МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$a = 2\alpha \quad b = 2\beta \Rightarrow \begin{cases} \sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(a+2b) + \sin a = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin a \cdot \cos b \underbrace{}_{+\sin b\cdot\cos a} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin a(2\cdot\cos^2 b - 1) + \cos a \cdot 2\cdot\sin b\cdot\cos b + \sin a = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\cdot\sin a\cdot\cos^2 b + 2\cos a\cdot\sin b\cdot\cos b = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos b(\sin a\cdot\cos b + \cos a\cdot\sin b) = -\frac{2}{5} \end{cases}$

$\cos b \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos b = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin b = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin b = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin a \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos a \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cdot\cos^2\alpha - 1 = -1$

$\cos\alpha = 0$ или $2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

не удовл. усл. что $tg\alpha$ опред.

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin a \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha = 1$

$2\cdot\cos^2\alpha - 1 - 4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1$

$1 - 2\sin^2\alpha - 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 1$

$\sin\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$ или $2\cos\alpha - \sin\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$ или $tg\alpha = 2$

Ответ: $tg\alpha = -\frac{1}{2}; 0; 2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5

$f(3)=f(1\cdot 3)=f(1)+f(3) \Rightarrow f(3)=f(1)+f(3) \Rightarrow f(1)=0$

Пусть $a=p_1 \cdot p_2 \dots p_n \Rightarrow f(p_1p_2\dots p_n)=f(p_n)+f(p_1p_2\dots p_{n-1})=$

$=f(p_n)+f(p_{n-1})+f(p_1p_2\dots p_{n-2})=\dots=f(p_1)+f(p_2)+\dots+f(p_n)$

Где $p_1 \cdot p_2 \dots p_n$ – разложение на простые множители числа a

$\Rightarrow f(a)=f(p_1)+f(p_2)+\dots+f(p_n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i}{4}\right]$

$\cancel{f(1)=f(\frac{a}{a})}=\ f(1)=f(\frac{a}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow 0=f(a)+f(\frac{1}{a})$

$\Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

Тогда нам нужно найти $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0$

Т.к. $f(a)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_i}{4}\right]$, то мы можем вычислить $f(a)$ для $a\in\mathbb{N}$ $1\le a\le 24$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

18	19	20	21	22	23	24
0	4	1	1	2	5	0

A_5 = 1 значение = 5 ($A_5=1$)

A_4 = 2 значения = 4 ($A_4=2$)

A_3 = 1 значение = 3 ($A_3=1$)

A_2 = 2 знач. = 2 ($A_2=2$)

A_1 = 7 знач = 1 ($A_1=7$)

A_0 = 11 знач = 0 ($A_0=11$)

Кол-во пар, где $f(y)>f(x)$:

$A_5(A_4+A_3+A_2+A_1+A_0)+$

$+A_4(A_3+A_2+A_1+A_0)+A_3(A_2+A_1+A_0)+$

$+A_2(A_1+A_0)+A_1\cdot A_0=$

$=1\cdot 23+2\cdot 21+1\cdot 20+2\cdot 18+7\cdot 11=$

$=23+42+20+36+77=85+113=198$

Ответ: 198 пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

ОДЗ: $x \geq 2y \Downarrow a \geq 2b$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \qquad a=x-2,\ b=y-1$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-4ab+b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad a^2+9b^2-(a^2-4ab+4b^2)=25-ab$$

$$5b^2+5ab=25$$

$b(a+b)=5 \Rightarrow a=\frac{5}{b}-b$ ($b\neq 0$, т.к. иначе $b(a+b)=0\neq 5$)

$$\left(\frac{5}{b}-b\right)^2+9b^2=25 \to \frac{25}{b^2}-10+b^2+9b^2=25 \Rightarrow 10b^2-35+\frac{25}{b^2}=0 \ \Big| \cdot \frac{b^2}{5}$$

