МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 37

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

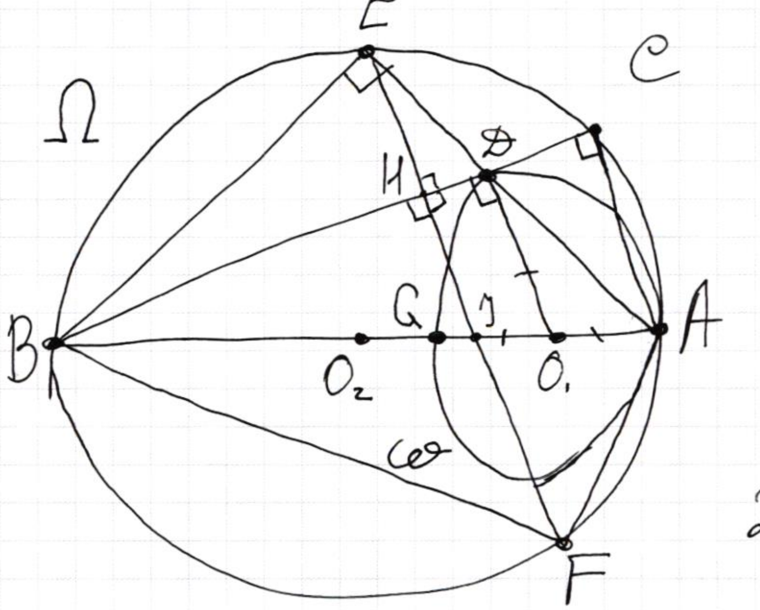
$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 4



1. Пусть O_1 – центр ω;
O_2 – центр Ω;
r – радиус ω;
R – радиус Ω;
$AB \cap \omega = G$
$EF \cap BC = H$
$EF \cap AB = J$

2. $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$

1) $\angle C = 90°$ (AB – диаметр), $\angle O_1DB = 90°$ (радиус ⊥ касательной)

2) $\angle B$ – общий

$\frac{CA}{DO_1} = \frac{CB}{DB}$ (1) $\qquad \frac{AB}{BO_1} = \frac{BC}{BD}$ (2)

Заметим $BC = BD + DC$, $BC = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$

(1): $\frac{CA}{r} = \frac{9}{13/2} \Rightarrow CA = \frac{18}{13} r$

(2): $\frac{AB}{AB - r} = \frac{9}{13/2} \Rightarrow 13AB = 18AB - 18r$

$5AB = 18r \Rightarrow AB = \frac{18}{5} r$

3. $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$) т. Пифагора: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$\left(\frac{18}{5}\right)^2 r^2 = \left(\frac{18}{13}\right)^2 r^2 + 9^2$

Задача № 4 (продолжение):

$$\left(\frac{9^2\cdot 2^2}{5^2}-\frac{9^2\cdot 2^2}{13^2}\right)r^2=9^2 \quad \Big| \times \frac{1}{9^2}$$

$$\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2-\left(\frac{2}{13}\right)^2\right)r^2=1$$

$$\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{13}\right)\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{13}\right)r^2=1 \quad \Big| \times (5\cdot 13)^2$$

$$(2\cdot 13-2\cdot 5)(2\cdot 13+2\cdot 5)\,r^2=(5\cdot 13)^2$$

$$(26-10)(26+10)\,r^2=(5\cdot 13)^2$$

$$13\cdot 36r^2=5^2\cdot 13^2$$

$$r^2=\frac{5^2}{6^2}\cdot 13 \Rightarrow \boxed{r=\frac{5\sqrt{13}}{6}}$$

4. $AB=\frac{18}{5}r$ (из п.2), AB – диаметр $\Rightarrow$
$2R=\frac{18}{5}\cdot r$ $\Rightarrow AB=2R$

$R=\frac{9}{5}r$, $R=\frac{9}{5}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{6}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$. $\boxed{R=\frac{3\sqrt{13}}{2}}$

5. $\triangle ADC$ ($\angle C=90°$) т. Пифагора:

