МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство
$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. ① $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k, \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n. \end{array}\right.$ $k, n \in Z$.

2.1) Если $2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k, k\in Z$, то

$2\beta = -2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \quad |\cdot 2$

$4\beta = -4\alpha - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 4\pi k$, и тогда 2-е уравнени системы ① имеет вид:

$\sin(2\alpha - 4\alpha - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 4\pi k) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(-2\alpha - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 4\pi k) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

Т.к. период $f(x) = \sin x$ $T = 2\pi$, то $4\pi k$ на значение не повлияет:

$-\sin(2\alpha + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-(\sin 2\alpha \cdot \frac{3}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{5}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ (формула синуса суммы)

$-3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 5\sin 2\alpha = -2$

$2\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -2$

$\sin 2\alpha = 2\cos 2\alpha - 1$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ (основ. триг. тожд.)

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$\sin(2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) = 2\sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt5})\cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(\arccos\frac{2}{\sqrt5}) = \frac{4}{5}$

$\cos(2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) = 1 - 2\sin^2(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) = \frac{3}{5}$

Т.к. $tg\alpha$ определён, то $\cos\alpha \neq 0$. Поделю на $\cos^2\alpha$ обе части:

$3\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1 = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$ Пусть $tg\alpha = t$. Тогда $3t^2 + 2t - 1 = 0$

$(t+1)(3t-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

2.2) Если $2\alpha+2\beta=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, то

$$2\beta=-2\alpha+\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n \quad |\cdot 2$$

$$4\beta=-4\alpha+2\pi+2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+4\pi n,$$ и 2-е ур-е системы (1) имеет вид:

$$\sin\left(2\alpha-4\alpha+2\pi+2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+4\pi n\right)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$$

Аналогично п. 2.1, можем избавиться от $2\pi+4\pi n$.

$$\sin\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-2\alpha\right)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{5}\cos 2\alpha-\frac{3}{5}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}\quad |\cdot 5$$ (формула синуса разн.)

$$4\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha=-2$$
$$2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha+1=0$$
$$2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$$
$$-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha=0$$

Аналогично п. 2.1, разделим на $\cos^2 x\neq 0$

$$-\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+3=0$$

Пусть $\operatorname{tg}x=t$, тогда $-t^2+2t+3=0$

$$t^2-2t-3=0$$
$$(t+1)(t-3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=-1\\ \operatorname{tg}x=3\end{array}\right.$$

Ответ: $-1;\ \frac{1}{3};\ 3$.

№2. $\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)}\\ x^2-12x+36y^2-36y=45\end{cases}$

$$x^2-12x+36y^2-36y=45$$
$$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9$$
$$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$$

~~Пусть $\sqrt{x-6}=a;\ \sqrt{2y-1}=b$. Тогда система имеет вид:~~
~~$a,b\geq 0$~~

~~(*) $\begin{cases} a^2-6b^2=ab\\ a^4+9b^4=90\end{cases}$~~

~~$a^2-6b^2-ab=0$~~

~~Пусть $b=0$. Тогда система имеет вид $\begin{cases}a^2=0\\ a^4=90\end{cases}$~~

~~Такая система не имеет корней $(0\neq 90)\Rightarrow b\neq 0$.~~

~~Значит можно делить на $b^2\neq 0$.~~

~~$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-6=0$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $\frac{a}{b}=t$. Тогда $t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \end{array}\right.$

1) Если $\frac{a}{b}=3$, то $a=3b$. Подставив во 2-е ур-е системы (*) получаем:

$81b^4+9b^4=90$

$b^4=1 \Rightarrow b=\pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right.$ — не уд., т.к. $a, b \geq 0$.

$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-6}=3 \\ \sqrt{2y-1}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$

2) Если $\frac{a}{b}=-2$, то $a=-2b$, значит, a и b разных знаков, но по условию a и $b \geq 0$, т.е. ситуация $a=-2b$ невозможна (стоит отметить, что $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$ быть не может, т.к. $b \neq 0$).