$$2b^4-7b^2+5=0 \Rightarrow 2(b^2-1)\left(b^2-\frac{5}{2}\right)=0$$

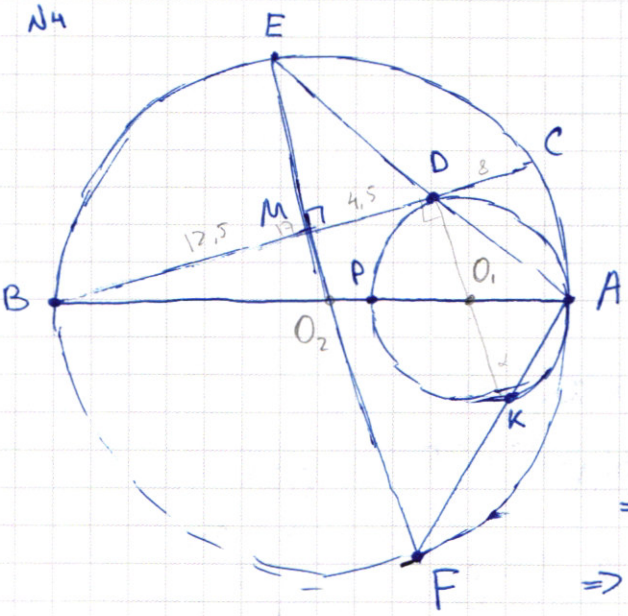
$$\left[\begin{array}{lll} b=1 & \Rightarrow a=\frac{5}{1}-1=4 & 4>+2 \\ b=-1 & \Rightarrow a=-\frac{5}{1}+1=-4 & -4<-2 \Rightarrow \text{не удовл. ОДЗ} \\ b=\sqrt{\frac{5}{2}} & \Rightarrow a=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}}<2\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow \text{не удовл. ОДЗ} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} & \Rightarrow a=-\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\sqrt{\frac{5}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{2}} & -\sqrt{\frac{5}{2}}>-2\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$$

$(a,b)=(1,4)$ $\qquad x=a+2 \quad y=b+1$

$(a,b)=\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ $\Downarrow$

Ответ: $(3,5)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№4



Дано: $EF \perp BC$ $BD = 17$ $CD = 8$

AB - диаметр R - радиус Ω

r - радиус ω

Найти: $\angle AFE$, S_{AFE}, R, r

Решение:

При гомотетии с центром в т. A и коэф. $= \frac{AB}{AP}$ ω переходит в Ω

$\Rightarrow D \to E$, $K \to F$, $P \to B$

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AK}{AF}$, ~~$\angle EAF$ общий~~ $\Rightarrow DK \parallel EF$

$\left.\begin{matrix} DK \parallel EF \\ EF \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow DK \perp BC$ т.к. BC - касательная, то DK - радиус

$O_1 = AP \cap DK$ - центр ω,

DK - диаметр ω $\Rightarrow EF$ - диаметр Ω $\Rightarrow O_2 = AB \cap EF$ - центр Ω

$BP \cdot BA = BD^2 \Rightarrow (2R - 2r) \cdot 2R = 17^2$

$EF \cap BC = M$ т.к. EF - диаметр и $BC \perp EF$, то M - середина BC

$EM \cdot MF = BM^2 = (R - O_2M) \cdot (R + O_2M)$

$12{,}5^2 = R^2 - O_2M^2$

Пусть $\angle DAP = \alpha \Rightarrow \angle BDP = \alpha$, $\angle PAK = 90 - \alpha \Rightarrow \angle AFE = 90 - \alpha$

$\angle DBA = 180 - \angle BDA - \angle DAB = 180 - 90 - \alpha - \alpha = 90 - 2\alpha$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ ОДЗ: $x^2+18x>0$

Пусть $a = x^2+18x \Rightarrow a>0$

$5^{\log_{12}a} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$ т.к. $a>0$, то $|a|=a$