$AD^2=DC^2+AC^2$, где $AC=\frac{18}{13}r=\frac{18\cdot 5\sqrt{13}}{13\cdot 6}=\frac{15\sqrt{13}}{13}$

$$AD^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15^2}{13}=\frac{5^2\cdot 13+15^2\cdot 4}{4\cdot 13}=\frac{5^2(13+36)}{2^2\cdot 13}=$$

$$=\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot\frac{49}{13} \Rightarrow AD=\frac{5\cdot 7}{2\sqrt{13}}=\frac{35\sqrt{13}}{26}$$

$$\cos\angle CDA=\frac{DC}{AD}=\frac{5}{2}\cdot\frac{26}{35\sqrt{13}}=\frac{13}{7\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{7}$$

6. $\angle EDK=\angle CDA$ (вертикальные) $\Rightarrow \cos\angle EDK=\frac{\sqrt{13}}{7}$

7. $\angle AEB=90°$ (AB – диаметр), причём EH по построению высота в $\triangle DEB$, $\Rightarrow$ $EH^2=BH\cdot HD=(BD-HD)\cdot HD$

$$EH^2=\left(\frac{13}{2}-HD\right)HD=\frac{13}{2}HD-HD^2$$

8. $\triangle EHD$ ($\angle H=90°$) т. Пифагора: $ED^2=EH^2+HD^2$

$$ED^2=\frac{13}{2}HD-HD^2+HD^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 4 (продолжение)

$ED^2 = \frac{13}{2} HD \Rightarrow HD = \frac{2ED^2}{13}$

из п.6:

$\cos\angle ED\cancel{H} = \frac{HD}{ED} = \frac{2ED^2}{13ED} = \frac{2ED}{13} = \frac{\sqrt{13}}{7} \Rightarrow$

$ED = \frac{13\sqrt{13}}{14}$

$EA = ED + DA = \frac{13\sqrt{13}}{14} + \frac{35\sqrt{13}}{26} = \frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\left(\frac{13}{7} + \frac{35}{13}\right) =$

$= \frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{169 + 49\cdot 5}{7\cdot 13} = \frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{169+245}{7\cdot 13} = \frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{414}{7\cdot 13} = \frac{207\sqrt{13}}{7\cdot 13}$

9. $\triangle AEB$ ($\angle E = 90°$): $AB = 2R \Rightarrow AB = 3\sqrt{13}$

$\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\angle EBA = \frac{EA}{AB}$; $\sin\angle EBA = \frac{207\sqrt{13}}{7\cdot 13}\cdot\frac{1}{3\sqrt{13}} =$

$= \frac{207}{7\cdot 13\cdot 3} = \frac{69}{91}$

10. $\angle EBA = \angle EFA$ (опираются на $\smile EA$)

$\boxed{\sin\angle EFA = \frac{69}{91}}$ $\boxed{\angle EFA = \arcsin\frac{69}{91}}$

11. $\triangle EJA \sim \triangle DO_1A$:

1) $DO_1, HF \perp BC \Rightarrow DO_1 \parallel HF \Rightarrow \angle ADO_1 = \angle AEJ$

2) $\angle A$ - общий.

$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_1}{AJ}$ (3) $\frac{AD}{AE} = \frac{DO_1}{EJ}$ (4)

(3): $\frac{\overset{7}{\cancel{35}}\cancel{\sqrt{13}}}{\underset{1}{\cancel{26}}}\cdot\frac{7\cdot\cancel{13}}{207\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{13}}{\underset{3}{\cancel{6}}\cdot AJ} \Rightarrow 7\cdot\frac{7}{207} = \frac{\sqrt{13}}{3AJ}$

Задача №4 (продолжение):

$$\frac{49}{69} = \frac{\sqrt{13}}{AJ} \Rightarrow AJ = \frac{69\sqrt{13}}{49}$$

Заметим, $AB = AJ + BJ \Rightarrow BJ = 3\sqrt{13} - \frac{69}{49}\sqrt{13} =$

$$= 3\sqrt{13}\left(1 - \frac{23}{49}\right) = 3\sqrt{13} \cdot \frac{49-23}{49} = \frac{3\sqrt{13}\cdot 26}{49}$$

(4): $\frac{35\sqrt{13}}{26} \cdot \frac{7\cdot 13}{207\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{13}}{6\cdot EJ}$

Получим: (3) $\equiv$ (4) $\Rightarrow EJ = AJ = \frac{69\sqrt{13}}{49}$

12. $\triangle BJF \sim \triangle EJA$:

1) $\angle BJF = \angle EJA$ (вертикальные);

2) $\angle BFJ = \angle JAE$ (опираются на $\smile BE$).

