МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x>0$ (т.к $\log_a(b)$ - определён при $b>0; a>0; a\neq 1$)

$x^2+6x=t$, $t>0$

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}$

~~т.к. $t>0$ => поделим уравнение неравенство на $t^{\log_4 4}$~~

$\cancel{t^{\log_4 3-\log_4 4}+t^{1-\log_4 4} \geq t^{\log_4 5-\log_4 4}}$

$\cancel{t^{\log_4 \frac{3}{5}}+t^{\log_4 \frac{4}{5}} \geq 1}$

$\cancel{t^{\log_4 \frac{3}{4}}+1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}}$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$.

$\log_4 t=a$

$3^a+4^a \geq 5^a$

$5^a-4^a-3^a \leq 0$ => $1-\left(\frac{4}{5}\right)^a-\left(\frac{3}{5}\right)^a \leq 0$ $(5^a>0)$

$\cancel{f(a)=5^a-4^a-3^a}$

$\cancel{f'(a)=5^a\ln 5-4^a\ln 4-3^a\ln 3}$

$f(a)=1-\left(\frac{4}{5}\right)^a-\left(\frac{3}{5}\right)^a$

$f'(a)=-\left(\frac{4}{5}\right)^a\ln\frac{4}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^a\ln\frac{3}{5}=\left(\frac{4}{5}\right)^a\ln\frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}\right)^a\ln\frac{5}{3}>0$ при любом a =>

$f(a)\uparrow$ ~~при любом~~

при $a=2$, $f(a)=0$ (подбор) =>

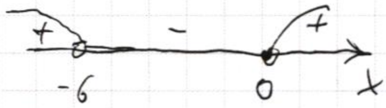
при $a\leq 2$, $f(a)\leq 0$ => $\log_4 t \leq 2$ => $t\leq 16$ => $t\in(0;16]$
$(t>0)$

№3 продолжение.

$$\begin{cases} x^2+6x>0 & (1) \\ x^2+6x\le 16 & (2) \end{cases}$$

1. $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

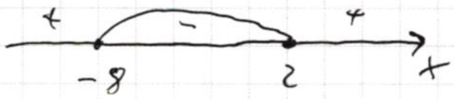


$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

2. $x^2+6x\le 16$

$x^2+6x-16\le 0$

$(x+8)(x-2)\le 0$



$x\in[-8;2]$

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$~~

~~1. пусть $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$~~

~~$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta)+\frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$~~

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad (2\beta=\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n,\ n\in Z)$

1. пусть $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\cos 2\beta=\cos(2\alpha+2\beta) \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ll} 2\alpha+2\beta+2\pi n=2\beta+2\pi k & n\in Z;\ k\in Z \\ 2\alpha+2\beta+2\pi m=-2\beta+2\pi l & m\in Z;\ l\in Z \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 продолжение

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha = 2\pi(k-n) \\ &2\alpha + 4\beta = 2\pi(l-m) \end{aligned}\right.$$

$\alpha = \pi(k-n)$ – не подходит т.к $tg\alpha$ – существует при $\alpha \neq \pi n, n \in Z$.

$\alpha = -2\beta + \pi(l-m)$ – IV или II четверти $\Rightarrow tg\alpha < 0$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin(2\beta + \pi(l-m))}{\cos(2\beta + \pi(l-m))} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$$

~~$tg\alpha = \frac{1}{4}$~~ или $tg\alpha = -\frac{1}{4}$.

2. пусть $\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

2.1 пусть $\sin 2\beta > 0$

$-\frac{4}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0$

$\cos\alpha = 0$ – не подходит ; $\sin\alpha = 0$

2.2. пусть $\sin 2\beta < 0$

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

~~$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\arccos\frac{8}{17} + \pi n$~~ ~~$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arccos\frac{8}{17} + \pi k$~~.

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{4}{17} \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}};\ \cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{17}} \\ &\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}};\ \cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ &\sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}};\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ &\sin\alpha = \frac{-4}{\sqrt{17}};\ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} &tg\alpha = -\frac{1}{4} \\ &tg\alpha = -4. \end{aligned}\right.$

~~$\Rightarrow tg\alpha =$~~

Ответ: $-\frac{1}{4}; 0; -4$

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

1. $ax+b \leq \frac{4x-3}{2x-2}$

$ax+b \leq 2 + \frac{1}{2x-2}$

~~P=1 $ax+b = 2+\frac{1}{2x-2}$~~

~~$ax+b$~~

2. $ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$0 \geq 8x^2-(34+a)x+30-b$

$f(x)=8x^2-34x+30$

$f(1)=4$

$f(2)=-6$

$f(3)=0$

$f'(x)=16x-34$

$f'(x)=0 \Rightarrow x_0=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8} \Rightarrow$

$[1;3]$ $f(x) \leq 6-2x.$

$ax+b \geq 6-2x$ т.к точки при $x=1$ и $x=3$ для $f(x)$ и $6-2x$ - совпадают

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.\ 3y-2x\geq 0 \\ 2.\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3.\ 3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=8\frac{1}{3} \end{cases}$$

