МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача ~~6~~ 5

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0 \quad f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

Следовательно: $f(2^n 3^m)=0$, ~~...~~ n и m натуральные

Предположим, что мы знаем $f(t)$. тогда мы можем найти $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

По условию:

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{t^2}\right)=f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(\frac{1}{t}\right) \\ f\left(\frac{1}{t}\right)=f\left(\frac{1}{t^2}\cdot t\right)=f\left(\frac{1}{t^2}\right)+f(t) \end{cases}$$

$f\left(\frac{1}{t^2}\right)=2f\left(\frac{1}{t^2}\right)+2f(t)$

$f\left(\frac{1}{t^2}\right)=-2f(t)$

$f\left(\frac{1}{t}\right)=-f(t)$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$. $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ при $f(x)<f(y)$

$f(3)=f(4)=f(6)=f(8)=f(9)=f(12)=f(16)=f(18)=f(24)=f(27)=0$ 10 вар.

$f(5)=f(7)=f(10)=f(14)=f(15)=f(20)=f(21)=1$ 7 вар.

$f(11)=f(22)=$ ~~2~~ $f(25)=2$ 3 вар.

$f(13)=f(26)=3$ 2 вар.

$f(17)=f(19)=4$ 2 вар.

$f(23)=5$ 1 вар.

Способов выбрать x и y так, чтобы $f(x)<f(y)$

$f(x)=0$: $10\cdot 15$

$f(x)=1$: $7\cdot 8$

$f(x)=2$: $3\cdot 5$

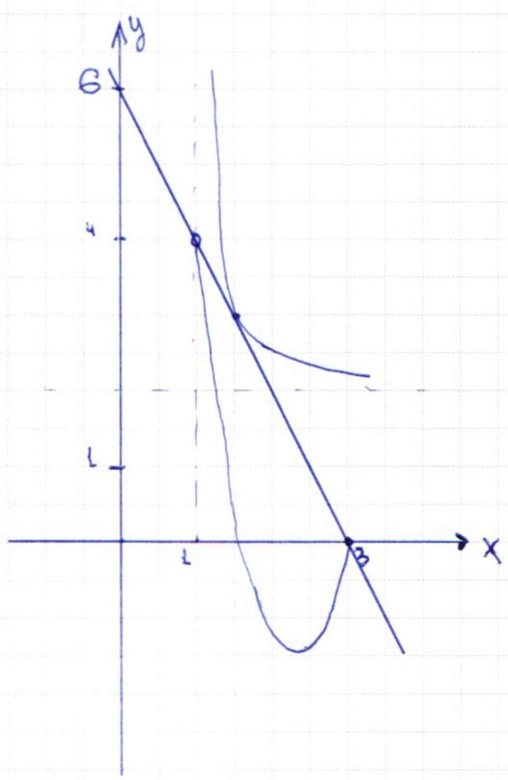
$f(x)=3$: $2\cdot 3$

$f(x)=4$: 1

Всего: 228

Ответ: 228 пар

Задача 6.



$y = 8x^2 - 34x + 30$ – парабола, ветви направлены вверх

вершина в точке $x_B = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$2 < \frac{34}{16} < 3$

$y_B < 0$ т.к. $D > 0$

~~в~~ при $x = 3$ $8x^2 - 34x + 30 = 0$

при $x = 1$ $8x^2 - 34x + 30 = 4$

$$y = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

график функции $y = \frac{1}{2x}$, сдвинутый на 2ед. от. вверх и на 1 ед. от. вправо

Докажем, что ~~прямая~~ ~~заданная~~ ~~уравнение~~ при $a = -2$ и $b = 6$ неравенство из условия выполнено на всем промежутке $(1;3]$. Прямая $y = -2x + 6$ проходит через точки $(1;4)$ и $(3;0)$, при этом она ~~выше~~ не ниже параболы $y = 8x^2 - 34x + 30$. Докажем, что она не выше гиперболы $2 + \frac{1}{2(x-1)}$.

$$-2x + 6 \le 2 + \frac{1}{2(x-1)} \quad \Big| \cdot 2(x-1) > 0 \text{ на } (1;3]$$

$\cancel{-2x \cdot 2(x-1) + 6 \le 4(x-1) + 1}$

$\cancel{-4(x-1)x + 5 \le 4(x-1)}$

$\cancel{-4x^2 + 4x + 5 \le 4x - 4}$

$-4x(x-1) + 6 \cdot 2(x-1) \le 4(x-1) + 1$

$-4x^2 + 4x + 12x - 12 \le 4x - 3$

$-4x^2 + 12x - 9 \le 0$

$-(2x-3)^2 \le 0$ при $x \in \mathbb{R}$

Заметим, что при $x = 1,5$ прямая $y = -2x + 6$ и гипербола касаются.

