МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(2): $2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$.

$\Rightarrow\ 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$.

$\cos 2\beta = +\frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} (a) \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}. \\ (б) \Rightarrow \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

(a)

(1): $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow\ 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$.

$\sqrt{17}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha\right) = -1$.

пусть $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\sqrt{17}\cdot\sin(2\alpha+\varphi) = -1$.

$\sin(2\alpha+\varphi) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\sin(\varphi) = \sin(-\varphi)$.

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\varphi = -\varphi+2\pi n \\ 2\alpha+\varphi = \pi+\varphi+2\pi k \end{array}\right., n,k\in\mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\varphi+2\pi n \\ 2\alpha = \pi+2\pi k \end{array}\right., n,k\in\mathbb{Z}.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\varphi+\pi n \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k \end{array}\right., n,k\in\mathbb{Z}$$

$tg\,\alpha = tg(-\varphi+\pi n) = tg(-\varphi) = tg\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$tg\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\sin\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\cos\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$.

$\Downarrow$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ - не определён.

(см. страницу №3)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

- $3xy-2x-3y+2 = x(3y-2)-(3y-2) = (x-1)(3y-2)$.
- $3x^2+3y^2-6x-4y = 3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2-3-\frac{4}{3}$.
- $3y-2x = (3y-2)-2(x-1)$.

пусть $\begin{cases} a=x-1 \\ b=3y-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{1}{3}b^2=7+\frac{4}{3}=\frac{25}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \quad (1) \\ 9a^2+b^2=25 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $\begin{cases} b-2a\geq 0 \\ b^2-4ab+4a^2=ab \end{cases}$

$b^2-5ab+4a^2=0$.

$D=25a^2-16a^2=9a^2$

$b=\frac{5a\pm 3a}{2}=\left[\begin{array}{ll} 4a & 2a\geq 0 \quad (a) \\ a. & -a\geq 0 \quad (б). \end{array}\right.$

(a) $b=4a$.

$9a^2+16a^2=25$.

$25a^2=25$

$a^2=1$ $\begin{cases} a=\pm 1 \\ 2a\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a=1 \quad b=4$.

$\Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \\ 3y-2=4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ 3y=6 \quad y=2 \end{cases}$ $(2;2)$.

(б) $b=a$.

$9a^2+a^2=25$.

$10a^2=25$

$a^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$.

$\begin{cases} a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}. \\ -a\geq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{10}}{2} \quad b=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

$\begin{cases} x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ 3y-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ 3y=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

$y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}$. $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$.

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение).

(δ) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

пусть $\varphi = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

$\sin(2\alpha+\varphi) = \sin(\varphi)$.

$$\left[\begin{array}{ll} 2\alpha+\varphi = \varphi + 2\pi n & (1) \\ 2\alpha+\varphi = \pi - \varphi + 2\pi k & (2). \end{array}\right. , n, k \in \mathbb{Z}.$$

(1) $\alpha = \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$.

(2) $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi k\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\varphi$

$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = \frac{\cos\left(\arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\sin\left(\arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = -4$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \left\{-\frac{1}{4}; 0; -4\right\}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$.

$x(x+6)>0$ $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$.

$x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$.

пусть $t=x^2+6x$

$$3^{\log_4 t}+t \geqslant t^{\log_4 5}$$

$\cdot\ t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$

$$3^{\log_4 t}+t \geqslant 5^{\log_4 t}.$$

$\cdot\ t = 4^{\log_4 t}$ пусть $a=\log_4 t$

$$3^a+4^a \geqslant 5^a$$

пусть $f(a)=3^a+4^a$

$g(a)=5^a$

$f(a)$ и $g(a)$ - монотонно возрастающие функции.

$\begin{cases} f(0)=2 \\ g(0)=1 \end{cases}$ $f(0)>g(0)$

$\begin{cases} f(2)=25 \\ g(2)=25 \end{cases}$ $f(2)=g(2)$

$\Rightarrow$ при $a\geqslant 2$ $5^a \geqslant 3^a+4^a$

$\Rightarrow 3^a+4^a \geqslant 5^a$ при $a\in 2$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\log_4 t \le 2 = \log_4 16.$

по методу рационализации.