$\frac{AJ}{EJ} = \frac{FJ}{BJ}$, где $AJ = EJ \Rightarrow FJ = BJ =$

$= \frac{3\sqrt{13}\cdot 26}{49}$

Тогда $EF = EJ + JF$; $EF = \frac{69\sqrt{13}}{49} + \frac{3\cdot 26\sqrt{13}}{49} =$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{49}(23+26) = \frac{3\sqrt{13}\cdot 49}{49} = 3\sqrt{13}$$

13. $\triangle ABE (\angle E = 90°)$: т. Пифагора: $BE^2 = AB^2 - EA^2$

$$BE^2 = 3^2\cdot 13 - \frac{3^2\cdot 69^2}{7^2\cdot 13} = 9\cdot\left(\frac{7^2\cdot 13^2 - \cancel{3}\cdot 69^2}{7^2\cdot 13}\right) =$$

$$= \frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{91^2-69^2}{13} = \frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{(91-69)(91+69)}{13} = \frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{22\cdot 160}{13} =$$

$$= \frac{3^2}{7^2}\cdot\frac{2\cdot 11\cdot 2\cdot 5\cdot 16}{13} = \frac{3^2\cdot 8^2}{7^2}\cdot\frac{55}{13} \Rightarrow$$

$$= BE = \frac{3\cdot 8}{7}\cdot\sqrt{\frac{55}{13}} = \frac{3\cdot 8}{7\cdot 13}\cdot\sqrt{55\cdot 13}$$

14. $\triangle BEJ \sim \triangle FAJ$ (по вертикальным и опирающимся на одну дугу углам)

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AJ}{BJ}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4 (продолжение):

$$\frac{AF\cdot 7\cdot 13}{\cancel{3}\cdot \underset{4}{\cancel{8}}\cdot \sqrt{55\cdot 13}} = \frac{69\cancel{\sqrt{13}}}{\cancel{49}}\cdot \frac{\cancel{49}}{\cancel{3\sqrt{13}}\cdot \underset{13}{\cancel{26}}}$$

$$\frac{AF\cdot 7\sqrt{13}}{4\sqrt{55}} = \frac{3\cdot 23}{13} \Rightarrow AF = \frac{3\cdot 23\cdot 4\sqrt{55}}{13\cdot 7\cdot\sqrt{13}}$$

15. $\triangle AEF$:

$$S = \frac{1}{2}AF\cdot EF\cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{3\cdot 23\cdot \overset{2}{\cancel{4}}\sqrt{55}}{13\cdot 7\cancel{\sqrt{13}}}\cdot 3\cancel{\sqrt{13}}\cdot\frac{69}{91} =$$

$$= \frac{2\cdot 69^2\cdot 3\sqrt{55}}{91^2} = \frac{69^2\cdot 6\sqrt{55}}{91^2} = \boxed{\frac{28566\sqrt{55}}{8281}}$$

Ответ: $r_\omega = \frac{5\sqrt{13}}{6}$; $R_\Omega = \frac{3\sqrt{13}}{2}$; $S = \frac{28566\sqrt{55}}{8281}$; $\sin\angle AFE = \frac{69}{91}$, или $\angle AFE = \arcsin\frac{69}{91}$.

Задача №5.

Заметим, что $f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = [2/4] = 0$; $f(3) = [3/4] = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) = 0+0=0$

$f(5) = [5/4] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(7) = [7/4] = 1$; $f(8) =$
$= f(4) + f(2) = 0 + 0$; $f(9) = f(3) + f(3) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$;

$f(11) = [11/4] = 2$; $f(12) = f(4) + f(3) = 0$; $f(13) = [13/4] = 3$; $f(14) =$
$= f(7) + f(2) = 1$; $f(15) = f(3) + f(5) = 1$; $f(16) = f(8) + f(2) = 0$;

$f(17) = [17/4] = 4$; $f(18) = f(9) + f(2) = 0$; $f(19) = [19/4] = 4$; $f(20) =$
$= f(5) + f(4) = 1$; $f(21) = f(7) + f(3) = 1$; $f(22) = f(11) + f(2) = 2$;

Задача №5: (Продолжение):

$f(23) = [23/4] = 5$; $f(24) = f(4) + f(6) = 0$; $f(25) = f(5) + f(5) = 2$;

$f(26) = f(13) + f(2) = 3$; $f(27) = f(9) + f(3) = 0$.

