МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$.

Значит $-\frac{2}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$, Подставим вместо $\sin(2\alpha+2\beta)$ $\frac{1}{\sqrt5}$:

$-\frac{2}{5} = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$.

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}. \\ \sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\frac{2}{\sqrt5}. \end{array}\right.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$.

Сл. I $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$.

Тогда $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

Подставим вместо $\sin 2\alpha$ $\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$, вместо $\cos 2\alpha$ $\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$:

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + 2\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + 1 = 0$

Пусть $x = tg\alpha$.

$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} + 1 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x + 2 - \cancel{2x^2} + 1 + x^2 = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$

Значит $tg\,\alpha = -1$ или $tg\,\alpha = 3$.

Сл. II $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

Аналогичным образом приходим к ур-ю

$$\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2(1-x^2)}{1+x^2} + 1 = 0$$

$2x - 2 + 2x^2 + 1 + x^2 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Значит $tg\,\alpha = -1$ или $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$.

Получаем, что всего возможна ~~не более~~ лишь какие-то из следующих зн-ий: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$. Т.к. известно, что их не менее трёх, то все они возможны.

Ответ: $tg\,\alpha \in \{-1; \frac{1}{3}; 3\}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

③

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$.

$x(10-x)>0$

$x(x-10)<0$

$x\in(0;10)$.

т.к. на ОДЗ $10x - x^2 > 0$, то $|x^2-10x| = 10x-x^2$.

$(10x-x^2)^{\log_3 4} + 10x - x^2 \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $t = 10x - x^2$, $t>0$.

$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t \log_3 4} + 3^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

Пусть $k = \log_3 t$

$3^{k\log_3 4} + 3^k \geq 5^k$

$4^k+3^k \geq 5^k$

т.к. $5^k>0$, то поделим обе части на 5^k. Знак нер-ва не изменится.

$\left(\frac{4}{5}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^k \geq 1$

т.к. ф-я $f(k)=\left(\frac{4}{5}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^k$ убывает, ~~то $f(k) \geq f(t) = f(0)$~~

$f(2)=\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$, то ~~нер-в~~ $f(k) \geq f(2) \Leftrightarrow k \leq 2$.

$k\leq 2$

$\log_3 t \leq 2$

$t\leq 9$

$10x-x^2\leq 9$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-10x+9\geq 0$

$(x-1)(x-9)\geq 0$

$x\in(-\infty;1)\cup(9;+\infty)$.

С учётом ОДЗ $x\in(0;10)$ получаем окончательный ответ $x\in(0;1)\cup(9;10)$.

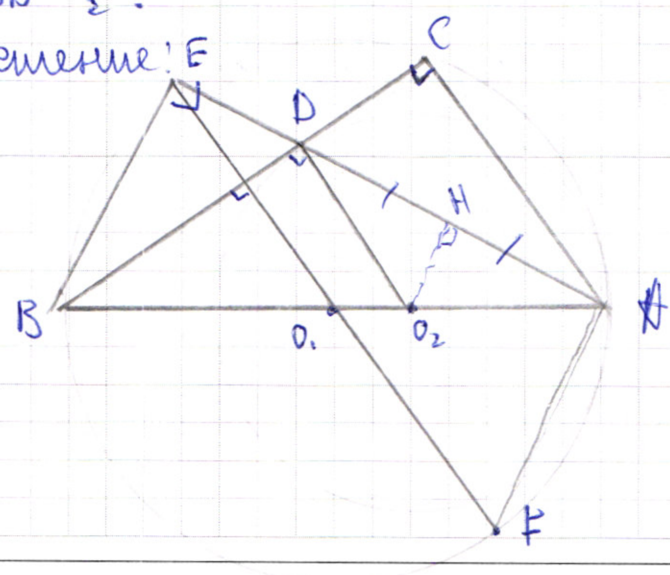
Ответ: $x\in(0;1)\cup(9;10)$.

(4)

Дано: окр-ти Ω и ω кас. в т. A внутр. обр., AB – диам. Ω, BC – хорда Ω, BC кас. ω в т. D, $[AD)$ повт. перес. Ω в т. E, прямая, прох. через т. E, ~~на~~ перпендикулярно к BC повторно пересекает Ω в т. F

Найти: радиусы Ω и ω, $\angle AFE$ и S_{AEF}, если $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

Решение:



1) Пусть O_1 – ц. Ω, O_2 – ц. ω, R – радиус Ω, r – радиус ω.

2) Т.к. Ω кас ω внутр. обр. в A, то т. O_1O_2, A лежат на одной прямой и $O_1O_2=R-r$.

3) $BO_2=BO_1+O_1O_2=R+R-r=2R-r$

4) Т.к. D – т. кас., то $O_2D\perp BC$

5) Т.к. AB – диам., то $AC \perp BC$.