Справедлива система:

$$\begin{cases} a + b \ge 4 \; (1) \; (ax+b \text{ в точке } 1) \\ 1,5a + b \le 3 \; (2) \; (ax + b \text{ в точке } 1,5) \\ 3a + b \ge 0 \; (3) \; (ax+b \text{ в точке } 3) \end{cases}$$

~~(1) и (3)~~ $\cancel{\begin{cases} 3a + 3b \ge 12 \\ -3a - b \ge \end{cases}}$

(1) и (2)

$$\begin{cases} 3a + 3b \ge 12 \\ -3a - 2b \ge -6 \end{cases}$$

$b \ge 6$

~~(2) и (3)~~ $\cancel{\begin{cases} -3a - 2b \ge 6 \\ 3a + b \ge 0 \end{cases}}$ ~~$-b$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6 продолжение

~~При $b < 6$?~~

~~прямая ... в точке $x=1$, $ax+b$ должно быть~~

② и ③

$$\begin{cases} -3a-2b \geq -6 \\ 3a+b \geq 0 \end{cases}$$

$$-b \geq -6$$

$$b \leq 6$$

Одновременно $b \leq 6$ и $b \geq 6$ => $b=6$.

~~① и ③~~

~~$\begin{cases} -a-b \leq -4 \\ 3a+b \end{cases}$~~

① и ②

$$\begin{cases} a+b \geq 4 \\ -1{,}5a-b \geq -3 \end{cases}$$

$$-0{,}5a \geq 1$$

$$a \geq -2$$

~~② и ③~~

~~$\begin{cases} -1{,}5a-b \geq -3 \\ 3a+b \geq 0 \end{cases}$~~

~~$1{,}5a \geq$~~

② $1{,}5a+6 \leq 3$

$$1{,}5a \leq -3$$

$$a \leq -2$$

$$\begin{cases} a \geq -2 \\ a \leq -2 \end{cases} \quad a=-2$$

Ответ: единственная подходящая пара: $a=-2$, $b=6$

Задача 3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

ОДЗ: $x^2+6x > 0$

На ОДЗ справедливы преобразования

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)} - 4^{\log_4(x^2+6x)}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

$\log_4(x^2+6x) = t$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

при $t=2$ левая и правая части равны. ~~Функции 3^t, 4^t, 5^t монотонны, значит может быть только 1 точка~~

при $t \in (-\infty; 2]$ $3^t+4^t \geq 5^t$

при $t \in (2; +\infty)$ $3^t+4^t < 5^t$

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$x^2+6x \leq 16$

$x^2+6x-16 \leq 0$

$D = 36+64 = 100$

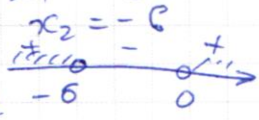
$x_1 = \frac{-6+10}{2} = 2$

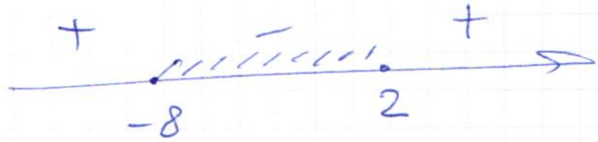
$x_2 = \frac{-6-10}{2} = -8$

$\{x^2+6x > 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -6$





~~Ответ: $x \in [-8;$~~

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$8x^2-34x+30 = 8(x-x_b)^2 - 34(x-x_b) + y_b$

$\left(\frac{1}{x}\right)' =$

$x_b = -\frac{b}{a}$

$2(x-3)^2 + 7(x-3) + 5$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$ $(x-3)^2$

$2x^2 - \cancel{8}x + 18 + 7x - 21 + 5$

12

x^2-6x+9

$2x^2-5x+2$

$2 < \frac{34}{16} < 3$

верш. $\frac{-b}{2a}$

x^2-8x

$\frac{17}{8}$

$16x-34$

$(2(x-3))^2 + 7(2(x-3)) + 5$

$8 \cdot \frac{34^2}{16^2}$

$8 \cdot \frac{17^2}{8^2} - 34 \cdot \frac{17}{8} + 30$

$4x^2 - 24x + 36 + 14x - 42 + 5 =$

$= 4x^2 - 10x$

$(4x-3)' = 4$ $(2x-2)' = 2$

$(x-3)^2 + 7(x-3) + 5$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$x^2-6x+9+7x-21+5$