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}a} = 5^{\frac{\log_5 a}{\log_5 12}} = \left(5^{\log_5 a}\right)^{\log_{12}5} = a^{\log_{12}5}$

$a^{\log_{12}5} + a \geq a^{\log_{12}13} \quad |\cdot a^{\lg 12}$

$a^{\lg 5} + a^{\lg 12} \geq a^{\lg 13} \quad |: a^{\lg 12}$

$\cancel{1 + a^{\lg\frac{5}{12}} \geq a^{\lg\frac{13}{12}}}$

$\cancel{\lg\frac{13}{2} > 1 \Rightarrow \text{при } a \leq 1 \quad a^{\lg\frac{13}{12}} \leq 1}$

$\cancel{\Rightarrow 1 + a^{\lg\frac{5}{12}} \geq a^{\lg\frac{13}{2}} \quad \text{при } a \leq 1}$

Если $a=1$, то

$5^{\log_{12}1} + 1 \geq 1^{\log_{12}13}$

$2 \geq 1$

верно

$\lg x = \frac{\log_a x}{\log_a 10}$ (при $a \neq 1$)

$a^{\frac{\log_a 5}{\log_a 10}} + a^{\frac{\log_a 12}{\log_a 10}} \geq a^{\frac{\log_a 13}{\log_a 10}} \quad |\cdot a^{\log_a 10}$

$a^{\log_a 5} + a^{\log_a 12} \geq a^{\log_a 13}$

$5+12 \geq 13$

$17 \geq 13$ верно $\Rightarrow$ для $a>0$ неравенство всегда выполняется

$x^2+18x>0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$ Ответ: $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad$ $f(2) = f(3) = 0$

$f(2b) = f(b)$ $\Rightarrow$ мы можем сократить x, y на 2 и на 3

$f(3b) = f(b)$ $\qquad$ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

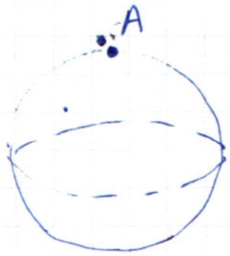
$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right)} =$ $\qquad$ $f(p_1 p_2 \dots p_n) = f(p_1) + f(p_2) + \dots + f(p_n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p_i}{4}\right]$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \left[\frac{p_n}{4}\right] - \left(\left[\frac{\pi_1}{4}\right] + \left[\frac{\pi_2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{\pi_k}{4}\right]\right.$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

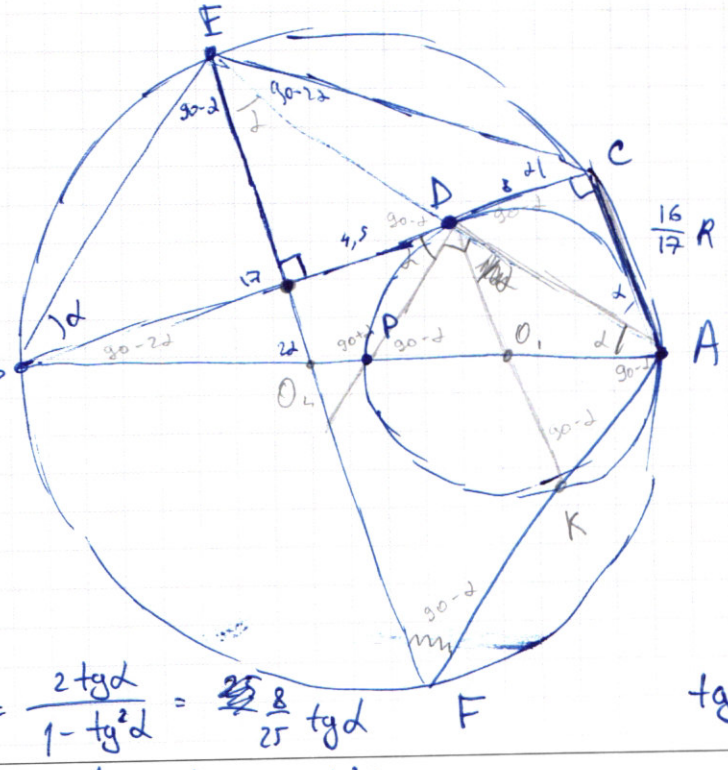
18	19	20	21	22	23	24
0	4	1	1	2	5	0



$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(3) = f(1) + f(3)$
$\Rightarrow f(1) = 0$