1) Рассмотрим $f(n)$, где $n \in N$, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$

$f(n) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k) = f(p_1) + f(p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_k) =$

$= f(p_1) + f(p_2) + f(p_3 \cdot \ldots \cdot p_k) = \ldots = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_k) =$

$= [\frac{p_1}{4}] + [\frac{p_2}{4}] + \ldots + [\frac{p_k}{4}]$.

2) Рассмотрим $f(\frac{1}{m})$, где $m \in N$

$f(\frac{1}{m}) = f(\frac{m}{m^2}) = f(m) + f(\frac{1}{m}) + f(\frac{1}{m}) = 2f(\frac{1}{m}) + f(m) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{m}) = -f(m)$

Тогда $f(\frac{n}{m}) = f(n) + f(\frac{1}{m}) = \underbrace{f(n) - f(m)}$ (1)

Таким образом, для $n, m \in N$ верно (1).

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, так как $x, y \in N$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

На промежутке $[3; 27] \cap N$:

$f(n)$	n	кол-во n
0	3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27	10
1	5, 7, 10, 14, 15, 20, 21,	7
2	11, 22, 25	3
3	13, 26	2
4	17, 19	2
5	23	1

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5 (продолжение):

$f(x) < f(y)$

1) Если: $0<1$, $0<2$, $0<3$, $0<4$, $0<5$
2) Если: $1<2$, $1<3$, $1<4$, $1<5$
3) Если: $2<3$, $2<4$, $2<5$
4) Если: $3<4$, $3<5$
5) Если: $4<5$

Для 1): число пар $(x;y)$: $0<1$ — это $10\cdot 7$

$0<2$ — это $10\cdot 3$

$0<3$ — это $10\cdot 2$

$0<4$ — это $10\cdot 2$

$0<5$ — это $10\cdot 1$

Итог 1) $10\cdot(7+3+2+2+1) = 10\cdot 15 = 150$

Для 2): $1<2$: $7\cdot 3$

$1<3$: $7\cdot 2$

$1<4$: $7\cdot 2$

$1<5$: $7\cdot 1$

Итог 2) $7\cdot(3+2+2+1) = 7\cdot 8 = 56$

Для 3): $2<3$: $3\cdot 2$

$2<4$: $3\cdot 2$

$2<5$: $3\cdot 1$

Итог 3) $3\cdot(2+2+1) = 3\cdot 5 = 15$

Для 4) $3<4$: $2\cdot 2$

$3<5$: $2\cdot 1$

Итог 4) $2(2+1) = 6$

Для 5) $4<5$: $2\cdot 1$

Итог 5) 2.

Задача №5 (продолжение):

Таким образом, общее число пар $(x;y)$:

$150+56+15+6+2=206+23=229$

Ответ: 229.

Задача №2:

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x\geqslant 0 & (1) \\ (3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2 & (2) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (3) \end{cases}$$

(2): $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2=15xy-2x-3y+2$

$4x^2+9y^2+2x+3y-15xy=2$

(3): $3x^2-6x+\underline{3}+3y^2-4y+\underline{\underline{\frac{4}{3}}}-\underline{3}-\underline{\underline{\frac{4}{3}}}=4$

$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{3}$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

(2): $4x^2+2x+\frac{1}{4}+9y^2+3y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=2+15xy$

$4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+9\left(y+\frac{1}{6}\right)^2=2{,}5+15xy$

Задача №6

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b \\ ax+b\geqslant 8x^2-34x+30 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6 (продолжение):

$$\begin{cases} 2+\dfrac{1/2}{x-1} \geqslant ax+b & (1) \\ ax+b \geqslant 8x^2-34x+30 & (2) \end{cases}$$