6) Т.к. $AC \perp BC$, $O_2D \perp BC$, то $AC \parallel O_2D$

7) Т.к. $\angle DBO_2 = \angle CBA$, $\angle O_2DB = \angle ACB = 90^\circ$, то $\triangle O_2DB \sim \triangle ACB$

8) Т.к. $\triangle O_2DB \sim \triangle ACB$, то $\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}}$

Также $\frac{BD}{BC} = \frac{O_2D}{AC} \Rightarrow AC = \frac{17}{32} O_2D \cdot \frac{32}{17}$.

$34R - 32r = 34R$

$4R = 17r$

$30R = 32r$

$r = \frac{15}{16}R$.

9) Из $\triangle BDO_2$ по т. Пифагора: $BO_2^2 = O_2D^2 + BD^2$

$(2R-r)^2 = r^2 + \frac{289}{4}$

$\cancel{(2R - \frac{15}{16}R)^2 = \frac{225}{256}R^2 + \frac{289}{4}}$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + \frac{289}{4}$

$4R^2 - 4Rr = \frac{289}{4}$

$4R^2 - \frac{15}{4}R^2 = \frac{289}{4}$

$\frac{R^2}{4} = \frac{289}{4}$

$R = 17$

$r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$.

10) ~~$\angle AFE =$~~ Т.к. AB – диам., то $\angle BEA = 90^\circ$

11) $\angle AFE = \frac{1}{2} \cup AE = \angle ABE = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - \angle O_2AD$.

12) $AC = O_2D \cdot \frac{32}{17} = r \cdot \frac{32}{17} = \frac{255}{16} \cdot \frac{32}{17} = 30$.

13) Из $\triangle ACD$ по т. Пифагора $AD^2 = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{900 + \frac{225}{4}} = \sqrt{225 \cdot \frac{17}{4}} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

~~AD~~

14) В $\triangle O_2AD$ опустим высоту O_2H. Т.к. $\triangle O_2AD$ равнобед. ($O_2A = O_2D = r$), то O_2H также медиана. Тогда $AH = \frac{AD}{2} = \frac{15\sqrt{17}}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15) Из $\triangle O_2AH$ $\cos O_2AH = \frac{AH}{O_2A} = \frac{15\sqrt{17}}{4} \cdot \frac{16}{255} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

16) т.к. $\angle O_2AH = \angle O_2AD = 90^\circ - \angle AFE$, то $\cos \angle O_2AH = \cos(90^\circ - \angle AFE) = \sin AFE$. Значит $\boxed{\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}}$.

17) Проведём O_1E. т.к. $O_1A = O_1E$, то $\triangle O_1AE$ – равноб. Тогда $\angle O_1EA = \angle O_1AD = \angle O_2AD = \angle O_2DA$.
(т.к. $\triangle O_2DA$ равноб.)

18) т.к. $\angle O_1EA = \angle O_2DA$, то $O_1E \parallel O_2D$ (накр. лем. углы).

19) т.к. $O_1E \parallel O_2D$, $O_2D \perp BC$, то $O_1E \perp BC$. Значит прямая EF проходит через O_1, т.е. EF – диам. Значит $\angle EAF = 90^\circ$.

20) $\cos FEA = \cos O_1AE = \frac{4}{\sqrt{17}}$. т.к. $\angle FEA$ – острый, то $\sin FEA > 0$, поэтому $\sin FEA = \sqrt{1 - \cos^2 FEA} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

21) $EA = EF \cos FEA = \frac{2R}{\sqrt{17}} = \frac{34}{\sqrt{17}}$; $AF = EF \sin FEA = \frac{\cancel{68}}{\sqrt{17}}$.

$S_{AFE} = \frac{1}{2} EA \cdot AF = \frac{34 \cdot 17}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} \cdot \frac{1}{2} = \cancel{34}$ 17.

Ответ: радиусы равны 17 и $\frac{255}{16}$, $\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$; $S_{AEF} = 17$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$f(a)=f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)$. Значит $f(1)=0$.

$\cancel{f\left(\frac{1}{a}\right)=}$

$f(1)=f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0$. Значит $f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$.

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. ~~Поэтому~~ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$.

Вычислим значение f для всех простых чисел!

~~$f(2)=0 \quad f(3)=0 \quad f(5)=0$~~

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Теперь, раскладывая каждое из составных чисел на простые, вычислим f от всех целых чисел:

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(a)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4

a	20	21	22	23	24	25
$f(a)$	1	1	2	5	0	2

Вычислим, при сколько раз достигается то или иное знач. ф-ии!

зн-е	0	1	2	3	4	5
сколько раз	10	7	3	1	2	1

Тогда ~~есть~~ ~~f(x)=~~ пар где $f(x)=0$, $f(y)>f(x)$ будет

$10\cdot(7+3+1+2+1)=140$.

При $f(X)=1$ пар будет $7\cdot(3+1+2+1)=7\cdot7=49$

При $f(X)=2$ пар будет $3\cdot(1+2+1)=12$

При $f(X)=3$ пар будет $1\cdot(2+1)=3$

При $f(X)=4$ пар будет $2\cdot1=2$.