$f(23) > f(19),\ f(17) > f(13) > f(22),\ f(11) > f(7), f(9), f(10), f(14), f(15), f(20)$
$f(21)$



$CD = 8$ $\quad$ $BD = 17$

S_{AFE}, $\angle AFE$ – ?

R, r – ?

$BP \cdot 2r = 17^2$ $\qquad$ $(2R - 2r) \cdot 2r = 17^2$

$\frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}$ $\qquad$ $AC = \frac{16}{17}R$

$tg\,\alpha = \frac{17}{2R}$ $\qquad$ $tg\,2\alpha = \frac{25}{\frac{16}{17}R} = \frac{25 \cdot 17}{16R}$

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{8}{25}\,tg\,\alpha$

$\frac{1}{1 - tg^2\alpha} = \frac{4}{25}$ $\qquad$ $25 = 4 - tg^2\alpha$ $\qquad$ $tg^2\alpha = -21$

☑ черновик $\qquad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №___

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cdot\cos\alpha\,(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

$\cos\alpha\neq 0\Rightarrow$

$\cos\alpha=0$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n$

не удовл. усл что $tg\,\alpha$ сущ.

$2\,tg\,\alpha=-1$

$tg\,\alpha=-\frac{1}{2}$

$\alpha=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

2) $\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin a\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos a\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\ \cancel{-2\cos^2\alpha+1}\ -1+2\cdot\sin^2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\,(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\sin\alpha=1$

$\cos\alpha=0$

не удовл. усл. что $tg\,\alpha$ опред.

$tg\,\alpha=-2$

$\alpha=-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$x=p_1p_2\ldots p_n\Rightarrow f(x)=f(p_1)+f(p_2)+\ldots+f(p_n)=$

$=f(x)=\left[\frac{p_1}{4}\right]+\left[\frac{p_2}{4}\right]+\ldots$

$f\left(\frac{a}{6}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{6}\right)$

$f\left(\frac{2}{6}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{3}{6}\right)$ $f(2)=0$

$f\left(\frac{1}{6}\right)=f\left(\frac{2}{6}\right)=f\left(\frac{3}{6}\right)$

$f(4)=f(1)\Rightarrow f(1)=0$

От 1 до 24 либо простое, либо $:2$, либо $:3$

$f(1)+f(4)=f(2)\cdot 2=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{5^{\log_{12} a}}$

$a > 0$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$\cancel{5^{\log_{12} a} \geq a\left(a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)}$

$a = 12$ ✓

$5^{\frac{\log_5 a}{\log_5 12}} = a^{\log_{12} 5}$

$\frac{5^{\log_{12} a}}{a} + 1 \geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13} \;\Big/ : a^{\log_{12} 5}$

$5 + 12 \geq 13$ ✓

$x^2 + 18x \cancel{+} a = 0$

$1 + a^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq a^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$D = 18^2 + 4a > 0$ при любом $a > 0$

$1 \geq a^{\log_{12}\frac{12}{5}}\left(a^{\log_{12}\frac{13}{60}} - 1\right)$

$a = 1$

$1 + 1 \geq 1$ ✓

$12 = 1 \cdot 12^1$

~~при $a > 1$~~

$5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13} - a$

$a = k \cdot 12^m$, где $m \in \mathbb{Z}$ $m \geq 0$ $k \in (0; 1]$

$5^{\log_{12}(k \cdot 12^m)} \geq k^{\log_{12} 13} \cdot \left(12^{\log_{12} 13}\right)^m - k \cdot 12^m$