, Пусть $2+\frac{1/2}{x-1} = f(x)$

(2): Рассмотрим $g(x) = 8x^2-34x+30$

$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$y_B = 8\cdot\frac{17^2}{8^2} - 34\cdot\frac{17}{8} + 30 = \frac{17^2}{8} - 2\cdot\frac{17^2}{8} + 30 = -\frac{17^2}{8}+30$

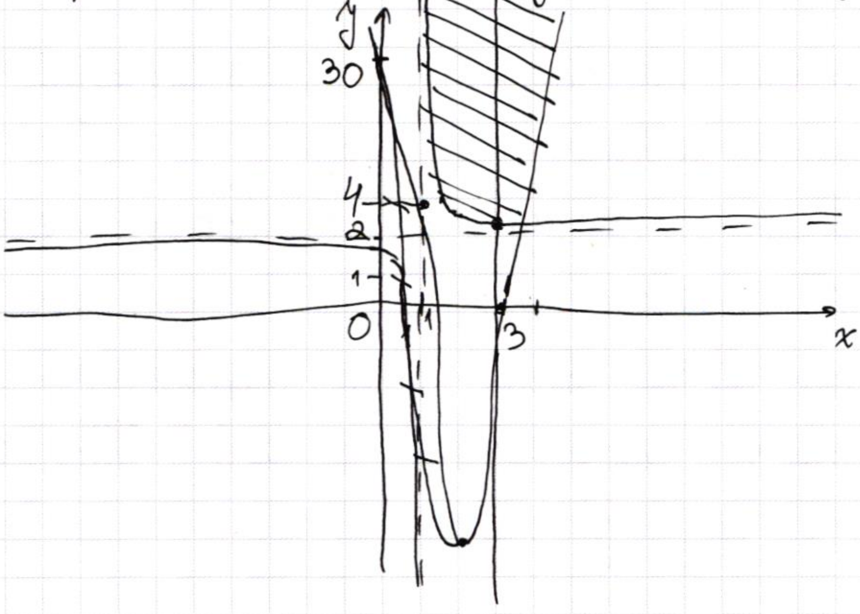
$g(x) = 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2 - \frac{17^2}{8}+30$

$-\frac{17^2}{8}+30 = -\frac{17}{8}\cdot 17+30 = -17\cdot\left(2+\frac{1}{8}\right)+30 = -4+\frac{-17}{8} =$

$= -6\frac{1}{8}$

$g(x) = 8\left(x-2\frac{1}{8}\right)^2 - 6\frac{1}{8}$

Изобразим $f(x)$ и $g(x)$ в xoy:



Задача № 6 (продолжение)

$g(3) = 8\cdot(3-2\frac{1}{8})^2 - 6\frac{1}{8} = 8\cdot\frac{7^2}{8^2} - 6\frac{1}{8} = 7\cdot\frac{7}{8} - 6\frac{1}{8} =$

$= 6\frac{1}{8} - 6\frac{1}{8} = 0$

$g(0) = 8\cdot(0-2\frac{1}{8})^2 - 6\frac{1}{8} = \frac{17^2}{8} - 6\frac{1}{8} = 17\cdot(2+\frac{1}{8}) - 6\frac{1}{8} =$

$= 34 + \frac{17}{8} - 6\frac{1}{8} = 34 - 6 + \frac{16}{8} = 3\cancel{2}6 - 6 = 30$

$g(1) = 8\,(1-2\frac{1}{8})^2 - 6\frac{1}{8} = 8\cdot(\frac{-9}{8})^2 - 6\frac{1}{8} = \frac{81}{8} - 6\frac{1}{8} =$

$= 10\frac{1}{8} - 6\frac{1}{8} = 4$

$f(x)$ - гипербола, $x = 1$ и $y = 2$ - ассимптоты,

Тогда так как $\cancel{f}\ g(1) = 4 > 2$, то пересечения с нижней ветвью гиперболы нет.

Тогда заштрихованная область - множество точек удовлетворяющих условию:

$$\begin{cases} y \leq f(x) \\ y \geq g(x) \end{cases}, \text{где } \cancel{y = ax+b}$$

$f(3) = 2 + \frac{1/2}{3-1} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

$y = ax + b$ должна на области $(1; 3]$ находится целиком в заштрихованной области.

