МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD пов[illegible] пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

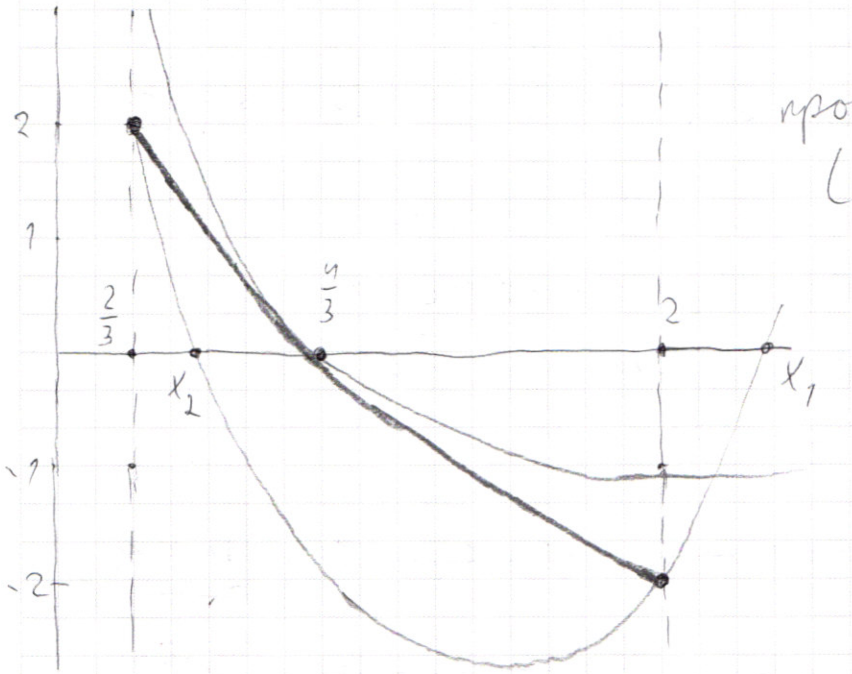
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Найдём коэф-ы прямой проходящей через $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$

$$\begin{cases} a\frac{2}{3} + b = 2 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$$

$$2 - \frac{2}{3}a = -2a - 2$$

$$\frac{4}{3}a = -4$$

$$a = -3$$

$$b = 4$$

Заметим, что эта прямая является касательной к гиперболе: $-3x+4 = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$$(-3x+6)(3x-2) = 4$$

$$-9x^2+24x-12 = 4$$

$$-9x^2+24x-16=0$$

$$-(3x-4)^2=0$$

1-реш $x = \frac{4}{3}$

Следовательно если мы поднимем прямую, то на промежутке она станет выше гиперболы и неравенство не выполнится. Опустить так же нельзя т.к. тогда на концах прямая будет ниже параболы и неравенство не выполнится. Поворачивать в обе стороны нельзя по тем же соображениям $\Rightarrow$ это единственная прямая

Ответ: $(-3; 4)$

рассмотрим промежутки от 0 до 1 и от 25 до 26

$$\lim_{\substack{(26x-x^2)\to 0\\ \text{при } \left[\begin{array}{l} x\to 0\\ x\to 26\end{array}\right.}} \left(\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}\right) = \infty$$

т.к. $\log_5(26x-x^2) \to -\infty$

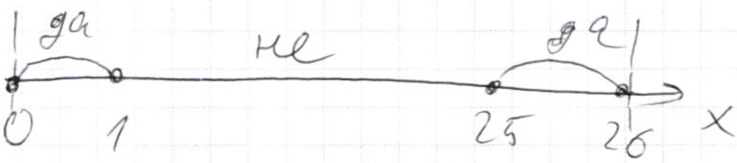
а основания $< 1 \Rightarrow$ дроби $\to \infty$

Из этого следует, что в окрестях 0 и 26 неравенство выполняется.