$\lg 5 \geq \frac{1}{2}$

$\lg 12 \geq 1$

$5^{\log_{12} k + m} \geq k^{\log_{12} 13} \cdot 13^m - k \cdot 12^m$

$\lg 13 \leq$

$5 \geq 1 \cdot 13 - 12$

3

$a^{\frac{\lg 5}{\lg 12}} + a^{\frac{\lg 12}{\lg 12}} \geq a^{\frac{\lg 13}{\lg 12}}$

$a^{\lg\frac{13}{12}} - a^{\lg\frac{5}{12}} = a^{\lg\frac{5}{12}}\left(a^{\lg\frac{13}{5}} - 1\right)$

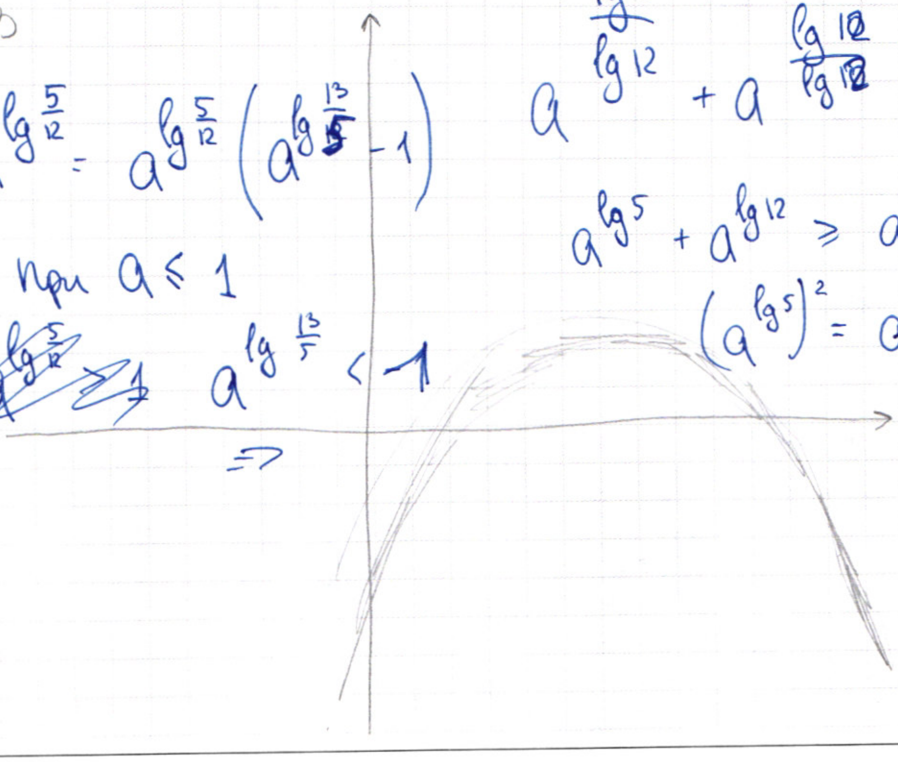
$a^{\lg 5} + a^{\lg 12} \geq a^{\lg 13}$

при $a \leq 1$

$\left(a^{\lg 5}\right)^2 = a^{\lg 25}$

$\cancel{a^{\lg\frac{5}{12}} \geq 1}$ $a^{\lg\frac{13}{5}} < 1$

$\Rightarrow$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$xy - x - 2y + 2 = (x-2)(y-1)$ $\quad x > 2y$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$ $\quad \sqrt{|x-2|} = \dfrac{x-2y}{\sqrt{|y-1|}}$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$\dfrac{x^2 - 4xy + 4y^2}{|y-1|} + 9(y-1)^2 = 25$