Однако очевидно, что $y = ax + b$ всегда пересекает ось Oy в точке $(0; b)$, но при этом $y = ax + b$ должно быть выше точки пересечения гиперболы и $x = 3$, то есть $(3; 2\frac{1}{4})$. То есть

$2\frac{1}{4} \leq 3a + b \Rightarrow a \geq \frac{3}{4} - \frac{b}{3}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 6 (продолжение):

Тогда если точку $(0;b)$ разместить бесконечно высоко, а точку с $x=3$ выше, чем $2\frac{1}{4}$, то полностью $y=ax+b$ будет лежать в нужной области.

$b \to +\infty$

$a \geq \frac{3}{4} - \frac{b}{3}$

То есть $b=t$, $a \geq \frac{3}{4} - \frac{t}{3}$, при $t \to \infty$

Ответ: $a \geq \frac{3}{4} - \frac{t}{3}$, $b = t$, где $t \to +\infty$.

№ 3.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Пусть $x^2+6x = t$

ОДЗ: $x^2+6x > 0$ или $t > 0$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq -t$

$3^{\log_4 t} - 5^{\log_4 t} \geq -(4^{\log_4 t})$, Пусть $\log_4 t = k$

$3^k - 5^k \geq -4^k$

$3^k + 4^k \geq 5^k$

Продолжение задачи 3.

По теореме Пифагора не трудно заметить, что равенство выполняется при $k=2$, а при $k \geq 2$ тоже, так как 3^k+4^k возростает быстрее 5^k.

Значит $k \geq 2$

$\log_4 t \geq 2$

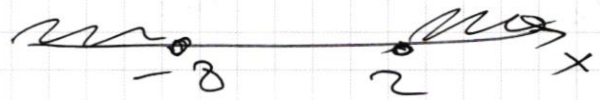
$t \geq 4^2$

$t \geq 16$, на ОДЗ $t>0$ – верн.

$x^2+6x \geq 16$

$x^2+6x-16 \geq 0$

$(x+8)(x-2) \geq 0$



Ответ: $(-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\cos 2\beta \pm 4\sin 2\beta + \sin 2\alpha\sqrt{17} = -\frac{8\sqrt{17}}{17}$

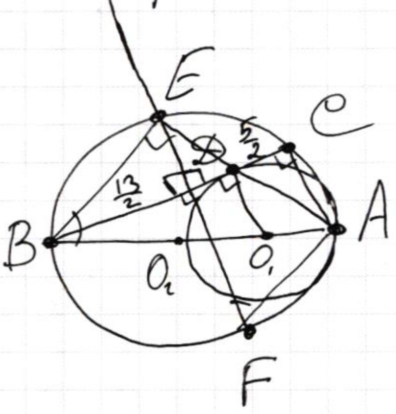
$91 - 69 = 22$

$49\cdot 5 = (50-1)\cdot 5 = 250 - 5 = 245$

$245 + 169 = 414$

$70+21=91$

$207 : 3 = 69$



1) $BC = 9$

2) $\triangle DO_1B \sim \triangle CAB$: ug-

$\frac{CA}{DO_1} = \frac{9}{13/2} = \frac{18}{13}$ $\qquad 2\cdot 13 = 26$

$CA = \frac{18}{13}\cancel{R}\, r$

$\frac{18}{13} = \frac{AB}{BO_1} \Rightarrow \cancel{AE}$

$\frac{18}{13} = \frac{AB}{AB-r} \Rightarrow 13AB = 18AB - 18r$

$5AB = 18r$

$AB = \frac{18}{5}r$

$9^2 + \left(\frac{18}{13}r\right)^2 = \frac{18}{5}r$

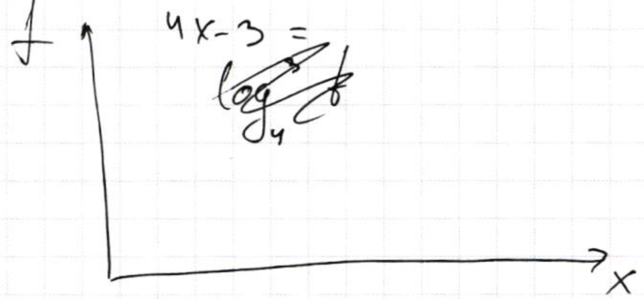
$\frac{EH}{BH} = \frac{HD}{EH}$ $\qquad EH^2 = HD\cdot BH = HD\cdot\left(\frac{13}{2} - HD\right)$