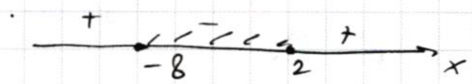
$(\underbrace{4-1}_{3})(t-16) \le 0.$

$t \le 16.$

$x^2+6x \le 16.$

$x^2+6x-16 \le 0.$

$D = 36+64=100 \quad x=\frac{-6\pm 10}{2} = -3\pm 5 = \left[\begin{array}{l}-8\\ 2.\end{array}\right.$



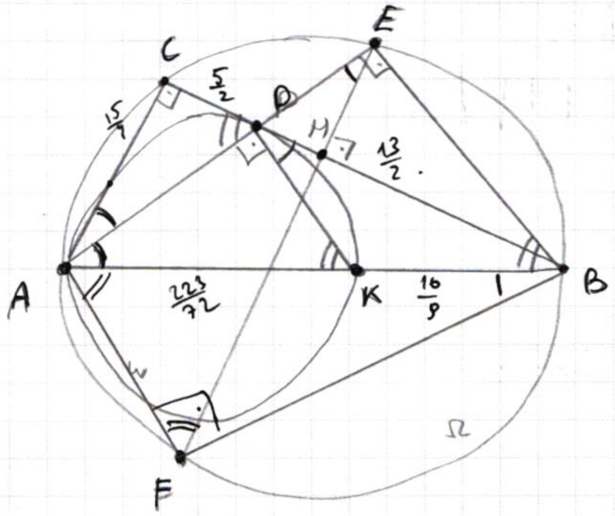
$\begin{cases} x \in [-8;2]. \\ x \in (-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow x \in [-8;-6)\cup(0;2].$

Ответ: $x \in [-8;-6)\cup(0;2].$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№9.



(?) $R; r; \angle AFE; S_{\triangle AEF}$;

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$.

пусть R - радиус Ω, r - радиус ω.

пусть $AD \cap \omega$ в точке K,

т.к. окр. касаются в точке A, и AB - диаметр Ω => AK - диаметр ω.

=> $\angle ADK = 90°$ (опир. на диам.)

$\angle AEB = 90°$ (опир. на диам.)

пусть $EF \cap BC$ в точке H,

$\angle EHB = 90°$ (по усл.)

$\angle DAK = \angle KDB$ (угол между хордой и кас.)

аналогично $\angle DKA = \angle CDA = \angle EBA$.

$\triangle ADB \sim \triangle DKB$ $\quad \frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BK} = \frac{AD}{DK}$

$\triangle CAD \sim \triangle DAK$ => $\angle CAD = \angle DAK$. $\quad \frac{CD}{DK} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AK}$.

в $\triangle ABC$ по св-ву биссектрисы $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{5}{13}$

пусть $AC = 5x$, $AB = 13x$ => по т. Пифагора

$BC = \sqrt{169x^2 - 25x^2} = \sqrt{144x^2} = 12x = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

=> $R = \frac{39}{8}$ $\quad$ => $x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ => $AB = \frac{39}{4} = 2R$.

по св-ву касательной $BD^2 = BK \cdot AB$

$\frac{169}{4} = BK \cdot \frac{39}{4}$

$BK = \frac{169}{4} \cdot \frac{4}{39} = \frac{13}{3}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 271 \\ -48 \\ \hline 223 \end{array}$

$AC = 5x = \frac{15}{4}$

$\angle AFE = \angle ABE = \angle AKD$

$AK = AB - BK = \frac{39}{4} - \frac{13}{3} = \frac{\cancel{90} + \cancel{27} - \cancel{52}}{12} = \frac{65}{12} = 2r$

$\Rightarrow r = \frac{65}{24};$

в п/у $\triangle ACD$ $AD = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{13}.$

$\sin\angle AFE = \sin\angle AKD = \frac{AD}{AK} = \frac{5\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{12}{65} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\boxed{\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right).}$

в $\triangle AEB$ $AE = AB \sin\angle ABE = \frac{39}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{9\sqrt{13}}{4}.$

~~$\Rightarrow DE = AE - AD = \frac{39 \cdot 9\sqrt{13}}{67 \cdot 4} - \frac{5\sqrt{13}}{4} = \frac{\sqrt{13}(81 - 65)}{67 \cdot 4} = \frac{\sqrt{13} \cdot 16}{67 \cdot 4} = \frac{4\sqrt{13}}{67}.$~~

(*) в $\triangle AEB$ EB

$\angle AFB = 90°$ (оп. на диам.)