Если ~~же~~ мы будем рассматривать замену $\begin{cases} \sqrt{6-x}=a \\ \sqrt{1-2y}=b \end{cases}$, то первое ур-е

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$. Тогда система будет иметь вид:

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

Рассм. первое ур-е получившейся системы:

$a-\sqrt{ab}-6b=0$

Если $b=0$, то должны выполняться условие $\begin{cases} a=0 \\ a^2=90 \end{cases}$, что невозможно $(0 \neq 90)$, т.е. $b \neq 0$.

$a-\sqrt{ab}-6b=0 \quad |:b$

$\frac{a}{b}-\frac{\sqrt{ab}}{b}-6=0$

Заметим, что $ab \geq 0$, т.е. a и b одинак. знаков.

1) Пусть $b>0 \Rightarrow a \geq 0$: $\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - 6 = 0$

Если $t = \sqrt{\frac{a}{b}}$, то $t^2 - t - 6 = 0$

$t \geq 0$ $\quad (t-3)(t+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \text{ — не уд. } t\geq 0 \end{array}\right.$

$t = 3 \Rightarrow \frac{a}{b} = 9$, $a = 9b$

Подставим это значение a во второе ур-е:

$81b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \text{ — не уд. усл. } b>0 \end{array}\right.$

$b = 1 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=1. \end{cases}$

2) Пусть $b<0 \Rightarrow a \leq 0$: $\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{(-a)(-b)}}{(-b)} - 6 = 0$

$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{-a}{-b}} - 6 = 0$

Если $t = \sqrt{-\frac{a}{b}}$, то $-t^2 + t - 6 = 0$

$t \geq 0$ $\quad t^2 - t + 6 = 0$

$\cancel{(t+3\ (t-3)(t+2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2. \end{array}\right.}$

$D = 1 - 4\cdot 6 < 0 \Rightarrow$ решений нет.

Ответ: $(15; 1)$

№3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

1) Поскольку $(10x - x^2) > 0$ (из-за логарифма), то $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + \cancel{(10x-x} \ 5^{\log_3(10x-x^2)}$

2) $(10x - x^2)^{\log_3 4} = 4^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 = (10x - x^2)^{\log_3 3} = 3^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $\log_3(10x - x^2) = t$. Тогда $3^t + 4^t \geq 5^t$

$3^t + 4^t \geq 5^t \ \Big| : 5^t > 0$ (показ. ф-я)

$\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1.$

Заметим, что $f(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^t$ и $g(t) = \left(\frac{4}{5}\right)^t$ — убывающие ф-ии, т.к. $\frac{3}{5} < 1$ и $\frac{4}{5} < 1$, ф-ии показательные. Значит $h(t) = f(t) + g(t)$ тоже убывает как сумма убывающих ф-ий.

Значит, $h(t) \geq 1$ верно до тех пор, пока ~~в некоторой точке~~ гр-к ф-ии $h(t)$ находится выше константы $y = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что при $t_0 = 2$ $h(t_0) = 1$, т. е. неравенство верно при $t \leq 2$ (~~при~~ чем меньше t, тем больше $h(t)$)

Изначальное неравенство равносильно неравенству $t \leq 2$.

$\log_3(10x - x^2) \leq 2 = \log_3 9$

$\Updownarrow$

① $10x - x^2 > 0$

② $\cancel{(3-1)}(10x - x^2 - 9) \leq 0$

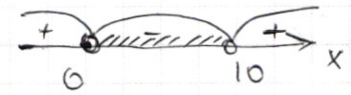
①: $x^2 - 10x < 0$

Рассм. $f_1(x) = x^2 - 10x$:

$D(f_1) = R$

$f_1(x) = 0$ при $x = 0$; $x = 10$

$f_1(x)$ непрерывна на $D(f_1)$:



$x \in (0; 10)$

② $x^2 - 10x + 9 \geq 0$

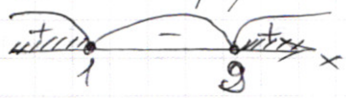
$\cancel{(x+9}(x-9)(x-1) \geq 0$

Рассм. $f_2(x) = (x-9)(x-1)$:

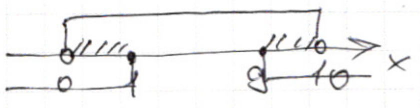
$D(f_2) = R$

$f_2(x) = 0$ при $x = 1$; $x = 9$

$f_2(x)$ непрерывна на $D(f_2)$:

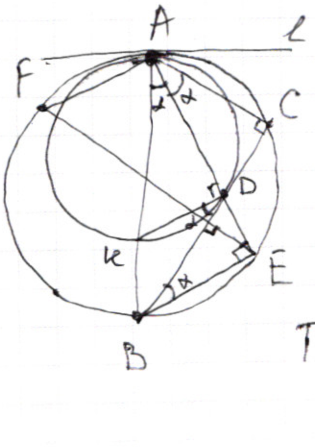


$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; \cancel{+\infty}\ 10)$.

№ 4.



Дано: $BD = \frac{17}{2}$; $CD = \frac{15}{2}$

Найти: r — радиус ω

R — радиус Ω

$\angle AFE$

S_{AEF}

Решение:

1) Пусть $AB \cap \omega$ в т. A и K и пускай $\angle KAD = \alpha$.

Тогда $\angle KDB = \angle KAD = \alpha$ (по теор. об угле между касат. и хордой)

Поскольку AB — диаметр Ω, то AB содержит центр Ω O, а также радиус из O, перпенд. — ый общей касательной l, A — осн. перп., но вместе с тем радиус из O_2 — центра ω перп. l и приходит в т. A $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} O_1A \perp l \\ O_2A \perp l \\ O_2A \cap O_1A = A \end{array}\right| \Rightarrow A, O_1, O_2 \in AB$$

(принад. одной прямой)

Тогда $AK \cap O_2 \Rightarrow AK$ — диаметр.

Т.к. $KD \perp AD$ ($\angle ADK$ опирается на диаметр AK), а также $BE \perp AE$ (аналогично для $\angle AEB$), то

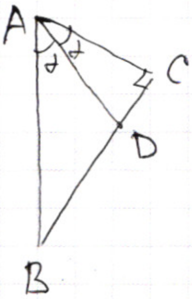
$$\left.\begin{array}{l} KD \perp AE \\ BE \perp AE \end{array}\right| \Rightarrow KD \parallel BE$$ (перп. к одной прямой) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KDB = \angle DBE = \alpha$ (накр. леж. углы при парал. пр.)

Однако $\angle CBE$ опирается на дугу CE окруж. Ω, на которую опирается $\angle CAE \Rightarrow \angle CAE = \angle CBE = \alpha$ (по теор. о впис. углах)

$\Rightarrow \cancel{\angle CBE =} \angle CAE = \angle EAB \Rightarrow AE$ — биссектриса.

2) Рассм. $\triangle ABC$: $BC = BD + DC = 16$, $\angle C = 90^\circ$ ($\angle ACB$ опир. на диаметр AB)



По св-ву биссектрисы: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{17}{15}$

Пусть $AB = 17x$, тогда $AC = 15x$.

По т. Пиф.: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$289x^2 = 225x^2 + 256$

$64x^2 = 256$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ $(x > 0)$

$AB = 34$

$AC = 30$

Поскольку AB — диаметр, то $R = \frac{AB}{2} = 17$.

3) По теореме о кас. и секущей для ω: $BD^2 = BK \cdot BA$

$BK = AB - AK = 34 - 2r$

$\frac{289}{4} = (34 - 2r) \cdot 34 \quad | : 34$

$\frac{17}{8} = 34 - 2r \quad | \cdot 8$

$17 = 272 - 16r$

$16r = 255$

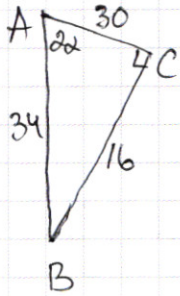
$r = \frac{255}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $\angle AFE$ опирается на дугу AE окруж. Ω, на которую опирается $\angle ABE \Rightarrow \angle AFE = \angle ABE$ (по т. о впис. углах)

Т.к. $\triangle ABE$ прямоуг. с прямым углом E (док-но в п. 1), то $\angle ABE + \angle BAE = 90^\circ \Rightarrow \angle ABE = \frac{\pi}{2} - \alpha$

В $\triangle ACB$: $\sin A = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} = \sin 2\alpha$



$\cos A = \frac{30}{34} = \frac{15}{17} = \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{8}{17}$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{4}{17}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{15}{17}$