$ED^2 = EH^2 + HD^2 = HD\cdot\left(\frac{13}{2}-HD\right) + HD^2$

$(70-1)^2 = 70^2 - 140 + 1 = 4900 - 140 + 1 = 4761$

$$\begin{array}{r} \times\, 4761 \\ 6 \\ \hline 28566 \end{array}$$

$(90+1)^2 = 8100 + 180 + 1 = 8281$



$f(ab) = f(a) + f(b)$

$1 = x + 1 \Rightarrow x = 0$

$f(5) = f(1) + f(5) =$

$\cancel{f(0) = f(0) + f(0)}$

$\cancel{f(0) = 2f(0)}$

$\cancel{f(0) = 0}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(21) = 1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$b \to +\infty$

$3 < y \le 27$

$\frac{1}{27} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{3}$

$8\left(x - \frac{17}{8}\right)^2 - 6\frac{1}{8} =$

$= 2 + \frac{1}{2^{x-2}}$

$f\left(\frac{1}{25}\right) = f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{25}\right) = 2f\left(\frac{1}{5}\right)$

$ax + b \ge 2\frac{1}{4}$ $\quad a \ge \frac{3}{4} - \frac{b}{3}$

$3a \ge 2\frac{1}{4} - 6$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{27}\right)$

$f\left(\frac{1}{m}\right) = f\left(\frac{m}{m^2}\right) = f(m) + f\left(\frac{1}{m^2}\right)$

$\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{27}\right)$ $= 4 + f\left(\frac{1}{27}\right)$

$y = ax + b$

$y <> ax + b >$

$= f(m) + 2f\left(\frac{1}{m}\right)$

$f(1/27) = -2$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$f\left(\frac{1}{m}\right) = -f(m)$

$\left(\frac{3}{4} - \frac{t}{3}; t\right)$ $\quad t \to \infty$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)} = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha \left(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta\right) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = t \Rightarrow \cos 2\alpha^2 + \sin^2 2\alpha = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-t^2}$

$\sin 2\beta = p \Rightarrow \cos 2\beta = \pm\sqrt{1-p^2}$

$t \cdot \sqrt{1-p^2} + \sqrt{1-t^2} \cdot p = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$t\left(1-p^2-p^2\right) \pm 2t \cdot p\sqrt{1-p^2} + t = -\frac{8}{17}$

$\sqrt{t^2-(tp)^2} + \sqrt{p^2-(tp)^2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$t - 2tp^2 \pm 2tp\sqrt{1-p^2} + t = -\frac{8}{17} \quad \Big| : 2$

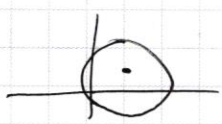
$t - tp^2 \pm tp\sqrt{1-p^2} = -\frac{4}{17} \quad \Big| : t$

$1-p^2 \pm p\sqrt{1-p^2} = -\frac{4}{17t}$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} - 3 - \frac{4}{3} = 4$

$3(x^2-2x+1) + 3\left(y^2 - 2\cdot y\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) = 7 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$4x^2+9y^2+2x+3y-15xy=2$