$a = x - 2$

$b = y - 1$

$$\begin{cases} a + 2 - 2b \cancel{-} 2 = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$5b^2 + 5ab = 25$

$b(b+a) = 5$

$a = \dfrac{5}{b} - b$

$\left(\dfrac{5}{b} - b\right)^2 + 9b^2 = 25$ $\quad x =$

$\dfrac{25}{b^2} - 10 + b^2 + 9b^2 = 25$ $\quad \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$10b^2 + \dfrac{25}{b^2} - 35 = 0$

$t = b^2, \ t \geq 0$

$10t^2 - 35t + 25 = 0$

$t = 1 \quad t = 2{,}5$ $\quad \dfrac{25}{10} = \dfrac{5}{\sqrt{10}} = \dfrac{5\sqrt{10}}{10}$

$b = \pm 1$ $\quad b = \pm \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad \dfrac{5 \cdot 2}{\sqrt{10}} - \dfrac{\sqrt{10}}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$b = 1 \quad b = -1 \quad b = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \quad b = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$a = 4 \quad a = -4 \quad a = \dfrac{\sqrt{10}}{2} \quad a = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x)\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

ОДЗ: $x^2+18x \geq 0$ $\qquad a = x^2+18x \quad (a>0)$

$$5^{\log_{12}a}+a\geq a^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}a}+a\left(1-a^{\log_{12}13-1}\right)\geq 0$$

$$5^{\log_{12}a}+a\left(1-a^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)\geq 0$$

$5^{\log_{12}a}\geq 0 \qquad 1>\log_{12}\frac{13}{12}>0 \Rightarrow$ при $a\leq 1$ $a^{\log_{12}\frac{13}{12}}<1$

$$\log_{12}a=\frac{\log_{13}a}{\log_{13}12}=\log_{13}a\cdot\log_{12}13$$

$$5^{\log_{13}a\cdot\log_{12}13}+a\geq a^{\log_{12}13}$$

$$y=\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$$

$a = 2\alpha \quad b = 2\beta$

$$\begin{cases}\sin(a+b)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(a+2b)+\sin a=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

1

$$\begin{cases}\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin a\cdot\cos^2 b-\sin a+\cos a\cdot 2\sin b\cdot\cos b+\sin a=-\frac{4}{5}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin a\cdot\cos b+\sin b\cdot\cos a=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin a\cdot\cos^2 b+\cos a\cdot\sin b\cdot\cos b=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\cos b(\sin a\cdot\cos b+\cos a\cdot\sin b)=-\frac{2}{5}$$

$$\cos b\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{2}{5}$$

$$\cos b=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\sin b=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin b=\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin a\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos a\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$$2\cdot\sin a+\cos a=-1$$

$$4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cdot\cos^2\alpha-1=-1$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\cdot tg\alpha\cdot\cos^2\beta-2\cdot tg^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta+2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta-tg\alpha\cdot\sin^2\beta=-\frac{1}{\sqrt5\cdot\cos^2\alpha}$$

$$2\cdot tg\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+\sin2\beta-tg^2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5\cdot\cos^2\alpha}$$

$$2tg\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta-tg^2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5\cdot\cos^2\alpha}$$

$$2tg\alpha\cdot\cos^22\beta-tg^2\alpha\cdot2\sin2\beta\cdot\cos2\beta+2\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta-tg\alpha\cdot\sin^22\beta+2tg\alpha=-\frac{4}{5\cos^2\alpha}$$

$$2tg\alpha\cdot\cos4\beta-tg^2\alpha\cdot\sin4\beta+\sin4\beta+2tg\alpha=-\frac{4}{5\cos^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$tg\alpha=a$$

$$2a\cdot\cos2\beta+\sin2\beta-a^2\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}(a^2+1)$$

$$2a\cdot\cos4\beta+\sin4\beta-a^2\cdot\sin4\beta+2a=-\frac45(a^2+1)$$

$$2a(2\cdot\cos^22\beta-1+1)+2\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\beta(1-a^2)=-\frac45(a^2+1)$$