$\cos^2\alpha = \frac{16}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$, но 2α — это остр. угол в прямоуг. $\triangle \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha$ — остр угол $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

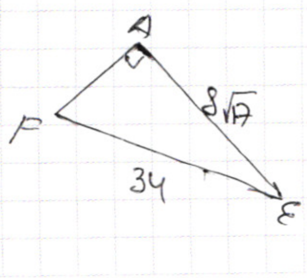
Поскольку $\angle ABE$ и α — острые углы в прямоуг. $\triangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(ABE) = \frac{AE}{AB} = \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle ABE = \angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$

5) $\angle BAE = \angle CAE \Rightarrow BE = CE$ (хорды, стягивающие равные углы) $\Rightarrow \triangle CBE$ — равнобедр. В $\triangle CBE$: $EF \cap BC = M$, причем $EM \perp BC$ (дано) $\Rightarrow EM \perp BC$, EM — бисс., мед., высота (в р/бедр. $\triangle$, высота, провед. к основ.)

Однако если мы опустим радиус из O, на хорду BC, то он будет ей перп-рен и поделит пополам (по теор. о радиусе, пров. перп-но к хорде), т.е. $O, M \perp BC$, $EM \perp BC$ $\Rightarrow O, M, E \in$ одной прямой, но этой же прямой принадлежит точка $F \Rightarrow EF \cap O, \Rightarrow EF$ — диаметр, $EF = AB = 34$.

Из п.4 $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = \frac{34 \cdot 4}{\sqrt{17}} = 8\sqrt{17}$.



~~По т. синусов для $\triangle AFE$:~~

$\angle FAE$ опир. на диаметр $FE \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$

В ΔFAE: $\angle A = 90°$, ~~sin E~~ $= \cos E = \frac{\cancel{48}\sqrt{17}}{\cancel{34}\,17} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin E = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (осн. триг. тожд.)

$S_{FAE} = \frac{1}{2}\cdot \sin E \cdot AE \cdot FE = \frac{48\cancel{\sqrt{17}}\cdot 34}{\cancel{2\sqrt{17}}} = 136$

Ответ: $R = 34$, $r = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$, $S_{FAE} = 136$.

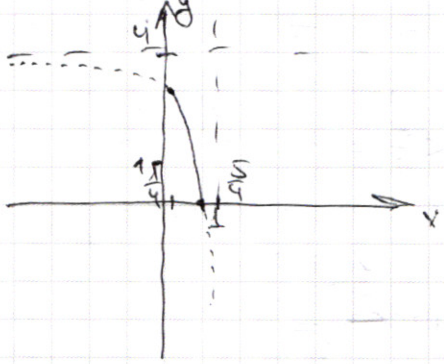
№6. $4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ a, b — ? верно при всех $x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

Рассмотрим части неравенства.

1) $y_1 = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ — гипербола, смещённая на $\frac{5}{4}$ в направ. полож. полуоси Ox и на 4 в направ. полож. полуоси Oy.

На промежутке $x \in (-\infty; \frac{5}{4})$ содержится одна ветвь гиперболы, убывающая и стремящ. к $-\infty$ при $x \to \frac{5}{4}$.

Значит на $[\frac{1}{4}; 1]$ гр-к ~~на~~ гиперболы имеет вид:



$y(\frac{1}{4}) = 3$
$y(1) = 0$

На $[\frac{1}{4}; 1]$ $y = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ монотонна и непрерывна.

2) $y_2 = ax+b$ — прямая с угл. коэфф. $k = a$ и ~~проход. через точку (0; b)~~ свобод. членом $= b$.

$y(\frac{1}{4}) = \frac{a}{4}+b$, $y(1) = a+b$.

3) $y_3 = -32x^2+36x-3$ — парабола, ветви вниз $(-32<0)$.

вершина $x_в = \frac{\cancel{36}\,9}{\cancel{32}\cdot 2\,16} = \frac{9}{16}$, $\frac{1}{4} < x_в < 1$.