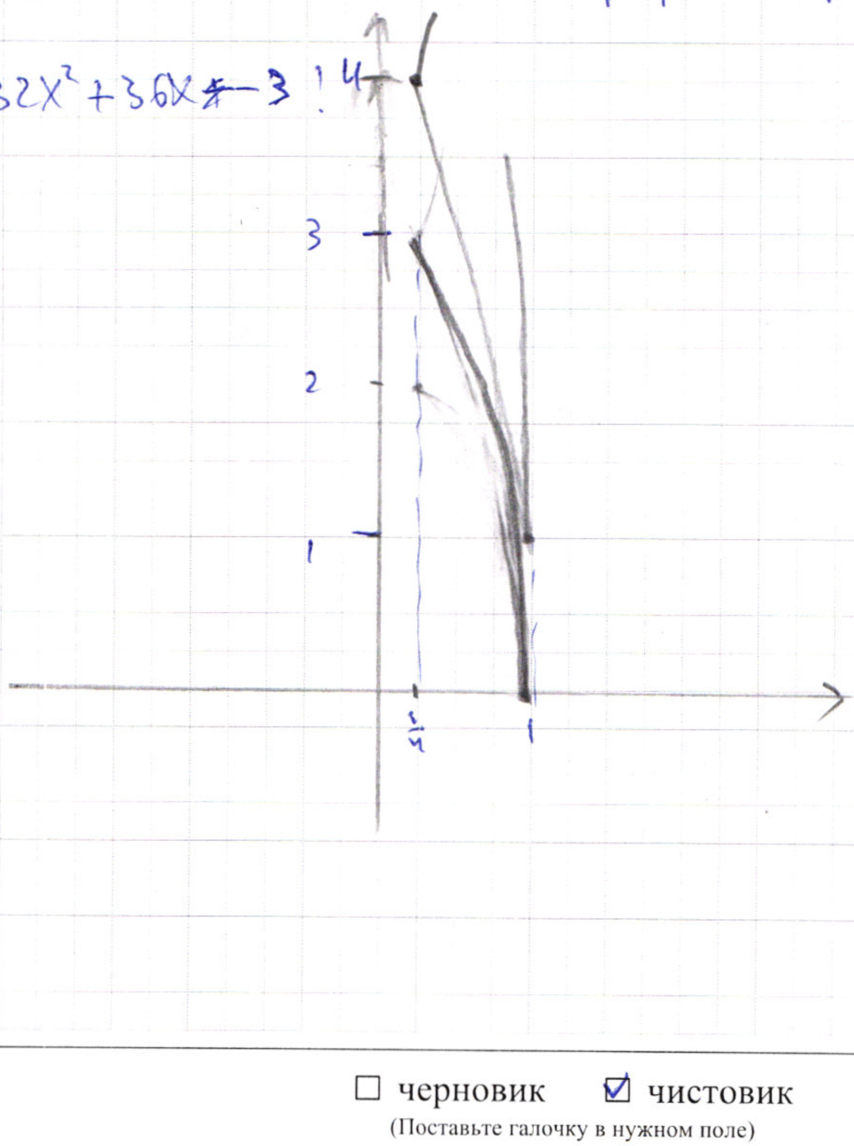
Всего пар $140+49+12+3+2=206$.

Ответ: 206 пар.

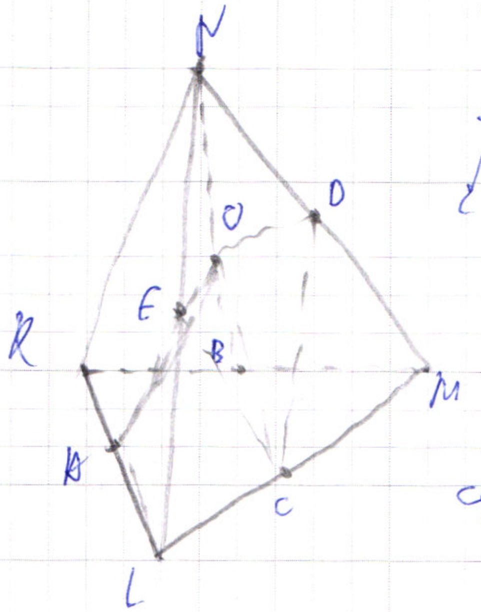
6

Изобразим схематично графики ф-ий $y=\frac{16x-11}{4x-5}$ и

$y=-32x^2+36x-3$:



(7)

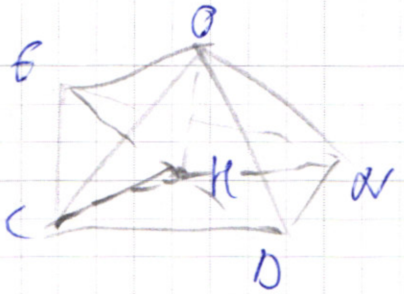


Дано: KLMN - пирамида, ~~сфера Ω пересек. KLMN в N~~ сфера Ω, $\{N; A; B; C; D; E\} \subset \Omega$, где A, B, C, D, E сер. KL, KM, LM, NM, LN соотв., $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$.

Найти: LM-? наим. возм. радиус сферы, опис. ок. KLMN.