Но мы так же знаем корни уравнения

$$12^{\log_5(26x-x^2)} + 5^{\log_5(26x-x^2)} = 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

~~а именно в этих точках меняются знаки неравенства~~



~~Ответ: (0; 1] ∪ [25; 26)~~

т.к функции монотонны на участках $(0;13)$ и $(13;26)$

то именно в этих точках поменяются знаки неравенства (это точки пересечения а не касание)

Ответ: $[0; 1] \cup [25; 26)$

2. $-\frac{15}{8}t^2+2t+\frac{15}{8}=0$ $\quad t_{1,2}=\frac{-1\pm\frac{17}{8}}{-\frac{15}{8}}=\frac{8\pm17}{15}=\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{3}\\ -\frac{9}{15}\end{array}\right.$

$\frac{D}{4}=1+\frac{225}{64}=\frac{17^2}{8^2}$

$\ominus$ $\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}+\frac{1}{17}-\frac{16}{17}=-1$

$2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi n$

$tg\,\alpha=-1$ Ответ: $\pm\frac{5}{3}; \pm\frac{9}{15}; -1$

---

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

модуль с $\ominus$ т.к. $26x-x^2>0$

$26x-x^2>0$

$-\quad 0 \quad + \quad 26 \quad -$

$x\in(0;26)$

$12^{\log_5(26x-x^2)}-13^{\log_5(26x-x^2)}+26x-x^2\geq0$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)}\geq13^{\log_5(26x-x^2)}$

равенство достигается при $\log_5(26x-x^2)=2$

$144+25=169$

$26x-x^2=25$

$x^2-26x+25=0$

$x_1=1$

$x_2=25$

~~$26x-x^2=0$ max в точке $x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{26}{2}=13$~~

~~$26\cdot13-13^2=2\cdot13^2-13^2=169$~~

~~$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}+\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}\geq1$~~

~~$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}+\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}=+\infty$~~

~~неравенство выполняется~~ $\Rightarrow$ $0 \quad 1 \quad 25 \quad 26 \quad x$

на промежутке

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1\. $\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ по усл

$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{\frac{17-1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\frac{-\cos(2\beta)}{\sqrt{17}}\pm\frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}+\frac{\cos(2\beta)}{\sqrt{17}}\pm\frac{4\sin(2\beta)}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)+\sin(2\alpha+4\beta)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\cos(2\beta)=-\frac{1}{17\sin(2\alpha+2\beta)}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{\frac{17-1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1: $\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}+\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=\frac{15}{17}$

$\cos 2\alpha=\pm\sqrt{\frac{17^2-15^2}{17^2}}=\pm\frac{8}{17}$

$tg 2\alpha=\pm\frac{15}{8}$ $\quad tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\quad tg^2\alpha\cdot tg 2\alpha+2tg\alpha-tg 2\alpha=0$

1\. $tg\alpha=t$

$\frac{15}{8}t^2+2t-\frac{15}{8}=0$ $\quad t_{1,2}=\frac{-1\pm\frac{17}{8}}{\frac{15}{8}}=\frac{-8\pm17}{15}=\left[\begin{array}{l}\frac{9}{15}\\ -\frac{5}{3}\end{array}\right.$

$\frac{D}{4}=1+\frac{225}{64}=\frac{289}{64}=\frac{17^2}{8^2}$

$a=1 \quad a=x-1 \quad x-1=1 \quad x=2$

$b=9 \quad b=y-6 \quad y-6=9 \quad y=15$

$a=-\sqrt{\frac{18}{5}}=-3\sqrt{\frac{2}{5}}=x-1 \quad x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b=-4\sqrt{\frac{18}{5}}=-12\sqrt{\frac{2}{5}}=y-6 \quad y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

т.к. $\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$x>1 \quad y<6$ Ответ: $(2;15)$; $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$y>6 \quad x<1$

соблюдается.

---

6. $\frac{8-6x}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$ – гипербола $x\neq\frac{2}{3}$

$18x^2-51x+28=0$ парабола

$D=(3\cdot17)^2-4\cdot2\cdot9\cdot7\cdot4=3^2(17^2-8\cdot4\cdot7)=3^2(289-16\cdot14)$

$=3^2\cdot65$

$x_{1,2}=\frac{51\pm3\sqrt{65}}{36}=\frac{17\pm\sqrt{65}}{12}$

$x_1=\frac{17+\sqrt{65}}{12}>\frac{17+8}{12}=\frac{25}{12}>2$

$x_2=\frac{17-\sqrt{65}}{12} \vee \frac{2}{3} \quad 17-\sqrt{65}\vee 8 \quad 9\vee\sqrt{65} \quad 9>\sqrt{65}$

$x_2>\frac{2}{3}$

$f(x)$ – гипербола

$g(x)$ – парабола

$g\left(\frac{2}{3}\right)=18\cdot\frac{4}{9}-34+28=2 \quad f(2)=-2+\frac{4}{6-2}=-1$

$g(2)=18\cdot4-102+28=-2 \quad f(x)=0 \quad 8-6x=0 \quad x=\frac{4}{3}$

Нарисуем эскиз по ключевым точкам

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x+12y=45 \end{cases}$ $\begin{cases} y-6x-6+6=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90 \end{cases}$