$$4a\cdot\cos^22\beta+2\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\beta(1-a^2)=-\frac45(a^2+1)$$

$$2a\cdot\cos^22\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\beta(1-a^2)=-\frac25(a^2+1)\ \Big|\cdot\frac{\sqrt5}{2}$$

$$a\sqrt5\cdot\cos^22\beta+\frac{\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\sqrt5(1-a^2)}{2}=2a\cdot\cos2\beta+\sin2\beta-a^2\cdot\sin2\beta$$

$$a\cdot\sqrt5\cdot\cos^22\beta-2a\cdot\cos2\beta+\frac{\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\sqrt5}{2}-\sin2\beta+a^2\cdot\sin2\beta-a^2\cdot\frac{\sin2\beta\cdot\cos2\beta\sqrt5}{2}=0$$

$a = \sin\alpha \quad b = \sin\beta \qquad c = \cos\alpha \quad d = \cos\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = 2(ad+bc)(cd-ab) = -\frac{1}{\sqrt5}$

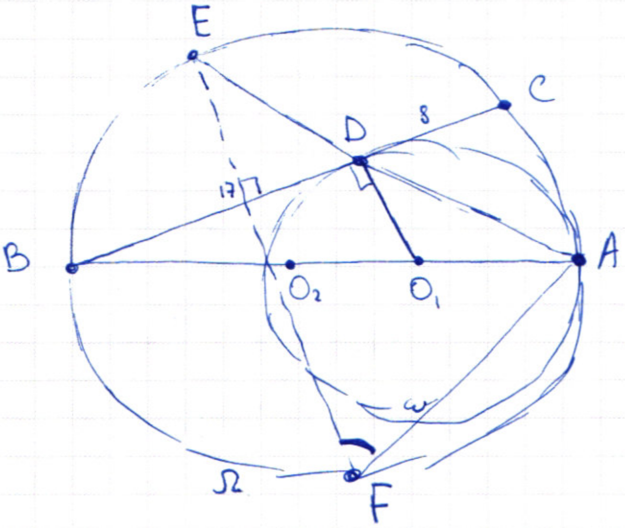
$\sin(2\alpha+4\beta) = 2\cdot\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) =$

1) пусть $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos2\alpha\cdot\cos2\beta - \sin2\alpha\cdot\sin2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$



R и r - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

$CD = 8$

$BD = 17$

$\sin\alpha = a$

$\sin\beta = b$

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = 2\left(a\sqrt{1-b^2} + b\cdot\sqrt{1-a^2}\right)\left(ab - \sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-b^2}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| : \cos^2\alpha$

$\cancel{2}(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta)(\cos\beta - \operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{2\sqrt5\cdot\cos^2\alpha}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = 2(\sin\alpha\cdot\cos2\beta + \cos\alpha\cdot\sin2\beta)(\cos\alpha\cdot\cos2\beta - \sin\alpha\cdot\sin2\beta)$
$+ 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{5} \quad \Big| : 2\cos^2\alpha$

$2(\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta)(\cos2\beta - \operatorname{tg}\alpha\cdot\sin2\beta) + 2\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5\cos^2\alpha}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$tg\alpha - ?$

$2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cancel{\cdot}\cos(\alpha+\beta)$

$x^2-4xy+y^2 = xy - x - 2y + 2$ $\quad x \geq 2y$

$x^2-5xy+y^2+2y+x-2=0$

$x^2+(1-5y)x+(y^2+2y-2)=0$

$D = 25y^2-10y+1-4y^2-8y+8 = 21y^2-18y+9 = 3(7y^2-9y+3)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta =$

$= -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\beta$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$(x^2-4x+4)+(\underset{3\cdot y\cdot 2}{9y^2}-18y+9) = 25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2 = 25$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)