$\angle AEF = \angle CAE$ ($CA \parallel FH$, т.к. обе прямые перп. BC)

$\Rightarrow \angle ABF = \angle AEF = \angle CAE = \angle EAB$

$\Rightarrow \triangle AFB \sim \triangle BEA$, AB - общая сторона $\Rightarrow$

$\triangle AFB = \triangle BEA$, $\angle EAF = 90° \Rightarrow EF$ - диам. $\Rightarrow EF = AB = \frac{39}{4}.$

$AF = EB = \frac{3\sqrt{13}}{2}$, $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{9 \cdot 39}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$; $S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}.$

(*) в $\triangle AEB$ $EB = \sqrt{\frac{39^2}{16} - \frac{81 \cdot 13}{16}} = \frac{\sqrt{468}}{4} = \frac{\sqrt{117}}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}.$

$39 \times 39 = 1521$; $81 \times 13 = 1053$; $1521 - 1053 = 468$; $468 = 4 \cdot 117 = 4 \cdot 9 \cdot 13$; $39 \times 9 = 351$; $325 : 25 = 13$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

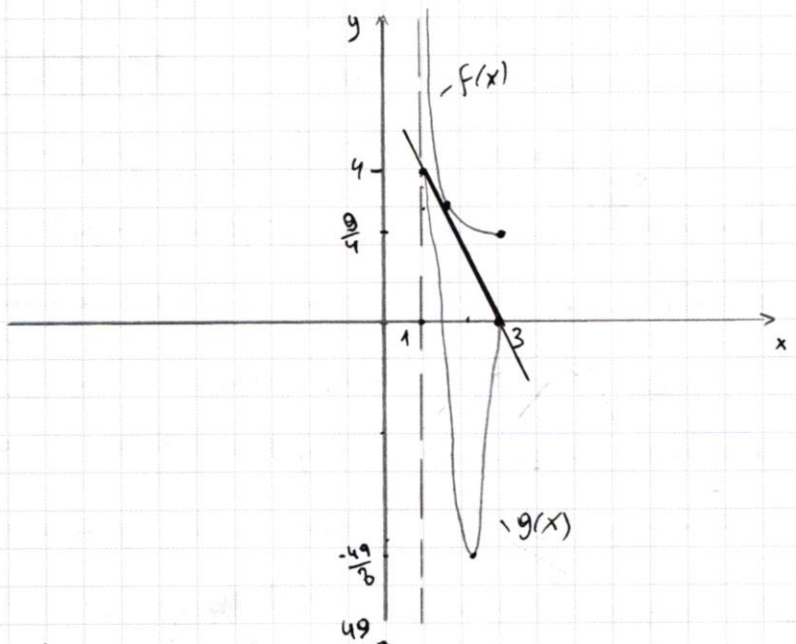
№6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30.$$

$(a;b)$-? верно для $\forall x \in (1;3]$.

пусть $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$g(x) = 8x^2-34x+30 = 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2 - \frac{49}{8}$.



$f(2) = \frac{9}{4}$

$g(1) = 8\left(\underbrace{1-\frac{17}{8}}_{\frac{9}{8}}\right)^2 - \frac{49}{8} = \frac{81}{8} - \frac{49}{8} = \frac{32}{8} = 4.$

$g(3) = 8\left(\underbrace{3-\frac{17}{8}}_{\frac{7}{8}}\right)^2 - \frac{49}{8} = \frac{49}{8} - \frac{49}{8} = 0.$

=> прямая $y = ax+b$ должна перес. прямую $x=1$ в т. с коорд. $y \geq 4$, перес. Ox в точке ≥ 3, и должна касаться и не пересекаться с $f(x)$.

Рассмотрим прямую $y = kx+d$, проходящую через точки $(1,4)$ и $(3,0)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} 4 = k + d \\ 0 = 3k + d \end{cases} \ominus \Rightarrow 2k = -4$$

$k = -2$

$d = -3k = 6.$

$y = -2x + 6.$

Теперь найдём её пересечение (если они есть) с $f(x)$

$$-2x + 6 = \frac{4x-3}{2x-2}.$$

$$(2x-6)(2x-2) = 3 - 4x.$$

$$4x^2 - 12x - \cancel{4x} + 12 - 3 + \cancel{4x} = 0.$$

$$4x^2 - 12x^2 + 9 = 0$$

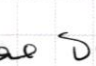
$$(2x-3)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ прямая касается $f(x)$

$\Rightarrow$ · если мы уменьшим k (то есть увеличим модуль коэф. наклона)(*1), то прямая будет перес. с $f(x)$, если увеличим k (то есть уменьшим модуль наклона), то прямая будет перес. с $g(x)$(*2).