$\begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$ $y-6=b$

$x-1=a$

$b-6a\geq 0!$ $ab\geq 0$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ $b^2-12ab+36a^2=ab$

$b^2-13ab+36a^2=0 \quad |:a^2\neq 0$

$\frac{b^2}{a^2}-13\frac{b}{a}+36=0$

$D=169-144=25$

$\frac{b}{a}=\frac{13\pm 5}{2}\left[\begin{array}{l}9\\4\end{array}\right.$

$b=9a$ $b=4a$

$9a^2+81a^2=90$ $9a^2+16a^2=90$

$90a^2=90$ $25a^2=90$

$a^2=1$ $a^2=\frac{18}{5}$ $a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$a=\pm 1$ $b=\pm 4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$b=\pm 9$ $b-6a\geq 0$

$1.\ 4\sqrt{\frac{18}{5}}-6\sqrt{\frac{18}{5}}<0$ $2.\ -4\sqrt{\frac{18}{5}}+6\sqrt{\frac{18}{5}}\geq 0$

$b-6a\geq 0$

$b=9$, $a=1$ подходят

$a=-\sqrt{\frac{18}{5}}$, $b=-4\sqrt{\frac{18}{5}}$ подходят

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$26x - x^2 > 0$ $\quad t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0$

$(26x - x^2) = t$ $\quad t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 - t^{\log_5 \frac{13}{5}} \geq 0 \;|\; : t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$\log_t \left(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1\right) \geq \log_5 \frac{13}{5}$ $\quad \log_t \quad t > 1$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$

$\sin(2(\alpha + \beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin(2(\alpha + 2\beta)) = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha + 4\beta) =$

~~$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$~~

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta) + \cos 4\alpha \sin 4\beta$

$\sin(2\alpha)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + \cos(2(\alpha + \beta))\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + (\cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$-\cos 2\beta$

~~$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$~~ $\cos 2\beta\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \sin 2\alpha(\sin^2 2\beta - 1) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta\left(\cos 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \cos 2\beta \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\left(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12} 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x - x^2 > 0$

$x(26-x)$

$- \quad + \quad -$

$0 \quad 26$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} - (26x-x^2)^{\log_5 13} \geq x^2 - 26x$

$26x - x^2 = t \quad t > 0$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \geq t$

$\log_5 13 > \log_5 12$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} - t \geq 0 \quad t \geq 1 \quad$ то $\varnothing$

$x^2 - 26x < 0$

$t(t^{\log_5 12 - 1} - t^{\log_5 13 - 1} - 1) \geq 0$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} - (26x-x^2)^{\log_5 12} \geq x^2 - 26x$

$t < 1 \quad$ то $t^{\log_5 12}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} - (26x-x^2)^{\log_5 13} \geq x^2 - 26x$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} \geq 1$

$\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} - \frac{13}{5}^{\log_5 t} \geq 9 \quad \Big|: \frac{13}{5}^{\log_5 t}$

$\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} \geq 1$

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} - 1 \geq \frac{13}{5}^{-\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} - (-t)^{\log_5 13} \geq t$

$\frac{-t}{(-t)^{\log_5 13}} = -(-t)^{1-\log_5 13} = -(-t)^{\log_5\left(\frac{5}{13}\right)}$

$t(t^{\log_5}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{12}$

$x_1 = \frac{17+\sqrt{65}}{12} > \frac{17+8}{12} = \frac{25}{12} > 2$

$x_2 = \frac{17-\sqrt{65}}{12} < \frac{17-8}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$-9x^2+24x-12=4$