3) $(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

1) $y\geq\frac{2}{3}x$

2) $3y=a$; $2x=b$

$a^2-2ab+b^2=\frac{ab}{2}-a-b+2$

$2a^2-4ab+2b^2=ab-2a-2b+4$

$2a^2-5ab+2b^2=-2a-2b+4$

$5a^2-10ab+5b^2-b^2-a^2+4a+4b=8.$

$5(a-b)^2-b^2+4b-4-a^2+4a-4=0$

$5(a-b)^2-(b-2)^2-(a-2)^2=0$

~~$a=b$; $b=2$; $a=b=2$~~

$(b-2)^2+(a-2)^2=5(a-b)^2$

$(2x-2)^2+(3y-2)^2=5(3y-2x)^2=C.$ $(C\geq 0)$

$(2x-2)^2+(3y-2)^2=(\sqrt{C})^2$

$3y=2x+\sqrt{\frac{C}{5}}$

$(2x-2)^2+(2x-2+\sqrt{\frac{C}{5}})^2=C$

$2x-2=t.$ продолжение на стр 8

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

пусть $a = 1$

$f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

~~f(4/2) = f(2)+~~

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{2} \cdot 2) = f(\frac{1}{2}) + f(2) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{5} \cdot 5) = f(\frac{1}{5}) + f(5) \Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -1$

$\Rightarrow f(\frac{x}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow$
$f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$; $f(8) = f(2 \cdot 4) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$; $f(10) = f(5) + f(2) = 1$

~~Итак~~ Таким образом составим таблицу для $3 \le x \le 27$
$x \in N$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

x	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(x)$	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

для 10-и иксов $f(x) = 0$

для 7-и иксов $f(x) = 1$

для 3-х иксов $f(x) = 2$

для 2-х иксов $f(x) = 3$

для 2-х иксов $f(x) = 4$

для 1 икса $f(x) = 5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 - продолжение

$f(x)$	0	1	2	3	4	5
Кол-во x с такими $f(x)$	10	7	3	2	2	1

Кол-во пар: $10\cdot(25-10)+7\cdot(25-10-7)+3\cdot(25-10-7-3)+$
$+2(25-10-7-3-2)+2(25-10-7-3-2-2)$
$=10\cdot15+7\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1=150+56+15+8=229$

Ответ: 229.

№

№2 продолжение

$t^2 + (t + \sqrt{\frac{c}{5}})^2 = c$

$t^2 + t^2 + \frac{c}{5} + 2t\sqrt{\frac{c}{5}} = c$

$t^2 + t\sqrt{\frac{c}{5}} = \frac{2c}{5}$

$\sqrt{c} = \ell \quad (\ell \geq 0)$

$\frac{2}{5}\ell^2 - \ell\frac{t}{\sqrt{5}} - t^2 = 0$

$D = \frac{t^2}{5} + 4\cdot\frac{2}{5}\cdot t^2 = \frac{9}{5}t^2$

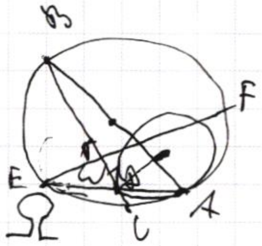
$\ell_1 = \frac{\frac{t}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{5}}t}{5} = -\frac{2t}{5\sqrt{5}}$

$\ell_2 = \frac{4t}{5\sqrt{5}}$

$BD = \sqrt{(2R-r)^2 - r^2} =$

$= \sqrt{(2R-2r)2R} = 2\sqrt{R(R-r)}$

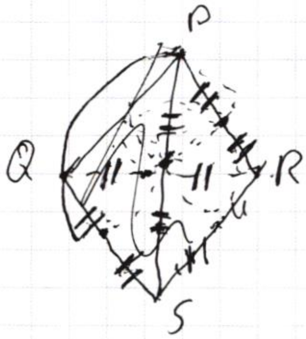
Найти; R; r; $\angle AFE$; S_{AEF}

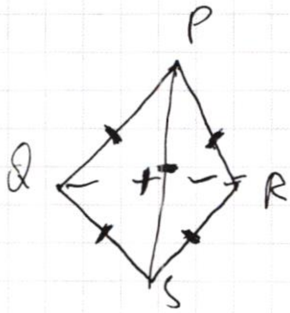


$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

~~$2R - r = 13$~~

$r \in B$





~~$k^2 - 4l = \frac{l}{2} - k + 2$~~

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 7y + 2}$

~~$(3y-2x)^2 =$~~

$a^2 + 2ab + b^2 = \frac{ab}{2} - a - b + 2.$

$t = (a+1)$

$k = b + 1$

~~$(t-1)^2 + \frac{5}{2}(t-1)(k-1) + (k-1)^2 = -k - t + 4$~~

~~$t^2 + 2t - \frac{5}{2}tk - \frac{5}{2}$~~

$a^2 - \frac{5}{2}ab + a + b^2 + b - 2 = 0$

$a^2 + a(1 - \frac{5b}{2}) + b^2 + b - 2 = 0$

$a^2 + a(1 - 5x) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$4x^2 + 2x - 2 = 0$

$2(2x^2 + x - 1) = 4(x+1)(x - \frac{1}{2})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\alpha + \sin\beta =$ $\qquad$ $202 - 202 = 0$

$\cancel{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 2(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta -$

$-\sin\beta\cdot\sin\alpha) = 2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta -$

$-\sin^2\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha) =$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\sin^2$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha.$

$\alpha = 60^\circ;\ \beta = 30^\circ$ $\qquad$ $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin 60^\circ + \sin 60^\circ = 2\cdot\sin 60^\circ\cdot\cos 0^\circ$

$1 - \frac{6+2-4\sqrt{3}}{16} =$

$\sqrt{\sqrt{3}+4}$

$\frac{8+4\sqrt{3}}{16}$ $\qquad$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$