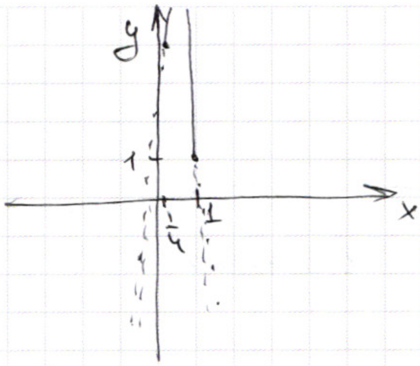
$y(x_в) = \frac{-81\cdot 32}{16\cdot 16} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 = \frac{-162+324-48}{16} = \frac{114}{16} = \frac{57}{8}$

На $[\frac{1}{4}; 1]$ график имеет вид:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

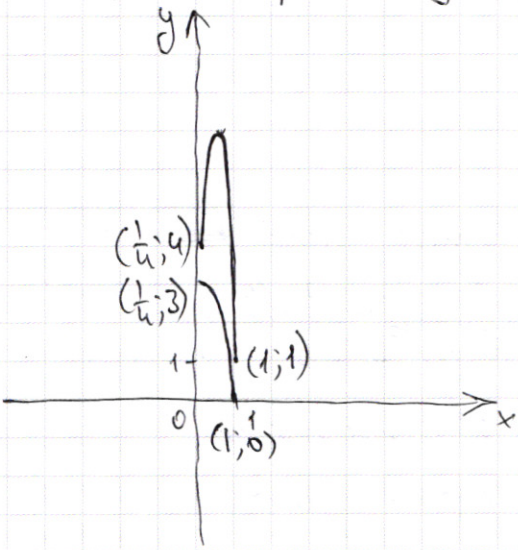
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$y(\frac{1}{4}) = \frac{-32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = 4$

$y(1) = 1$

Объединю гр-ки y_1 и y_3: ~~тогда~~ условию задачи удовл. только такие a и b, при которых прямая y_2 проходит между y_1 и y_3, либо касается их.



Чтобы y_2 была ниже y_3 достаточно, чтобы y_2 проходила или была ниже точек $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$, иначе появл. пересечения с параболой и области, где $y_2 > y_3$.

$$\begin{cases} y_2(\frac{1}{4}) \le 4 \\ y_2(1) \le 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} + b \le 4 \\ a + b \le 1 \end{cases}$$

Рассм. прямую $y_2 = -4x+5$, т.е. проход. через $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$.

Проверим, будут ли у неё пересечения с y_1:

$$\begin{cases} y_2 = -4x+5 \\ y_1 = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}} \end{cases}$$

$y_2 = y_1 \Rightarrow 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}} = -4(x-\frac{5}{4})$

Пусть $x - \frac{5}{4} = t$. Тогда: $4 + \frac{1}{t} = -4t$

$\frac{4t^2+4t+1}{t} = 0$

$\frac{(2t+1)^2}{t} = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$, $y = 2$

Получается, что при $a=-4$ и $b=5$ прямая находится „впритык" ~~на~~ к параболе y_3 и имеет общую точку с y_1. Эта точка является либо касанием, либо пересечением. Проверю её „на касание". ~~Так как при $x=\frac{1}{4}$ $y_2=4$, а $y_3=3$, и при $x=1$ $y_2=1$, а $y_1=0$, то~~

Ур-е касательной имеет вид:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),\text{ где } (x_0;y_0) \text{ — т. касания.}$$

Подставив вместо $(x_0;y_0)$ точку $(\frac{3}{4};2)$ получим:

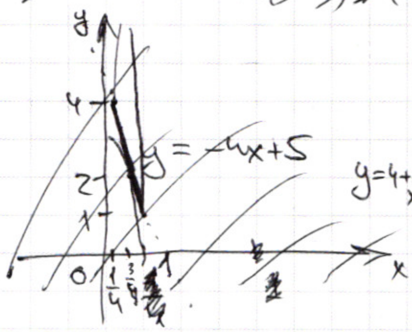
$$y-2=f'\left(\frac{3}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