4 в $x=1$

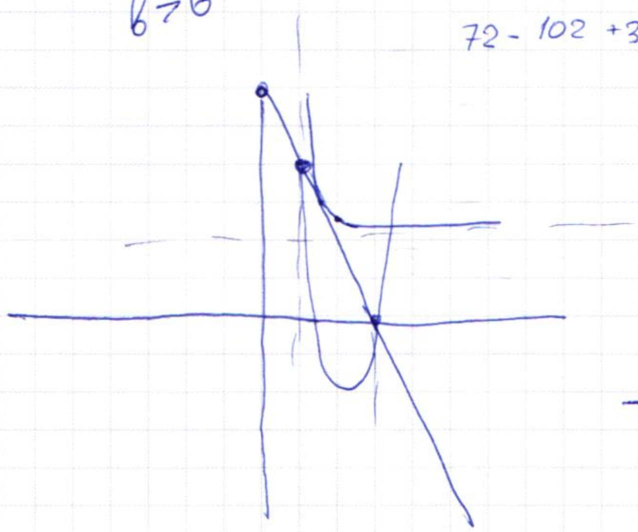
0 в $x=3$

$b > 6$

$\frac{8x-8-8x+6}{4} = \frac{-2}{4x^2-8x+4}$

$72-102+30$

$11-12+4=$



$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{(2x-2)\cdot 2+1}{2x-2} =$

$3a+3b \geq 12$

$-3a-b \leq 0$

$= 2 + \frac{1}{2x-2}$

$9-12+4=$

$=-1$

-2

$2b \geq 12$

$b \geq 6$

$2+\frac{1}{2(x-1)}$

$\left(\frac{1}{2x-2}\right)' =$

$a+b \geq 4$

$1{,}5a+b \leq 3$

$3a+b \geq 0$

$3a+2b \leq 6$

$-3a-b \leq 0$

$b \leq 6$

$=$

$3a+2b \leq 6$

$3a+b \geq 0$

$b <$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(5)=1$

$f(\frac{1}{25})=2f(\frac{1}{5})$ $\quad f(\frac{1}{25})=2f(\frac{1}{25})+2$ $\quad f(\frac{1}{25})=-2$

$f(\frac{1}{5})=f(\frac{1}{25}\cdot 5)=f(\frac{1}{25})+1$ $\quad f(\frac{1}{5})=-1$

$f(7)=1$ $\quad f(\frac{1}{11})=-1$

$f(\frac{1}{7})=-1$ $\quad f(\frac{1}{121})=2f(11)$ $\quad f(\frac{1}{11})=-2$

$f(11)=f(\frac{1}{121}\cdot 11)=f(121)+2$

$f(\frac{1}{13})=-3$

$f(\frac{1}{17})=4$

f

$f(x)$		$f(\frac{1}{y})$
3 - 0		3 - 0
4 - 0		4 - 0
5 - 1		5 - -1
6 - 0		6 0
7 - 1	10 нулей	7 -1
8 - 0		8 0
9 - 0	7 единиц.	9 0
10 - 1		10 -1
11 - 2	3 двойк.	11 -2
12 - 0		12 0
13 = 3	2 тройк.	13 = -3
14 = 1		14 = -1
15 = 1	2 четв.	15 = -1
16 = 0		16 = 0
17 = 4	1 пят.	17 = -4
18 = 0	всего	18 = 0
19 = 4	25	19 = -4
20 = 1		20 = -1
21 = 1		21 = -1
22 = 2		22 = -2
23 = 5		23 = -5
24 = 0		24 = 0
25 = 2		25 = -2
26 = 3		26 = -3
27 0		27 = 0

сколько способов выбрать, что $f(x) < f(y)$

способов выбрать

10 спос. выбрать 0

$10\cdot 15$
$+$
$7\cdot 8$
$+$
$3\cdot 5$
$+$
$2\cdot 3$
$+$
$2\cdot 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$ ОДЗ: $(3y-2)(x-1)\geq 0$

$f(\frac{1}{25})=-2$

$f(\frac{1}{5})=-1$

$9y^2-12xy+\cancel{4x^2}$ $3xy-2x-3y+2$ $f(\frac{1}{25})=2f(\frac{1}{25})+2$ $(y-\frac{2}{3})(x-1)\geq 0$

$f(\frac{1}{25})=f(\frac{1}{5})+f(\frac{1}{5})$

$f(\frac{1}{5})=f(\frac{1}{25}\cdot 5)=f(\frac{1}{25})+1$ либо $y\geq\frac{2}{3}$ $f(\frac{1}{7})=-1$

$\begin{cases}9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2\\3x^2+3y^2-6x-4y-4=0\end{cases}$