· аналогично если мы увеличим d, то прямая будет пересекаться с $f(x)$(*3), если мы уменьшим d, то прямая будет пересекаться с $g(x)$ при $x < 3 \Rightarrow$ при $x = 3$ $kx + d \le g(x)$.

(*1) прямая будет перес. $f(x)$ в 2 точках x_1 и x_2 $\Rightarrow$ ввиду выпуклости $f(x)$, на отр. от x_1 до x_2 $kx + d \le f(x)$.



(*2) прямая будет пересекать $g(x)$ в т. x_0 $\Rightarrow$ на отр. от 1 до x_0 $g(x) \ge kx + d$.

(*3) аналогично (*1) будет 2 т. пер. x_1 и x_2 $\Rightarrow$ на отр. от x_1 до x_2 $kx + d \le f(x)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

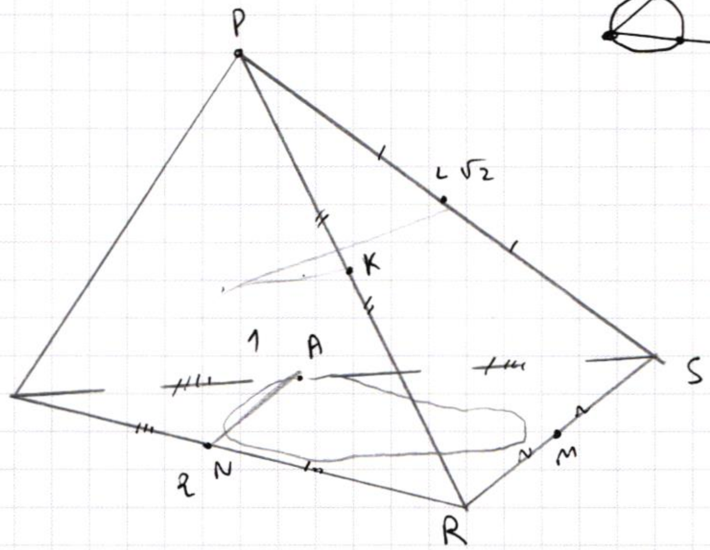
$\Rightarrow$ прямая $y = -2x + 6$ – единственная возможная прямая, удовлетворяющая условием.

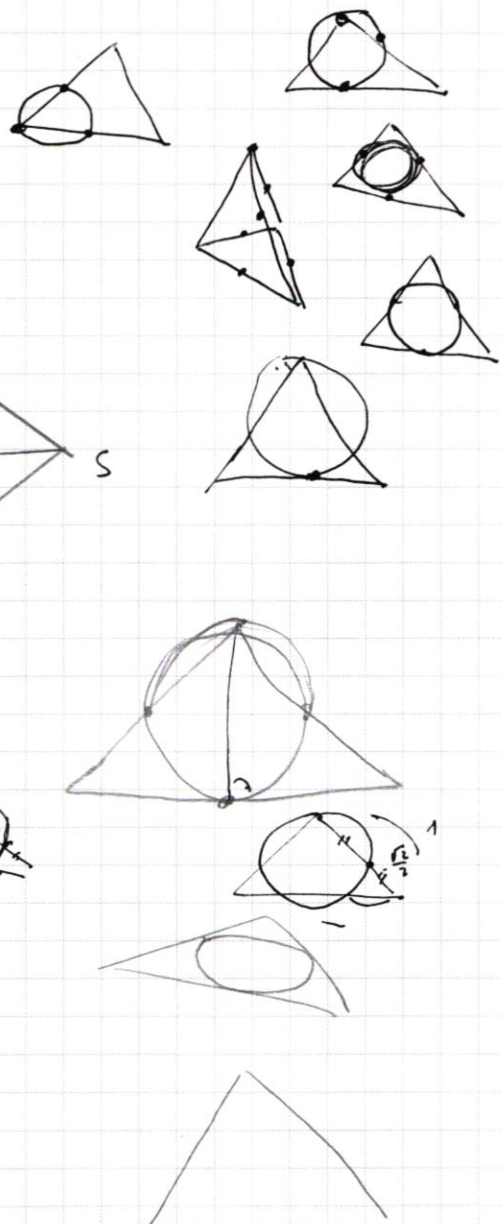
$\Rightarrow a = -2$, $b = 6$.