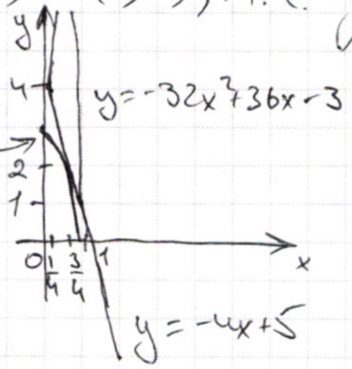
$$f'(x)=\left(4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}\right)'=\frac{-1}{(x-\frac{5}{4})^2},\quad f'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{-1}{(\frac{1}{2})^2}=-4$$

$$y-2=-4\left(x-\frac{3}{4}\right)$$

$$y=-4x+5$$

Оказалось, что y_2 коснулась y_1. Получается, что „понизить" прямую y_2 мы не можем, т.к. y_2 пересечёт y_1 и появятся решения, при которых $y_2<y_1$, а „повысить" прямую тоже невозможно — пересечёт параболу. Иначе говоря, ~~проходя через точки~~ наша прямая фиксирована в точках $(\frac{1}{4};4)$, $(\frac{3}{4};2)$ и $(1;1)$, т.е. других значений a и b нет.





Ответ: $a=-4$; $b=5$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

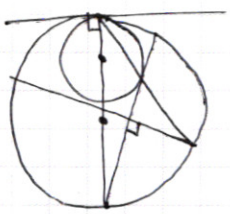
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

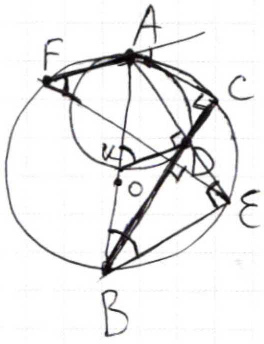
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a-6b=\sqrt{ab}$





r

R

$\angle AFE$

S_{AFE}

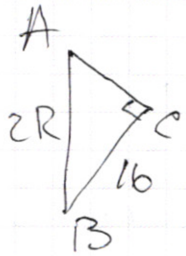
$CD=\frac{15}{2}$

$BD=\frac{17}{2}$

$AC \parallel FE$

$KD \parallel BE$

$BC=16$



$BD^2=(2R-2r)(2R)$

$256=4R^2-4rR$

$64=R^2-rR$

$R^2-rR-64=0$

$R^2-rR+\frac{r^2}{4}=\frac{r^2}{4}+64$

$(R-\frac{r}{2})^2=\frac{r^2}{4}+64$

$R=\frac{r}{2}\pm\sqrt{\ }$

$4x+\frac{4}{4x-5}\le ax+b\le$

$32x^2-36x-3$

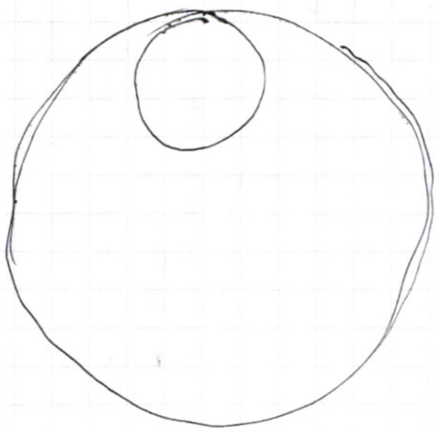
$\frac{4(8x^2-9x+1)-7}{4}$

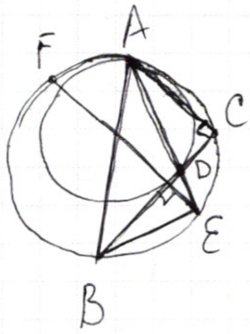
$y=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

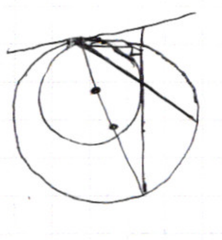
$y'=\left(\frac{1}{x-\frac{5}{4}}\right)'=$

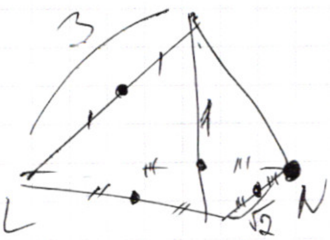
$=-\frac{1}{(x-\frac{5}{4})^2}=$

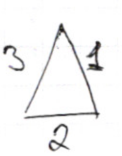
$=-\frac{1}{(x-\frac{5}{4})^2}$











$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]\leq p$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