Решение:

1) Пусть O - ц. Ω. Рассм-м ~~пир.~~ OECDN:



Опустим в ней выс. OH

Тогда $\triangle OCH = \triangle EOH = \triangle COH = \triangle DOH = \triangle NOH$ по катету и гипотенузе.

Значит $CH = EH = HN = HD$.

2) Т.к. ED, EC, CD - ср. л., то $EN \parallel CD$, $EN = \frac{CD}{?} = \frac{ML}{2}$.

Значит ENDC - пар-м. Т.к. H - ~~сер~~. $CH = HN = ED = HD$, то H - т. пер-я его диаг. Тогда ECDN - прямоуг-к.

~~Т.к. ΔKN~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что ~~из~~ отрезок, соединяющий точки $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$ касается графика $y=\frac{16x-16}{4x-5}$, т.к. ур-е прямой, его задающей, $y=-4x+5$ и ур-е $-4x+5=\frac{16x-16}{4x-5}$ имеет ровно 1 решение: $-16x^2+40x-25=16x-16$

$$16x^2-24x+9=0$$

$$\frac{D}{4}=144-144=0.$$

Поэтому любая прямая, отличная от $-4x+5$ будет либо пересекать гиперболу более, чем в 1 точке (а значит нер-во $\frac{16x-16}{4x-5}\leq ax+b$ не будет вып-ся), либо в $x=\frac{1}{4}$ или $x=1$ она будет выше параболы $-32x^2+36x-3$, ~~либо в $x=1$ она будет~~

Поэтому есть только одно решение и это $a=-4$, $b=5$.

Ответ: $(-4;5)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha$

$y^2 - y + \frac14$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right.$

$\frac{2x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| \cdot (1+x^2)\sqrt5$

$2x + 2(1-x^2) = -1 - x^2$

$2x + \cancel{2x}\, 2 - 2x^2 = -1 - x^2$

$2x - 2 + 2x^2 = -1 - x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$

$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac13 \end{array}}$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$(x-6)^2 + \cancel{36y} - (6y-3)^2 = 90$

$x - 12y \geq 0$

~~$x = 12y$~~

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$28^2 = 14^2 \cdot 4 = 196 \cdot 4 = 800 - 16$

$= 784$

$144 \cdot 4 = 576$

$4 \cdot 52 = 208 \quad 196 - 144$

$x^2 + 144y^2 - 24xy = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 + 144y^2 - 28xy + 12y + x - 6 = 0$

$D = (-28y+1)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) = 208y^2 - 104y + 25$

$-56 - 48 = -104$

$x - 12y \geq 0$

$(x-6)^2 + \cancel{(4y-3}\ 36(y - \frac{1}{2})^2 = 90$

$x(2y-1) - 6(2y-1)$

$\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$10x - x^2 = t$

$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t}$

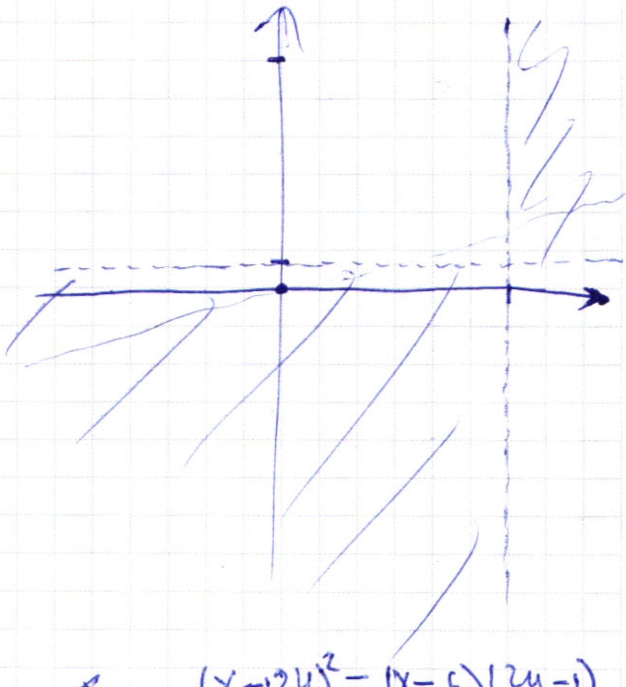
$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$\cancel{5^{\log_5 t \log_3 4}}$

$\cancel{t^{\log}}\ \cancel{4^{\log_4 t}}$

$3^{\log_3 t \log_3 4}$

$4^{\log_3 t} + 3^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$



$4^k + 3^k \geq 5^k$

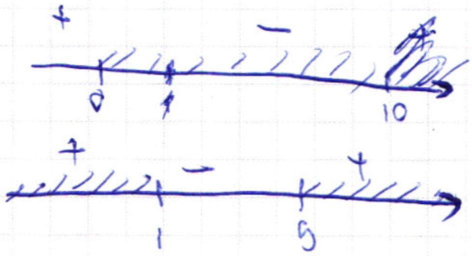
$\left(\frac{4}{5}\right)^k + \left(\frac{3}{5}\right)^k \geq 1$