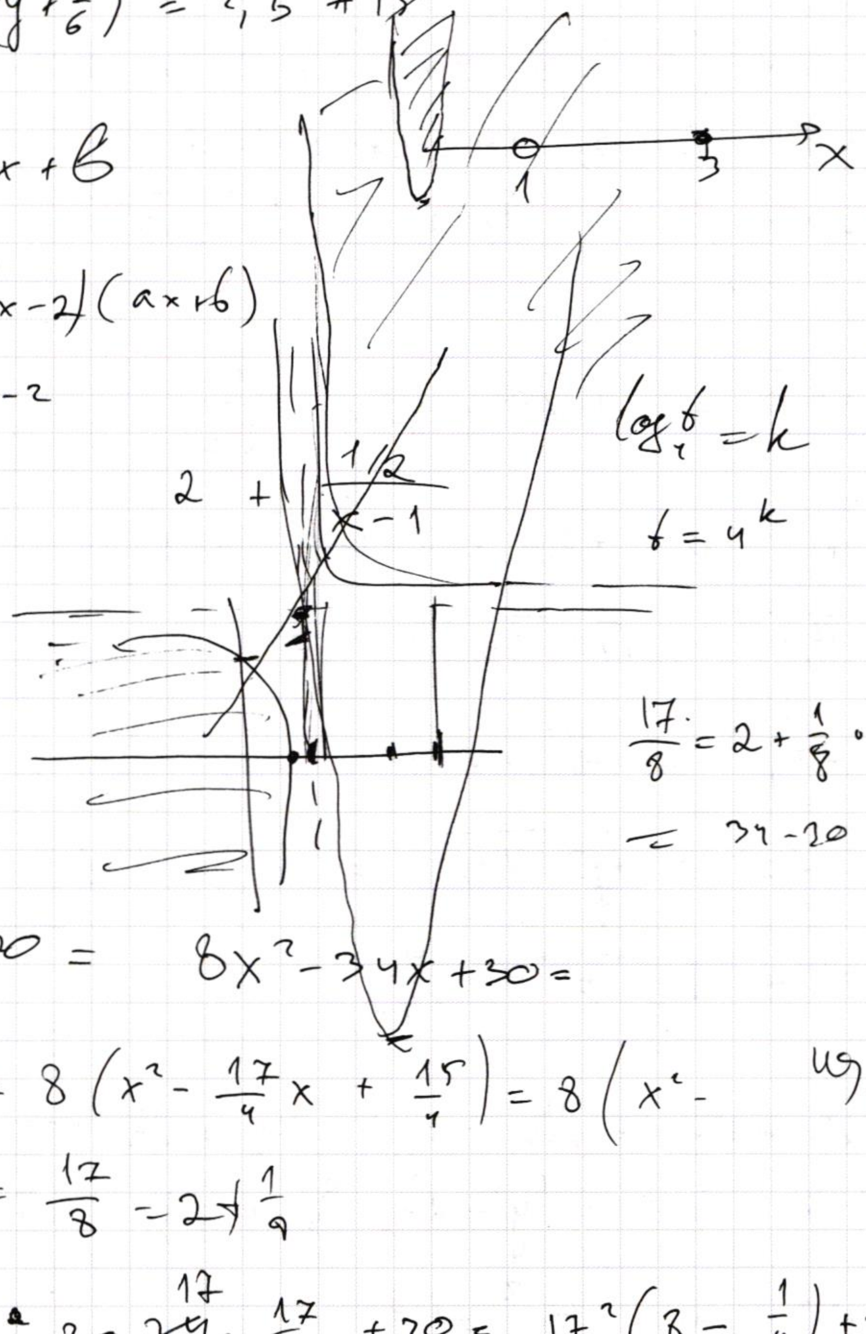
$4x^2+2x+\frac{1}{4}+9y^2+3y+\frac{1}{4}=2+15xy$

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

$4\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+9\left(y^2+2\cdot y\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{36}\right)=2,5+15xy$

$4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+9\left(y+\frac{1}{6}\right)^2=2,5+15xy$, $\cancel{15y\cdot x}+$

$4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(y+\frac{1}{6}\right)^2=2,5+15$



$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b$

$4x-3\geqslant(2x-2)(ax+b)$

$\begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x-2 \\ \hline \cancel{4}x \cancel{-4} & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$

$2+\frac{1/2}{x-1}$

$\log_4 b=k$

$b=4^k$

$\frac{17}{8}=2+\frac{1}{8}\cdot 17=$

$=34-20$

$8x^2-34x+20=\quad 8x^2-34x+30=$

$=8\left(x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{4}\right)=8\left(x^2-\right.$ $\log\frac{8}{6}$

$-\frac{b}{2a}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2+\frac{1}{8}$

$y_0=17^2\cdot 8-\cancel{34}^{17}\cdot\frac{17}{\cancel{8}_4}+30=17^2\left(8-\frac{1}{4}\right)+30=$

$=17^2\cdot\frac{31}{4}+30$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)