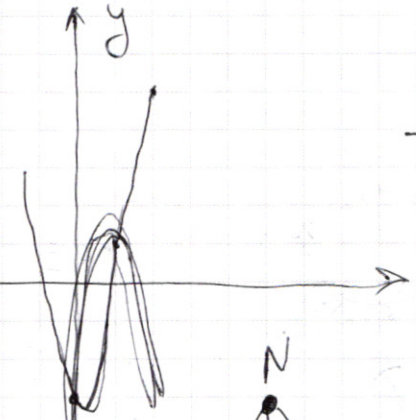
$f(11)=2$

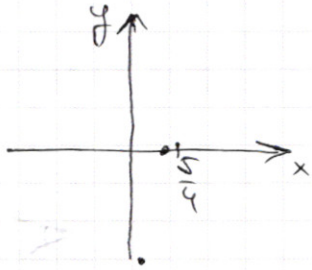
$f(13)=3$

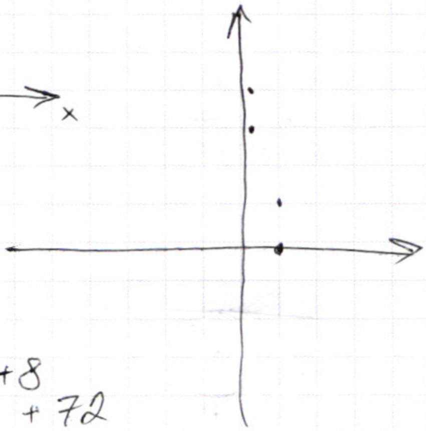
$f(17)=4$

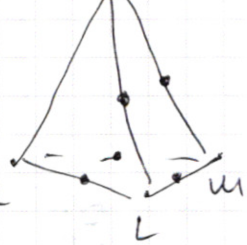
$f(19)=4$

$f(23)=5$









$+8$

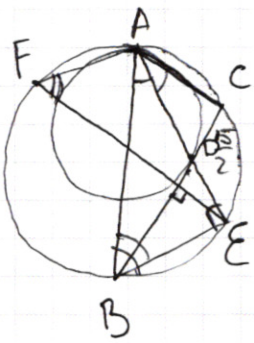
$-64+72$

$-32\cdot4+36\cdot2-3$

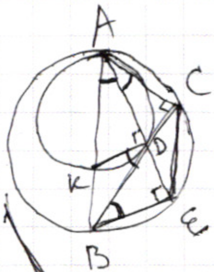
$-\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3=-5+9=4$

$x_в=\frac{\cancel{36}\,9}{2\cdot\cancel{32}\,8}=\frac{9}{16}$

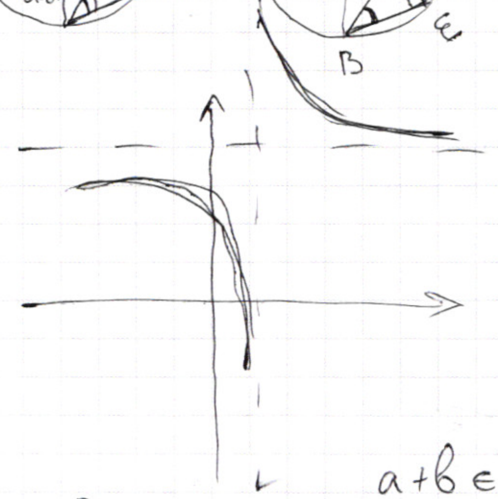
если $ax+b\leq-32x^2+36x-3$ на $\left[\frac{1}{4};1\right]$.



AE-диаг?