Ответ: $a = -2$, $b = 6$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.



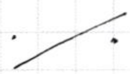


$QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$.

(?) RS; R_{min}.

№3.

$3^t + t \geq \cancel{t^{\log_3 5}}\ 5^t$



$5^t = 3^t + t$

$t = 0$ при $t > 0$ $5^t > 3^t + t$.

при $t < 0$

$3^t + 4^t \geq 5^t$.

$t = 2$ $3^2 + 4^2 \geq 5^2$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} <$

$\cancel{\log}$ $\ln_3 3^t + \ln_4 4^t$ $\ln_5 5^t$

$f(\frac{1}{2}) = f(1) + f(\frac{1}{2})$. $\cancel{5^t > 3^t + 4^t}$

$f(1) = 2f(1)$ $f(1) = 0$. $f(5) = 1$

$f(2) = 0 = f(2) + f(1)$ $f(6) = f(2) + f(3) = 0$.

$f(3) = 0$ $f(7) = 1$

$f(4) = 1 = \cancel{f}(4)$. $f(8) = f(2) + f(4) = 1$.

x^2 $\quad \frac{1}{9} + \frac{1}{16} > \frac{1}{25}$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{5}.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30.$$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}.$

$$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8(x-\frac{17}{8})^2 - \frac{289}{8} + 30 = 8(x-\frac{17}{8})^2 - \frac{49}{8}.$$

№ 3.

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}.$$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}.$$

$\log_4 t = a.$

$$3^a + 4^a \geq 5^a$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_4 t} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_4 t} + 1.$$

$$5^{\log_4 t} - 4^{\log_4 t} \leq 3^{\log_4 t}.$$

$$h^f + g^f \geq y^f$$

$$t^{\log_4 3} + t^1 \geq t^{\log_4 5 - \log_4 3 + \log_4 \frac{5}{3}}.$$

$$1 + t^{1-\log_4 3} \geq t^{\log_4 \frac{5}{3}}$$

$$1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{3}}.$$

$$f(t):\ t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t \leq 0.$$

$$f'(t) = \log_4 5\, t^{\log_4 5 - 1} - \log_4 3\, t^{\log_4 3 - 1} - 1 = 0.$$

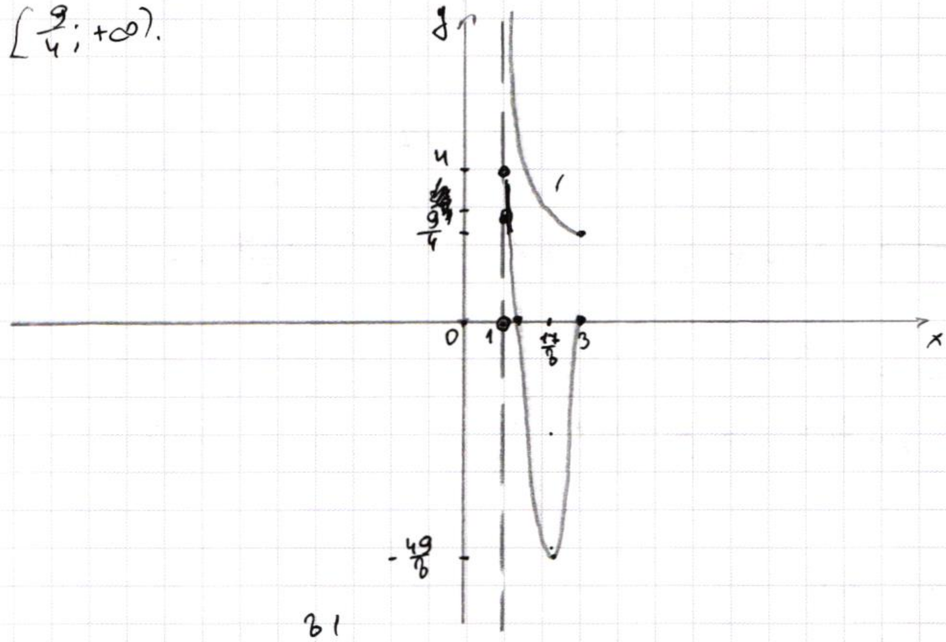
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6.

$$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8\left(x-\frac{17}{8}\right)^2-\frac{49}{8}.$$

при $x\in(1;3]$

$2+\frac{1}{2x-2}\in\left[\frac{9}{4};+\infty\right)$.



при $x=1$ $8\left(\underbrace{1-\frac{17}{8}}_{-\frac{9}{8}}\right)^2-\frac{49}{8} = \frac{81}{8}-\frac{49}{8}=\frac{32}{8}=4.$

при $x=3.$ $8\left(\underbrace{3-\frac{17}{8}}_{\frac{7}{8}}\right)^2-\frac{49}{8}= 0.$

при $x=1$ $a+b\geq 4$, $a<0$ при $ax+b=0$ $x=-\frac{b}{a}\geq 3.$ $-b\geq 3a.$ $b\leq -3a.$

прямая кас. или не пересекает график $2+\frac{1}{2x-2}$

$$ax+b=2+\frac{1}{2x-2}.$$

$$2ax^2-2ax+2bx-2b=4x-\underbrace{4+1}_{-3}.$$

$$2ax^2-(2a-2b+4)x-2b+3=0.$$

$$D=4a^2+4b^2+16-8ab-16b+16a-8a(3-2b)=$$

$$=4a^2+4b^2+16+8ab-16b-8a\leq 0.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №3

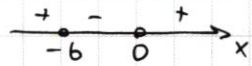
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4 (x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$ $\quad x(x+6)>0$



$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$.

$x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$

пусть $t = x^2+6x$.

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

· $t = 4^{\log_4 t}$

· $t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

· $3^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$

$\sin(2\alpha+\beta) = -\sin(\beta)$.

$2\alpha+\beta = -\beta + 2\pi n$. $\qquad \alpha = -\beta + \pi n$

$2\alpha+\beta = \pi+\beta+2\pi k$. $\qquad \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$.

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$.

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sqrt{17}(\sin 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha) = -1$

$\sin(2\alpha + \varphi) = \sin(\varphi)$.

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\varphi = 2\pi n + \varphi \\ 2\alpha+\varphi = \pi - \varphi + 2\pi n \end{array}\right.$ $\qquad$ $2\alpha = 2\pi n$; $\quad 2\alpha = -2\varphi + \pi + 2\pi n$.

$f(ab) = f(a) + f(b).$

$f(p) = [\,p/4\,]$. , p – простое.

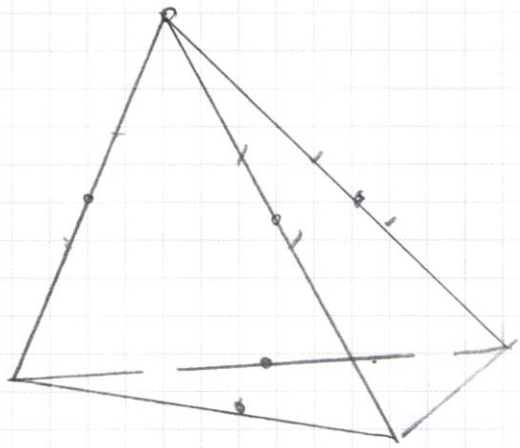
$\cancel{[\frac{ab}{4}] = [\frac{a}{4}] + [\frac{b}{4}]}.$

$(x, y) \in \mathbb{N} \quad x \in [3; 27]$

$y \in [3; 27].$

$f(\frac{x}{y}) < 0. = f(x) + f(\frac{1}{y}).$

$\cancel{[\frac{x}{4y}] < 0}.$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4x-3}{2x-2} = ax+b.$$

$$4x-3 = (2x-2)(ax+b) = 2ax^2-2ax+2bx-2b$$

$$2ax^2+x(2b-2a-4)-2b+3=0.$$

$$\frac{D}{4} = (b-a-4)^2-2a(3-2b) = b^2+a^2+16-2ab-8b+8a$$

$$-6 \cancel{+4b = a^2+b^2+16-2ab-4b+8a} \leq 0.$$

$\cancel{16a-b}$

$$-6a+4ab = a^2+b^2+16+2ab-8b+2a \leq 0.$$

$\cancel{16}$ -

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$(x^2+6x)^{\log\frac{3}{4}}+1 \geq (x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{4}}.$$