$-9x^2+24x-16=0$

$-3^2x^2+2\cdot 12x-4^2$

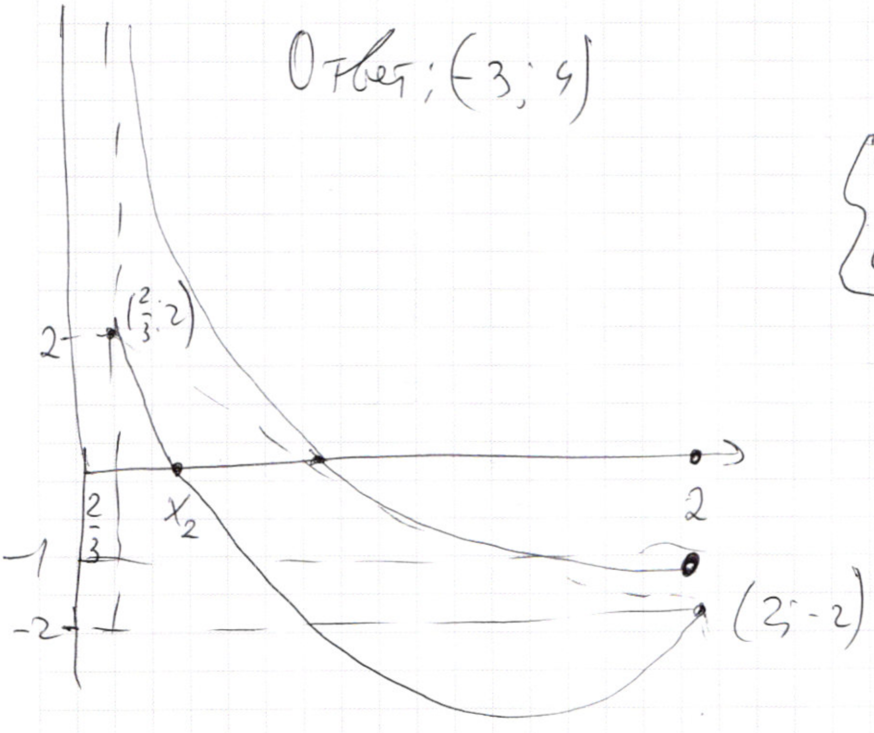
$-(3x-4)^2=0$

$\frac{17-\sqrt{65}}{12} > \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{17-\sqrt{65}}{12} < \frac{4}{3}$

$17-\sqrt{65} > 8$ $\qquad$ $17-\sqrt{65} < 16$

$9 > \sqrt{65}$ $\qquad$ $1 < \sqrt{65}$

Ответ: $(-3; 4)$



$ax+b$ $\qquad$ $-3x+4$

$\begin{cases} a\cdot\frac{2}{3}+b=2 & b=2-\frac{2}{3}a \\ a\cdot 2+b=-2 & b=-2a-2 \end{cases}$

$2-\frac{2}{3}a=-2a-2$

$\frac{4}{3}a=-4$

$a=-3$

$b=6-2=4$

$-3x+4=-2+\frac{4}{3x-2}$

$-3x+6=\frac{4}{3x-2}$

$(-3x+6)(3x-2)=-9x^2+6x+18x-12$

$-9x^2+24x-12$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad x; y \in [4; 28]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4y}\right]$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]}^{=0}$

$\vee$

1

$[1] = 1$

$$\left[\frac{x}{4y}\right] = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]$$

$$\left[\frac{1}{4}\right] \neq [1] + \left[\frac{1}{16}\right]$$

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ если x - простое

$\left[\frac{x}{4}\right] + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f\left(\frac{a}{b}\right) < 0$ если

~~f(a) < 0~~ $|f(a)| > |f(b)|$

~~f(b) < 0~~

$$\left[\begin{array}{ll} f_1 < 0 & f_2 < 0 \\ f_1 < 0 & |f_1| > f_2 \end{array}\right.$$

1, 2, 3, 4, 5.

$f(x) < 0$ - то x - не простое

и $\frac{x}{y}$ - не простое $\quad x$ - чёт, y - неч

y - чёт

$\frac{x}{y}$ 1; 2; 3; 5; 7 - простые

$x \geq 4y$

$y < 7$

$(26-x)x^{\log_5 12} - (26-x)x^{\log_5 13} - 26x + x^2 \geq 0$

$(26-x)\cdot x^{\log_5 \frac{12}{5}} - (26-x)x^{\log_5 \frac{13}{5}} \geqslant -1 \quad \Big| : x^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$(26-x)^{\log_5 \frac{12}{5}} \cdot x^{\log_5 \frac{12}{13}} - (26-x)^{\log_5 \frac{13}{5}} \geqslant -\frac{1}{x^{\log_5 \frac{13}{5}}} \Big| : (26-x)^{\log_5 \frac{12}{5}}$

$x^{\log_5 \frac{12}{13}} - (26-x)^{\log_5 \frac{13}{12}} \geqslant -\frac{1}{x^{\log_5 \frac{13}{5}} \cdot (26-x)^{\log_5 \frac{12}{5}}}$