$x(x-10) < 0$

$k \leq 2$

$\log_3 t \leq 2$

$(x-12y)^2 = (x-6)(2y-1)$



$0 < t \leq 9$

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x-9) \geq 0$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$(x - 6 + 3(2y-1))^2 + (x-12y)^2 = 90$

$x \in (0;1) \cup (9;10)$

$x \in$

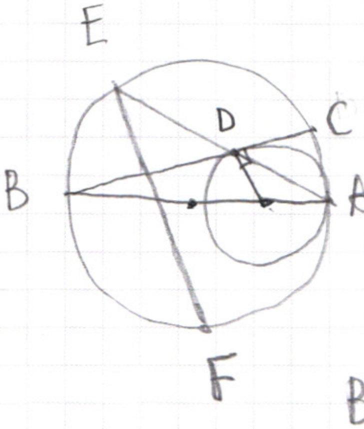
☑ черновик ☐ чистовик

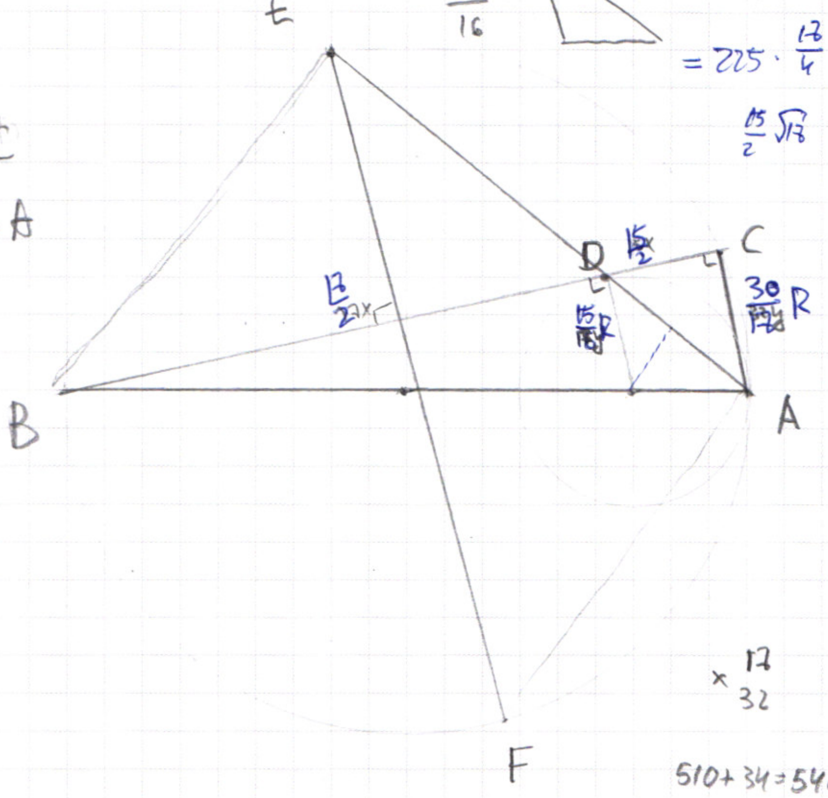
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{255}{16}$

$\frac{225}{4}+900=$

$=225\cdot\frac{17}{4}=$

$\frac{15}{2}\sqrt{17}$

$x=\frac{1}{2}$

$\frac{15}{2}+\frac{17}{2}=\frac{32}{2}=16$

$\times\begin{matrix}17\\32\end{matrix}$

$510+34=544$

$4R^2=256+1024y^2$

$\frac{2R-17y}{2R}=\frac{17}{32}$

$(2R-17y)^2=\frac{289}{4}+289y$

$\frac{15}{4}\sqrt{17}\cdot\frac{16}{255}=$ (25)

$64R-544y=34R$

$(2R-\frac{15}{16}R)^2=\frac{289}{4}+\left(\frac{15}{16}R\right)^2$

$30R=544y$

$=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$4R^2-\frac{15}{4}R^2=\frac{289}{4}$

$30R=32r$

$15R=16r$ $\quad \cos(90°-\alpha)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$16R^2-15R^2-289=0$