$f(\frac{1}{5})=0$ $f(\frac{1}{2})=0$ $f(\frac{1}{3})=0$

$f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})$ $f(\frac{1}{27})=$ $f(\frac{1}{6})=0$

$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4}\cdot 2)=f(\frac{1}{4})+f$ $f(\frac{1}{24})=f(\frac{1}{6})+f(\frac{1}{4})=$

$3x^2+6xy+3y^2-6x-4y-4-6xy=0$ $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})$ $=f(\frac{1}{8})+f(\frac{1}{3})$

$9x^2+18xy+9$

$f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})$ $f(1)=f(1)+f(1)$

$f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{4})+f(2)$ $a=2a$

$9x^2\cancel{+}12xy+4y^2+5y^2-18x-12y-12+12xy=0$ $f(1)=0$

$(3x-2y)^2=$ $f(2)=0$

$f(1)=0$

$f(2)=0$ $f(x\cdot\frac{1}{y})<0$ $f(3)=0$

$f(3)=0$ $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$ $f(4)=0$ $f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$3x^2+3y^2=6x+4y+4$ $|\times 3$ $f(5)=1$ $f(5)$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$9y^2+9x^2=18x+12y+12$ $f(7)=1$ $f(8)=f(4)+f(2)=0$

$9y^2-12xy+4x^2=18x+12y+12-12xy-5x^2$ $f(9)=f(3)+f(3)=0$

$(3y-2x)^2=-5x^2-12xy+18x+12y+12$ $f(10)=f(2)+f(5)=1$

$x<y$ $f(11)=2$ 1: $x>y$

$f(\frac{x}{y})<0$ $f(12)=f(4)+f(3)=0$

$f(\frac{1}{25})=f$

$(f\frac{1}{5})=f(\frac{1}{25}\cdot 5)=1+f(\frac{1}{25})=2+$ $f(\frac{1}{5^3})=3+f(\frac{1}{5^4})$

$f(25)=2$ $f(18)=0$

$f(\frac{1}{2})=\cancel{2}+f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{8})$ $f(26)=3$ $f(13)=3$

$f(27)=0$ $f(19)=4$ $f(14)=f(2)+f(7)=1$

для любой сократ. дроби не выполн.

$f(20)=f(5)+f(4)=1$

$f(21)=f(7)=1$ $f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(22)=f(11)=2$ $f(16)=0$

$f(23)=5$ $f(17)=4$

$f(24)=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x^2+6x $\sin 2v+2 3$

$f\left(\frac{1}{t^2}\right)=f\left(\frac{1}{t}\right)+f\left(\frac{1}{t}\right)$ $f\left(\frac{1}{t}\right)=f\left(\frac{1}{t^2}\right)+f(t)$

№3

Ограничения ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x^2+6x=t$

На ОДЗ:

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(a+b)}+b \geq (a+b)^{\log_4 5}-a$

$3^{\log_4(a+b)} \geq (a+b)^{\log_4 5}-(a+b)$

$(a+b)\left((a+b)^{\log_4 5-1}-1\right)$

$9^{\log_3 9}$ $4^{\log_3 9}$

$\log_3 4=x$ $3^x=4$

$4^2=9^x$

$(3^x)^2$

$9^x=9^1$

$4^{\log_9 3}=3^{\log_9 4}$ $9^x=4$

$\log_9 4=x$

$\log_9 3=2$

$2^{\log_4 16}=4$ $4^2=$

$\log_9 4 \, 16^{\log_4 2}=4$

4^2

$x^2+6x=a$

$x^2=a$

$6x=b$

$(5^y)'=$

$3^{\log_4 16}=9$

$16^{\log_4 3}$

$3^{\log_4 z} \geq z^{\log_4 5}-\cancel{z^{\log_4 4}}$ $3^{\log_3 z}$

$3^{\log_4 z}+3^{\log_3 z} \geq z^{\log_4 5}$

$\sqrt{3xy-3y-2x-2}$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$z^{\log_4 3} \geq z^{\log_4 5}-z^{\log_4 4}$

$3^{\log_4 z} \geq 5^{\log_4 z}-4^{\log_4 z}$

$3^y \geq 5^y-4^y$

$3^y+4^y \geq 5^y$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}$

$y=1$ $>$

$y=2$ $=$

$y>2$ $<$

функции монотонно возрастают

очевидно что произв возрастают с разной скоростью

$y<0$

сумма 2х дробей, знаменатель каждой из кот. меньше дроби справа

$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$?

$c^x=b$ $c^y=a$

$a^x=b^y$

$(c^y)^x=(c^x)^y$

$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

$b=c^x$ $a=c^y$

a^x b^y

$(c^y)^x=(c^x)^y$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА