} \le 0$ $\quad \begin{array}{r} \overset{4}{16} \\ \times\ 7 \\ \hline 112 \end{array}$

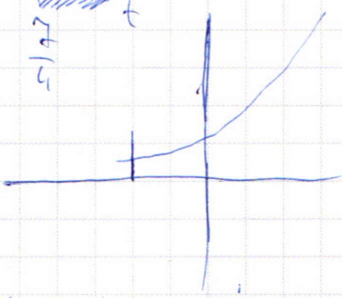
$\frac{1}{2+t} \le \frac{1}{9+4t^2+12t} \to \frac{1}{9+4t^2+12t} - \frac{1}{2+t} \ge 0$

$\frac{2+t-9-4t^2-12t}{(9+4t^2+12t)(2+t)} \ge 0$ $\quad -4t^2 - 11t - 7$

$D = 121 - 112 = 9$



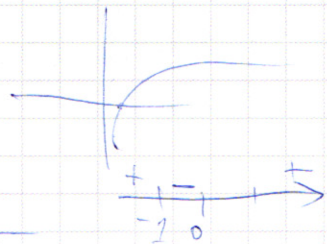
$t = \frac{11 \pm 3}{8} = \frac{7}{4}$ и 1



$9 + 4t^2 + 12t \le 2 + t$

$4t^2 + 11t + 7 = 0$ $\quad \frac{4(t-\frac{7}{4})(t-1)}{\cancel{(2t+3)^2}(2+t)} \ge 0$

$t = \frac{-11 \pm 3}{8} = -1$ и $-\frac{14}{8}$



$\log_{3x^2} x = \frac{1}{\log_x 3x^2} = \sqrt{\frac{1}{2+\log_x 3}} \ge \frac{-1}{2\log_x 3 + 3}$ $\quad \frac{1}{x^2} = 3$

$t \in [-2; -\frac{3}{2}]$ $\quad \log_x 3 > -2$ $\quad \frac{1}{\log_3 x} > -2 \to$ $\quad \frac{1}{x^2} < a$ $\quad \log_3 x > 0$

$\log_3 x > 0$ $\quad x > 1$ $\quad x^\alpha = 3$ $\quad x^{-2} \ge 3$ $\quad x > 1$

$\frac{1}{\log_3 x} + 2 > 0$ $\quad \alpha > -2$ $\quad \frac{\log_3 x = -\frac{1}{2}}{0} > 0$

$\frac{1 + 2\log_3 x}{\log_3 x} > 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 13x+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=92 \\ y+\sqrt[3]{169x^2-y^2} \end{cases}$$

$(13x-y)(13x+y)$

$$\begin{cases} 13x+\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=92 \\ y+\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=-124 \end{cases}$$

$13x-y=92+124$

$13x-y=216=6^3$

$124+92=216$, $124-92=32$

$$\begin{cases} 13x+6\sqrt[3]{(13x+y)}=92 \\ y+6\sqrt[3]{13x+y}=-124 \end{cases}$$

$(13x+y)+12\sqrt[3]{13x+y}=-32$

$-8-24$

$\sqrt[3]{13x+y}=t$

$t^3+12t+32=0$

$(t+2)(t^2-2t+16)=0$ $\quad \frac{2}{2}=1$

$D/4=1-$

$1-2+16$

$t^3+12t+32 \mid t+2$; t^3+2t^2; $-2t^2+12t$; $-2t^2-4t$; $16t+32$; $16t+32$; 0; $t^2-2t+16$

$\frac{1}{\log_3 x}<-2$

$\frac{1+2\log_3 x}{\log_3 x}<0$

$\log_x 3<-2$

$+ \quad - \quad +$; $-\frac{1}{2}$; 0

$\sqrt[3]{13x+y}=-2$

$$\begin{cases} 13x+y=-8 \\ 13x-y=216 \end{cases}$$

$26x=208$

$208 : 26 = 8$; $13\cdot 8=104$

$x=8$

$\Rightarrow y=-112$

$104+\sqrt[3]{8}-2\cdot 6=92$

$-112-12$

Ответ: $(8;-112)$

$t^3-2t^2+16t+2t^2-4t+32$

t^3+12t

$x\geq\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad x<1$

$-\frac{1}{2}\leq\log_3 x<0$

$-\frac{1}{2}$

$x\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}};1\right)$

$\sqrt{\log_{3x^2}x^9}\leq\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $\log_{3x^2}x^9\geq 0$

$x^9>0$; $3x^2\neq 1$

$9x^3\neq 1$

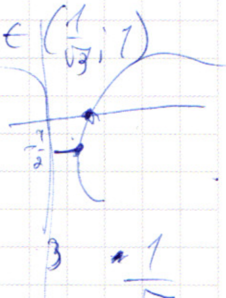
$\frac{1}{9}=-$

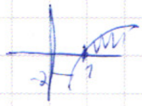
$\frac{-1}{\log_{x^3}9x^3}=\frac{-1}{1+\log_{x^3}9}$

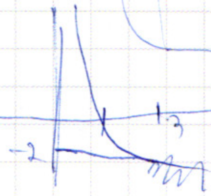
27

$-\frac{1}{2}$

3 $\quad \frac{1}{\sqrt{3}}$





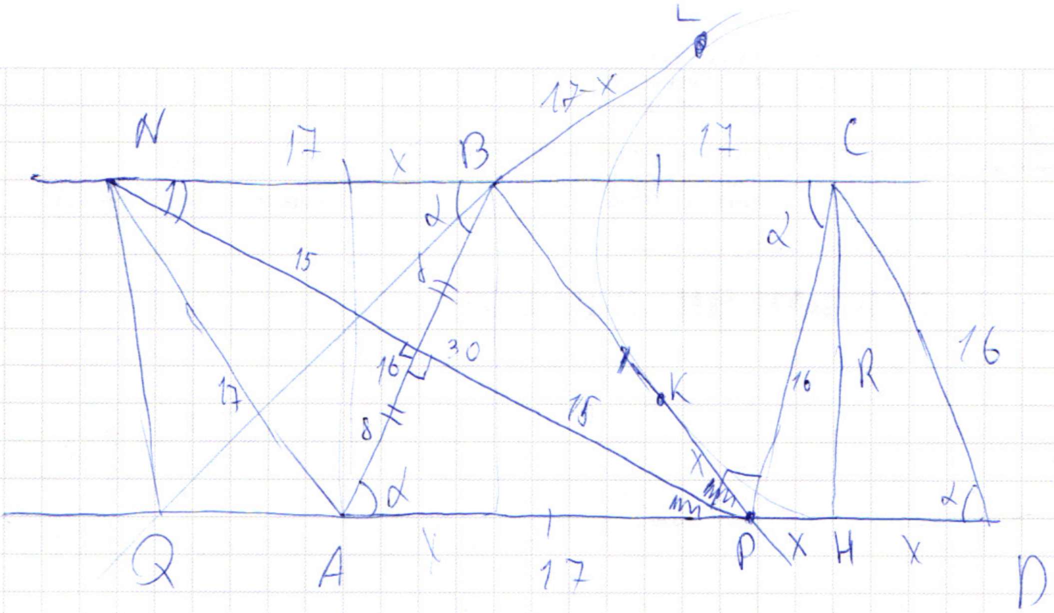


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\sin\alpha = \frac{15}{17}$

$\cos\alpha = \frac{8}{17}$

$\frac{k}{34} = \frac{15}{17}$

$k = 30$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y$

$\frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y}$

$\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$

$\frac{1}{2}\cos(2x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y)$

$\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\left((2x-y)+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) =$

$= -\frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$

$\sqrt{3}\cos(x-y) -$

$\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi-4\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$ $\quad \frac{\pi}{2}+\alpha$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) \\ \sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\sqrt{3}\cos(x-y) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - \sin$

$\cancel{\frac{\pi}{6}} + y - 2x + y - \cancel{\frac{\pi}{6}} = y - x$

$-\sqrt{3}\,\cancel{\cos(x-y)} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cancel{\cos(y-x)}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\pi}{6}+x$ $\quad 0 - \sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ \frac{1}{2}\cos y + \sin y\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$

$1 \quad -\frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{2-7\sqrt{3}}{2}\sin y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ $x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

$\log_{3x^2} x \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2-1) \geq 0$ $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

$a_3 = 14$

+ + − + ; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, 1

11 7
16 17

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$

$\cancel{r_1+r_2+r_3 \vdots}$

$r_1+r_2+r_3 = 12828$

1) $10^4, 10^5, 10^6$

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$

$a_2=0,\ a_3=0$

$3\overline{a_4a_5a_6a_7} = 12828$

$\overline{a_4a_5a_6a_7} = 4276$

таких чисел 9

2) $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, $10^3, 10^4, 10^5$: $\overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7}$

$\cancel{a_3 \neq}$ $a_3 = 1, 0$

1) $a_3=0$: $\overline{a_5a_6a_7} + 2\overline{a_4a_5a_6a_7} = 12828$

$2000a_4 + \cancel{20}\ 3\overline{a_5a_6a_7} = 12828$

$a_4 \vdots 3$ 1) $a_4=3$: $3\overline{a_5a_6a_7} = 6828$ ~~3) $a_4=9$~~

2) $a_4=6$: $3\overline{a_5a_6a_7} = 828$

$a_4 = 3, 6, 9$

12828 | 3 → 4276

$\cancel{r_1+r_2+r_3 = 12828 \vdots 3}$

1,2,3: $a_7 + \overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} = 12$

2,3,4: $\overline{a_6a_7} + \cancel{a_{56}+6} + a_5 + a_6 + 6$

$\overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7}$

3,4,5! — OK

$\overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7}$

4,5,6 — OK

$\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7}$

2828 | 3 → 942

$4276 \cdot 9 = 38484$

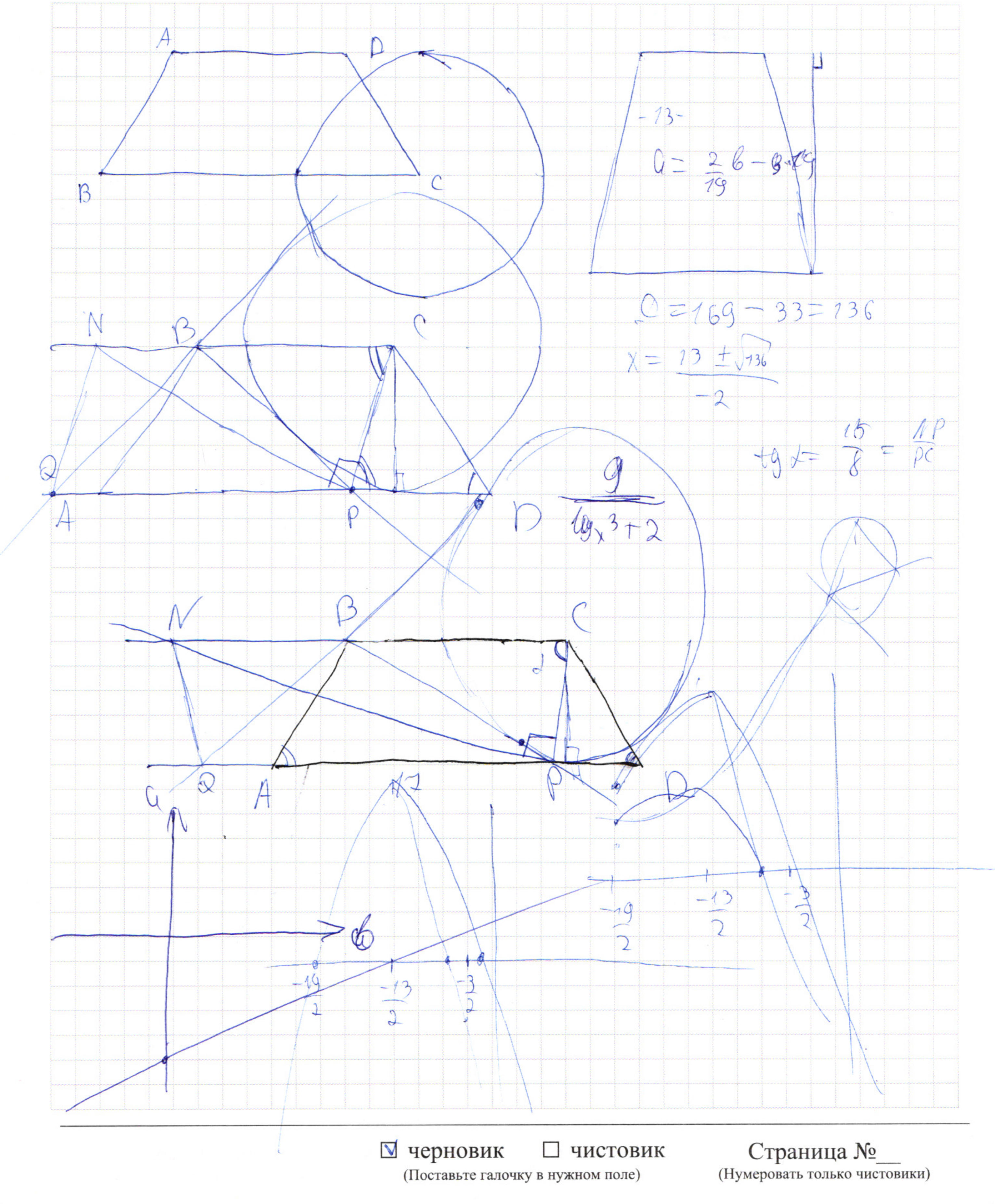
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

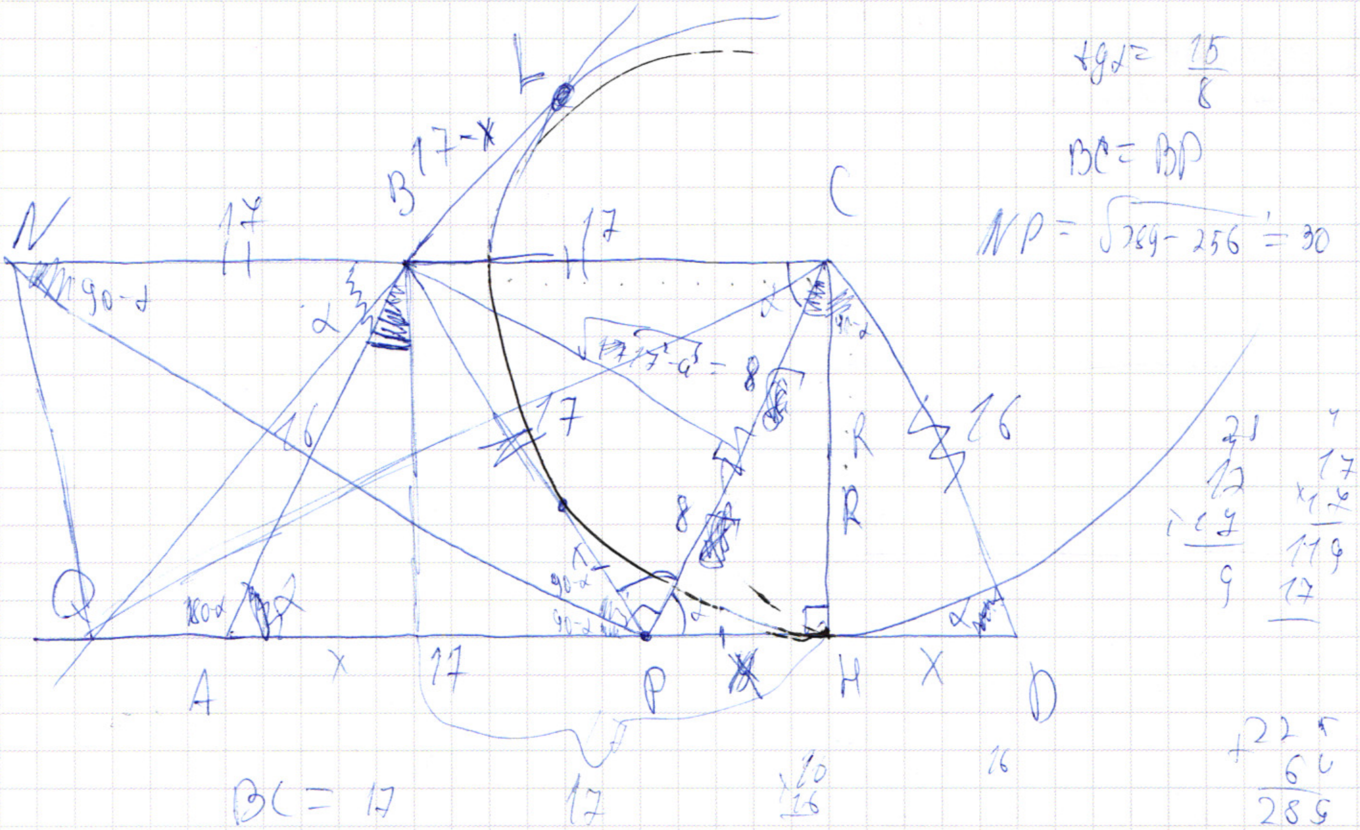


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$tg\,\alpha = \frac{15}{8}$

$BC = BP$

$NP = \sqrt{289-256} = 30$

$BC = 17$

$\sqrt{17^2}$ $\qquad \frac{\sqrt{289-a^2}}{a} = \frac{15}{8}$ $\qquad 15a = 8\sqrt{289-a^2}$

$\sqrt{28}$ $\qquad a = 8$ $\qquad 4^4 = 2^8$ $\qquad 225a^2 = (8\cdot 17)^2 - 64a^2$

$289a^2 = (8\cdot 17)^2$

$17a^2 = 8\cdot 17 \to a^2 = 8$

$a = \sqrt{8}$

$x = \sqrt{256-R^2}$

$\frac{R}{\sqrt{256-R^2}} = \frac{15}{8}$ $\qquad 8R = 15\sqrt{\ }$

$64R^2 = (15\cdot 16)^2 - 225R^2$ $\qquad R = \frac{15\cdot 16}{17}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{8}{17}$

$289R^2 \to 17R = 15\cdot 16$ $\qquad \sin\alpha = \frac{15}{17}$

$\frac{15x}{8y}$ $\qquad \frac{x}{y} = \frac{15}{8}$ $\qquad 8x = 15y$ $\qquad x = \frac{15y}{8}$

$x^2 + y^2 = 1$ $\qquad \frac{225y^2}{64} + y^2 = 1 \to \frac{289y^2}{64} = 1$ $\qquad 32\cdot 15 = 160 + 32 = 480$

34×34 $\qquad 34^2 - 16^2 = 18\cdot 50 = 900$ $\qquad 289y^2 = 64$

$\frac{R}{16} = \frac{15}{17}$ $\qquad \frac{x}{16} = \frac{8}{17}$ $\qquad 32\times 15 = 160,\ 32,\ 480$ $\qquad y = \frac{8}{17}$

$x = \frac{8\cdot 16}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+26}{2x+3} \le ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$

$x \in \left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right]$

$\frac{2(6x+13)}{2x+3}$ $\quad 12x+18$ $= \frac{6(2x+3)+8}{2x+3} = 6+\frac{8}{2x+3}$

$-4x^2-52x-33$

$D/4 = 26^2 - 33\cdot 4$

$26 \cdot 26 = 676$, $676-132=544$

$19\cdot 13 = 57$

$\frac{13}{-2} = -\frac{13}{2}$

$-\frac{33}{4}+\frac{169}{2}-\frac{169}{4} = -\frac{33}{4}+\frac{169}{4} = \frac{136}{4} = 36$