$D=225+$

$\sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$

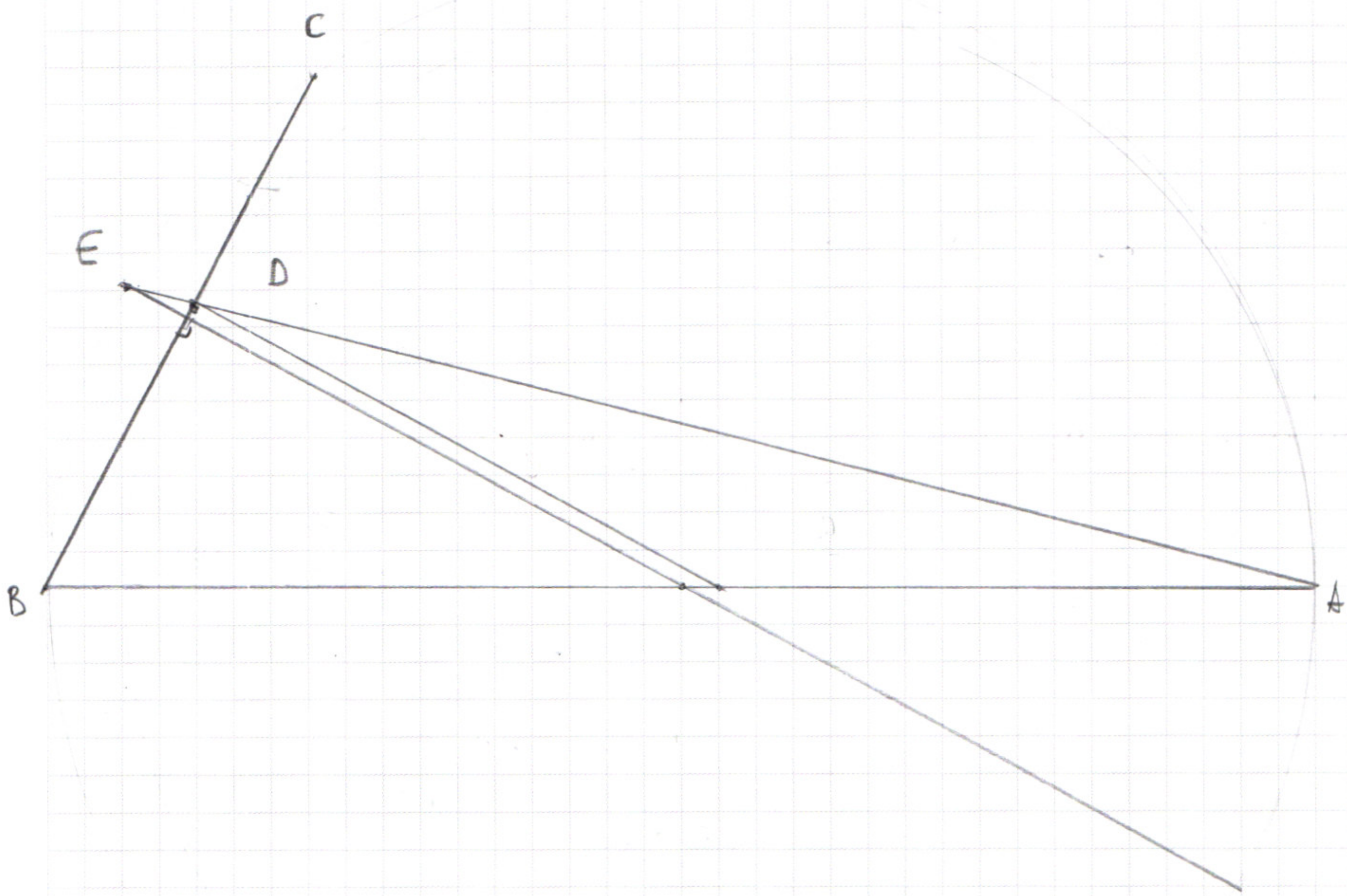
$R^2=289 \quad R=17 \quad r=$

$\boxed{\alpha=\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}.}$

$4R^2=256+\frac{900}{289}R^2$

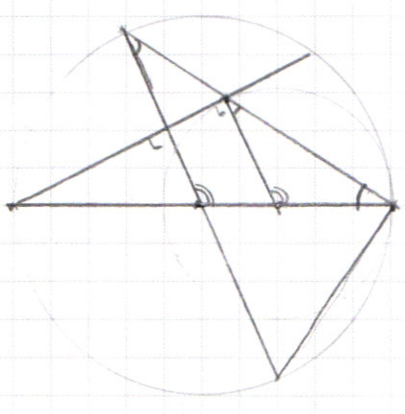
$R^2=64+\frac{225}{289}R^2$

$289R^2=64\cdot289+225R^2$ $\qquad 64R^2=64\cdot289$ $\qquad R=17$ $\qquad r=\frac{15\cdot17}{16}=\frac{255}{16}.$



$\frac{1}{2}R\cos\alpha\, R\sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}\cdot 289\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = 34$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4-16}{1-6} = \frac{12}{4} = 3$

$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$ $\quad \frac{324-96}{-32} = -\frac{228}{32} =$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{5}{2-5} =$ $\quad 4+\frac{5}{4-5} =$ $\quad = -\frac{57}{8}$

$4-5$

$\frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$ $\quad -32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2 - \frac{57}{8}$. $\quad \frac{-16}{-5} = \frac{16}{5}$

$4+\frac{5}{-5}$ $\quad \frac{12-16}{3-5} = 2$

$16 \cdot \frac{1\cdot(4x-5) - 4(x-1)}{4x-5} = -\frac{11}{4x-5}$

-2

0	1	2	3	4	5
0	10	7	3	1	2	1

$f(1) = f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$10\cdot 14 + 7\cdot 7 + 3\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 =$

$= 140+49+12+3+2 = 206$

$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$

$f(a) = f(a) + f(1)$

$f(1) = 0$ $\quad \frac{8-16}{2-5} = \frac{8}{3}$ $\quad 2{,}66$

$f\left(p\cdot\frac{1}{p}\right) = f(1) = 0 = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f($