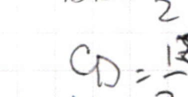
BD



$BD=\frac{17}{2}\ \frac{16}{16}>\frac{9}{16}>\frac{4}{16}$

$CD=\frac{15}{2}$

$\frac{1}{x}$



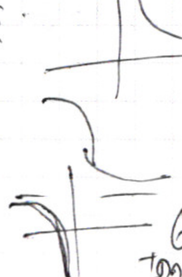
$\frac{a}{4}+b=4$

$a+b\leq1$

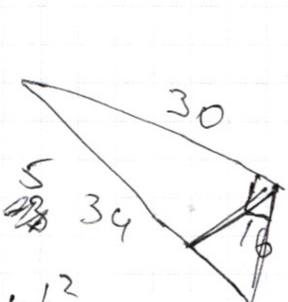
$a+b\in[0;1]$

$\frac{3}{4}a=-3$

$a=-4;\ b=5$



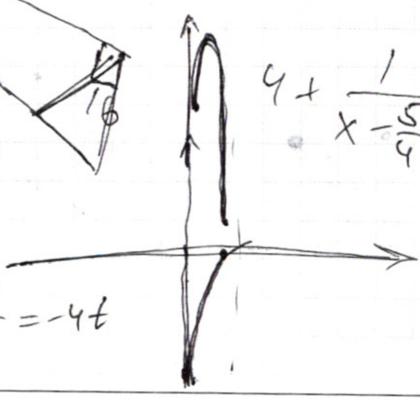
$4+\frac{1}{x}$



64
$+225$
289

$\frac{5}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$

$4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$



$4t^2+$

$\frac{2}{4}$

$4+\frac{4}{-3}$

$\frac{12-4}{3}=\frac{8}{3}$

$y=-4x+5$

$y=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ $\quad 4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}=-4\underbrace{\left(x-\frac{5}{4}\right)}_{t}$ $\quad 4+\frac{1}{t}=-4t$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$tg\alpha$ - ?

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cancel{\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta} +$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}}\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$(x-6)^2+(6y-\frac{1}{2})^2-36-\frac{1}{4}=45$

$2y(x-6)-(x-6)$

$(2y-1)(x-6)$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x-x^2=t$; $t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5} \geq 0$

№3

$\log_3 t = a$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t} \geq 0$

$3^a+4^a \geq 5^a \;|:5^a>0$

$(\frac{3}{5})^a+(\frac{4}{5})^a \geq 1$

$\searrow \quad \searrow \quad a$

$\sin = \frac{4}{5}$

$\cos = \frac{3}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \cancel{2\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha - \sin\gamma+\cos\gamma$

$x-6=a$

$2y-1=b$

$\sqrt{6-x}=a$

$\sqrt{1-2y}=b$

$6b^2-a^2=ab$

a^4+9b^4

$a-6b=\sqrt{ab} \;|:b$

$a^4+9b^4=90$

$6b^2-ab-a^2=0$

$\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}-6=0$

$t^2-t-6=0$

$(t-3)(t+2)=0$

17×17: 119, 17, 259

$34 \times 8 = 272$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2(\alpha+\beta)+2\beta)$

$2((\alpha+\beta)+\beta)$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$

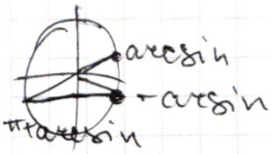
$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$ $\qquad$ $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$-\sqrt5\cos 2\beta + 2\sqrt5\sin 2\beta + \overset{5}{\sin 2\alpha} = -2$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\overset{\text{arctg}\frac12}{\frac{1}{\sqrt5}} + 2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right.$



$\text{arctg}\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2\beta = -2\alpha - \text{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k \\ 2\beta = -2\alpha + \pi + \text{arctg}\frac{1}{2} + 2\pi k \end{array}\right.$

1) $\sin(2\alpha - 4\alpha - 2\,\text{arctg}\frac{1}{2} + \cancel{4\pi k}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\sin(2\alpha + 2\,\text{arctg}\frac{1}{2}) + \sin 2\alpha$

$-\sin 2\alpha\cos(2\,\text{arctg}\frac{1}{2}) - \cos(2\alpha)\sin(2\,\text{arctg}\frac{1}{2}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$(x^2 - 12x) + 36y^2 - 36y = 45$

$(x-6)^2 + 36y^2 - 36y = 81$

$(x-6)^2 + 9(4y^2 - 4y - 9)$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 45 + 36 + 9 = 90$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} a^2 - 6b^2 = ab \\ a^4 + 9b^4 = 90 \end{cases}$

$\sqrt{ab} = a^2 - 12ba + 36b^2$

$\cancel{(a+b)^2}$

$a^2 - ab - 6b^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)