$-19+3=-16$

$6+-\frac{1}{2}=$

$-\frac{19}{2}$

$-\frac{33}{4}+\frac{13\cdot 19}{2}-\frac{361}{4} = \frac{100}{4} = 25$

$-\frac{33}{4}+\frac{13}{2}-\frac{9}{4} = \frac{17}{4}-\frac{33}{4}$

$\sqrt{f(x)}$

$19\cdot 19 = 361$; $13\cdot 19 = 247$; $247\cdot 2 = 494$, $494-361 = 133$

$33\cdot 4 = 132$; $24\cdot 24$; $22\cdot 22 = 484$

$136 : 4 = 34$

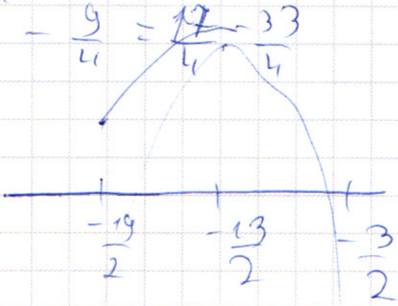
$\frac{11}{2}$

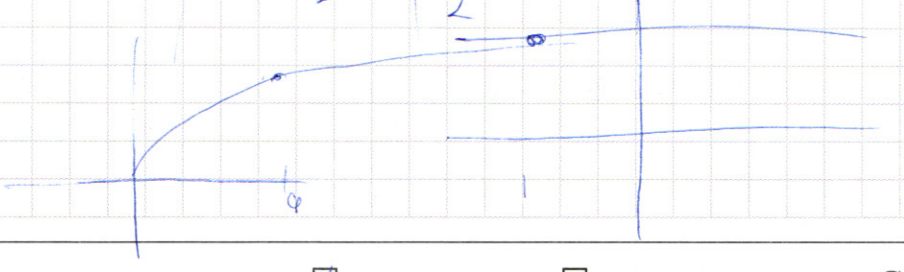
$ax+b \le 1$

$ax+b \ge \frac{11}{2}$

$\frac{36}{4}=9$

-78, 9, $\frac{69}{4}$



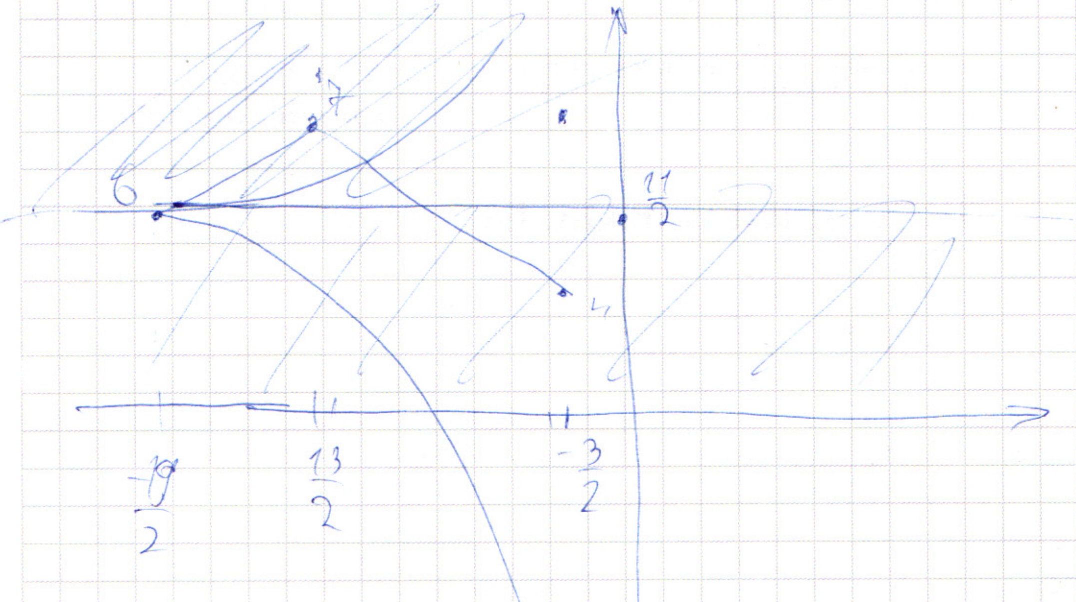


☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$19 \times 19 = 361$

$19 \cdot 13 = 247$

$247 + 247 = 494$

$-\frac{33}{4} - \frac{361}{4} = -\frac{394}{4} + 49 = 25$

$-\frac{33}{4} + \frac{39}{2} - \frac{9}{4} = -\frac{42}{4} + 39 = -\frac{3}{4} + 39$

K $\quad -16$

$24x + 36 - 24x - 52$

$-\left(\frac{4}{(2x+3)}\right)^2$

$\frac{26}{3}$

$12(2x+3) - (12x+26) \cdot 2 = 24x + 36 - 24x - 52 = -$

$\frac{12x+26}{2x+3} \qquad = \frac{-16}{(2x+3)^2} \qquad a < \frac{16}{(2x+3)^2}$

$4 - 8a = \frac{11}{2}$

$g'(x) = a \qquad |a| \qquad a > \frac{-16}{(2x+3)^2}$

$8a = 4 - \frac{11}{2} = -\frac{3}{2}$

$a = \frac{-3}{16}$

$-\frac{19}{2}a + b = 6 \qquad -\frac{19}{2}a + b = \frac{11}{2}$

$-\frac{3}{2}a + b = 4 \qquad -\frac{3}{2}a + b = 4$

$-8a = 2 \qquad b = 4 + \frac{3}{2}a \qquad b = 4 + \frac{3}{2}a$

$4 - \frac{3}{8} = 3$

$-8a + 4 = 6 \qquad -8a = 2 \qquad b = 4 - \frac{3}{8} = \frac{29}{8}$

$a = -\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)