$f(2) = 0 \quad f(3) = 0$

$f(1) = f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

2	3	5	7	11	13	17	19	23
0	0	1	1	2	3	4	4	5

$f(x) < f(y)$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1

16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$16x-16 \geq (ax+b)(4x-5)$

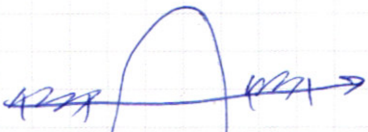
$16x-16 \geq 4ax^2+4bx-5ax-5b$

$4ax^2+(4b-5a-16)x-5b+16 \leq 0$

$x_B = \frac{4b-5a-16}{-8a} = \frac{5a-4b+16}{8a}$

$f(\frac{1}{4}) = \frac{a}{4}+b-\frac{5}{4}a-4-5b+16 =$

$= -a-4b+12.$



$\begin{cases} \frac{1}{4} \geq x_B \\ f(\frac{1}{4}) \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \leq x_B \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$

$\frac{1}{4} \geq \frac{5a-4b+16}{8a}$

$\frac{5a-4b+16-2a}{a} \leq 0$ $\quad$ $\frac{5a-4b+16-8a}{a} \leq 0$

$\frac{3a-4b+16}{a} \leq 0$ $\quad$ $\frac{-3a-4b+16}{a} \leq 0$

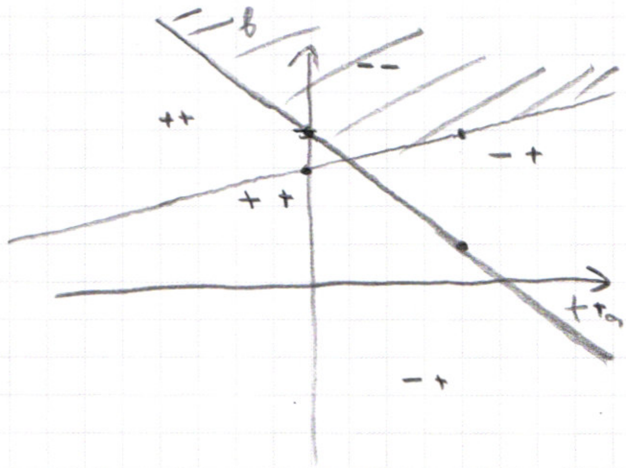
$4a+4b-5a-16-5b+16=$

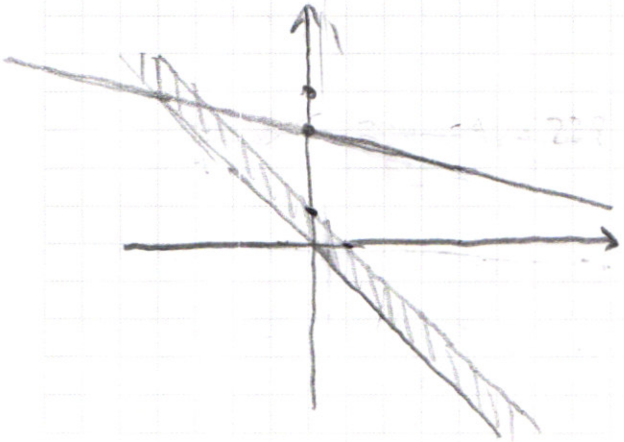
$=-a-b+16$

$\cancel{5a-4b+16-2a}$

$\begin{cases} \frac{3a-4b+16}{a} \leq 0 \\ -a-4b+12 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3a+4b-16}{a} \geq 0 \\ -a-b+16 \leq 0 \end{cases}$





$-2+9-3$

$0 \leq a+b \leq 1$

$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$ $\quad$ $\frac{8-16}{2-5} = -\frac{8}{5}$

$-8+18-3=7$

$3 \leq \frac{a}{4}+b \leq 4$

$-4 \leq -\frac{a}{4}-b \leq -3$

$-4 \leq \frac{3}{4}a \leq -2$

$-\frac{16}{3} \leq a \leq -\frac{8}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-32x^2+36x-3$