$$3^{\log_4 t}+t \geq 5^{\log_4 t}.$$

$$(5^{\log_5 3})^{\log_4 t}+5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_4 t}.$$

$$5^{\log_5 3\log_4 t}+5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_4 t}.$$

$$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}.$$

$$3^t+4^t \geq 5^t$$

$$5^{\log_5 3\cdot t}+5^{\log_5 4\cdot t} \geq 5^t.$$

$$5^{\log_5\frac{3}{5}\cdot t}+5^{\log_5\frac{4}{5}\cdot t} \geq 1 = 5^0$$

lim $\log_5\frac{3}{5}\cdot t$ $\quad (\frac{3}{5})^t+(\frac{4}{5})^t \geq 1.$

при $t \leq 0$ верно.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} a+b \geq 4 \\ a < 0 \\ -\frac{b}{a} \geq 3. \qquad \frac{b}{a} \leq -3 \qquad b \leq -3a \\ ax+b = \frac{4x-3}{2x-2}. \end{cases}$$ - Один 1 реш.

$(1, 4)$ $(3, 0)$.

$y = kx+b$.

$$\begin{cases} 4 = k+b \\ 0 = 3k+b \end{cases}$$ -

$2k = -4$

$k = -2$.

$b = -3k = 6$.

$y = -2x+6$

$-2x+6 = \frac{4x-3}{2x-2}$.

$2x-6 = \frac{3-4x}{2x-2}$.

$(2x-6)(2x-2)+4x-3=0$.

$4x^2-12x-\cancel{4x}+12+\cancel{4x}-3=0$.

$4x^2-12x+9=0$.

$(2x-3)^2=0$.

~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7

☑ черновик ☐ чистовик Страница №

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

(?): $tg\alpha$, ≥ 3 3ч.

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}.$$

$$-2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = +\frac{8}{\sqrt{17}\sqrt{17}}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\alpha + 1\cos 2\alpha = -1.$$

$$\sqrt{17}\sin(2\alpha+\varphi) = -1,\quad \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\sin(2\alpha+\varphi) = \sin(-\varphi)$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\varphi = -\varphi+2\pi n \\ 2\alpha+\cancel{\varphi} = \pi+\cancel{\varphi}+2\pi k \end{array}\right. ,n,k\in\mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\varphi+\pi n$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\frac{225}{16}+81 = \frac{39^2}{16}$$

$12x = 9.$

$x = \frac{3}{4}.$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 16 \\ \hline 486 \\ 81\ \ \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ 117\ \ \\ \hline 1521 \end{array}$$

1600

$39^2 = \cancel{2025} = 40-39$

79

$$\begin{array}{r} 2025 \\ -\ 79 \\ \hline 046 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +\ 225 \\ \hline 1521. \end{array}$$

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{x(3y-2)-(3y-2)}=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \qquad 3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2-3-\frac{4}{3}=4 \end{cases}$$

пусть $\begin{cases} a=x-1 \\ b=3y-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{1}{3}b^2=7+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} & (1) \\ 9a^2+b^2=25. & (2) \end{cases}$$

(1): $\begin{cases} b-2a\geq 0 \\ b^2-4ab+4a^2=ab \end{cases}$ $\quad b^2-5ab+4a^2=0.$

$D=25a^2-16a^2=9a^2$

$b=\frac{5a\pm 3a}{2}=\left[\begin{array}{l}4a \\ a.\end{array}\right.$

1. $b=4a.$

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

ОДЗ:

$$t^{\log_4 3}+t\geq \cancel{3^{\log}}\, t^{\log_4 5}$$

$$t^{\log_4\frac{5}{4}}-t^{\log_4\frac{3}{4}}\leq 1.$$

$$t^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$$

$$\log_t\left(t^{\log_4 t}+t\right)\geq \log_4 5.$$

$$\sin(2\alpha+\varphi)+\sin(\varphi)=0.$$

$$2\sin(\alpha+\varphi)\cos\alpha=0.$$

$\ln_3 3^a+\ln_4 4^a \vee a$

$\ln_5 5^a-\ln_3 3^a+\ln_4 4^a>0.$

$\cancel{\ }4 \quad a=x^2+x$

5^{2+x}