$-8+18-3=7$

$-2+9-3$

$-\frac{9}{8}+\frac{81}{4}-3=20,25-1,125-3=16,125$

$\cancel{-2}$

$-18+9-3=-12$

$-32\cdot\frac{9}{16}+36\cdot\frac{3}{4}-3=-18+27-3=$

$=6$

$\frac{16x-16}{4x-5}=-32x^2+36x-3$

$16(x-1)=$

$16x-16=-128x^3+144x^2-12x+160x^2-180x+15=-128x^3+284x^2-192x+15$

$-4x+5=\frac{16x-16}{4x-5}$

$-16x^2+40x-25=16x-16$

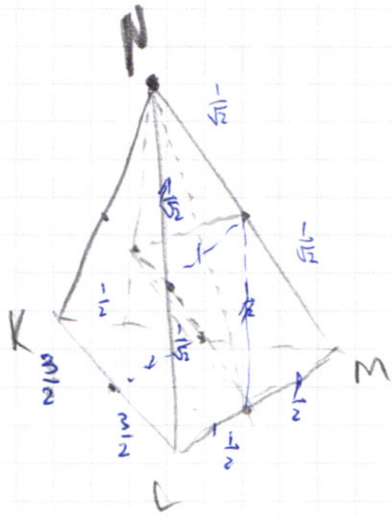
$\cancel{-16x^2}$

$16x^2-24x+9=0$

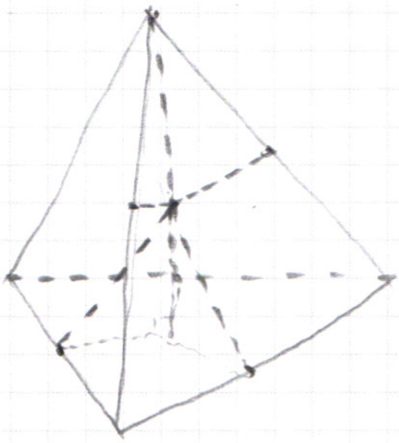
$(\frac{1}{4};x_0)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



LM=1



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

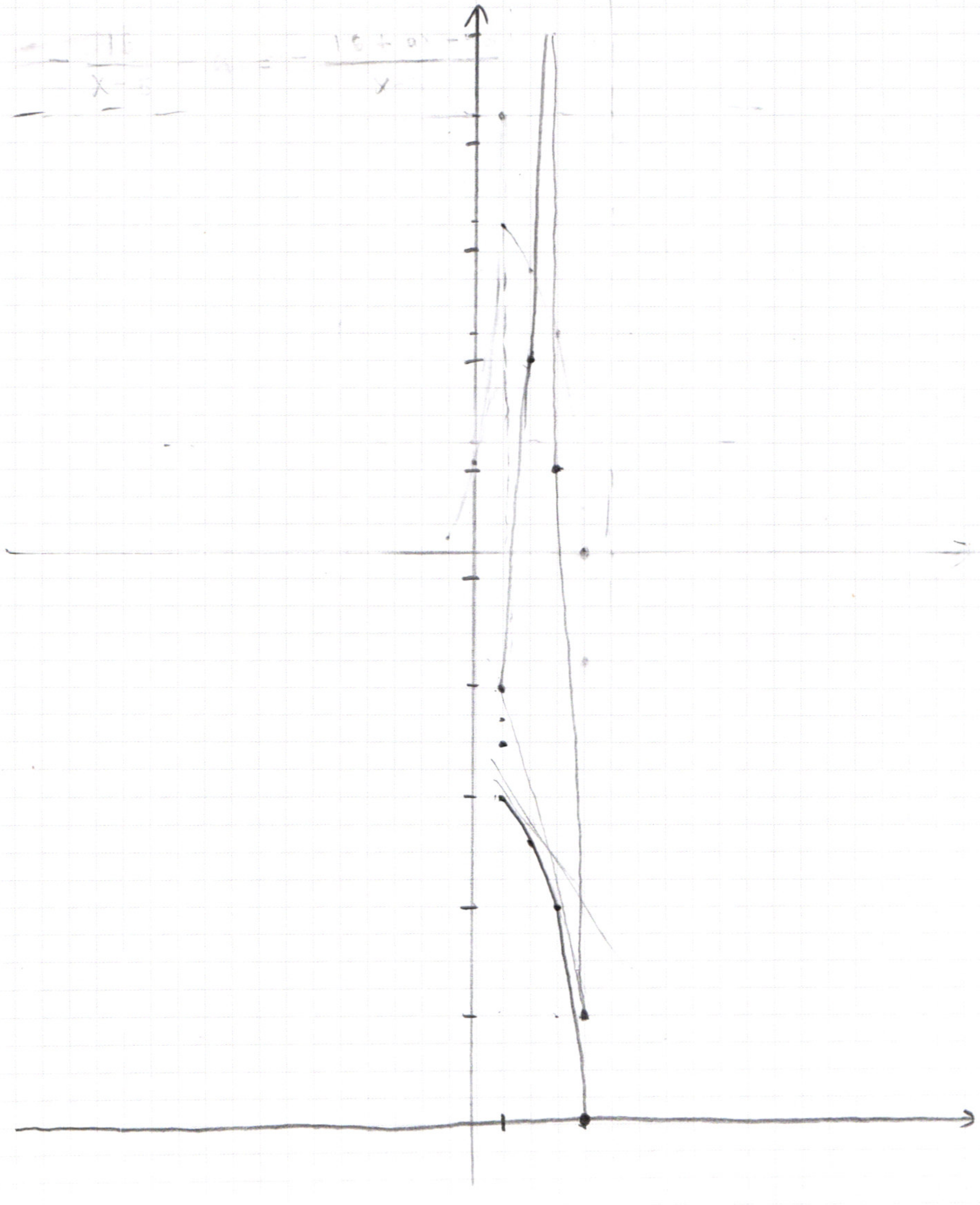
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)