~~x - ...~~ $\quad 13^2 - 13^2 + 26x - x^2 = -(13-x)^2$

x-простое

$13^2 - (13-x)^2$

$[\frac{x}{y}] \leftarrow f(\frac{x}{y})$

$(13^2-(13-x)^2)^{\log_5 12} - (13^2-(13-x)^2)^{\log_5 13}$

$x^2 - 26x + 13^2 - 13^2$

$(x - 13)^2 - 13^2$

$12^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 0$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geqslant 13^{\log_5 t}$ равенство при $t = 25$

$12^2 + 5^2 = 13^2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

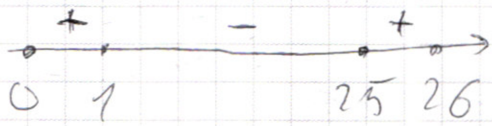
продолжение N 3 (для 26 аналогичный предел)

т.к. при $x \to 0$ и 26 неравенство выполняется и $x \neq 0$

~~то на промежутке~~

то для выражения $12^{\log_5(26x-x^2)} + 5^{\log_5(26x-x^2)} - 13^{\log_5(26x-x^2)}$

будут следующие знаки



при $x = 13$

$12^n + 5^n \geqslant 13^n$ где $n > 2$

не выполняется т.к. $\log_5 169 > \log_5 25$

доп. аргумент что знаки именно такие

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\ominus \sin 2\alpha = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{16}{\sqrt{17}}}{\sqrt{17}} - \dfrac{2}{17} = \dfrac{17}{17} - \dfrac{2}{17} = \dfrac{15}{17}$

$\ominus = \cos 2\alpha = 0$ ~~$= \alpha t$~~

$\begin{array}{r} 289 \\ -225 \\ \hline 64 \end{array}$

$2\alpha = -\dfrac{\pi}{2}$

$\ominus \cos^2 2\alpha = \dfrac{289 - 225}{289} = \dfrac{64}{289} \Rightarrow \dfrac{8}{17}$

$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

$tg\,\alpha = -1$

$tg(2\alpha) = \dfrac{15}{8}$ $\quad tg(2\alpha) = \dfrac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

~~$\alpha = tg\,2\alpha$~~

$12^{\log(26x - x^2)} + 26x - x^2 - \cancel{(26x - x^2)}^{\log}$

$13^{\log_5(26x - x^2)}$

~~$26x - x^2 \geq 0$~~

$12^{\log_5(26x - x^2)} - 13^{\log_5(26x - x^2)} - 26x - x^2 \geq 0$

$\log_5(26x - x^2) = t \quad 12^{\log_5 x} \cdot 12^{\log(26 - x)} - 13^{\log_5 x} \cdot 13^{\log(26 - x)}$ $\quad \log(26-x) > 0$

$26x - x^2 = t^5 \quad x^{\log \frac{12}{13}} (26 - x) - x \cdot (26 - x)^{\log \frac{13}{12}}$

$12^t - 13^t - t^5 \geq 0$

$\log\ 13^{\log_5(x(26 - x))} = 13^{\log_5 x} \cdot 13^{\log_5(26 - x)}$

$x^{\log_5 12} - (26 - x) \quad x^{\log_5 13} \cdot (26 - x)^{\log_5 13}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\sqrt{\frac{17-1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

(+)

$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{\cos 2\beta - 4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} - \frac{2}{17}$ $\quad\cos^2 2\alpha =$

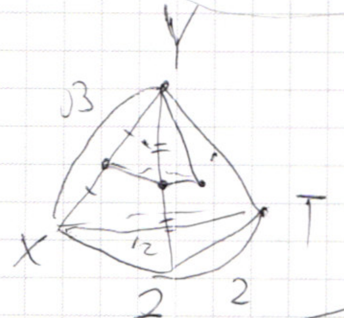
(−) $\sin 2\alpha = \frac{\cos 2\beta + 4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} - \frac{2}{17}$

(+) $\sin(2\alpha)\cos 2\beta + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2 2\beta + 4\sin 2\beta\cos 2\beta$ $\quad\cancel{\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}$

$\frac{1+\cos 4\beta}{2}$ $\quad 2\sin 4\beta$

$\frac{1+\cos 4\beta+4\sin 2\beta}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha + \frac{2}{17}$



$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{17\cdot\sin} = \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2 2\beta = \frac{17-1}{17} = \frac{16}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{16}{\sqrt{17}}}{\sqrt{17}} - \frac{2}{17} = \frac{1-16}{17} - \frac{2}{17} = \frac{-15-2}{17} = -1$

$\sin 2\alpha = -1$

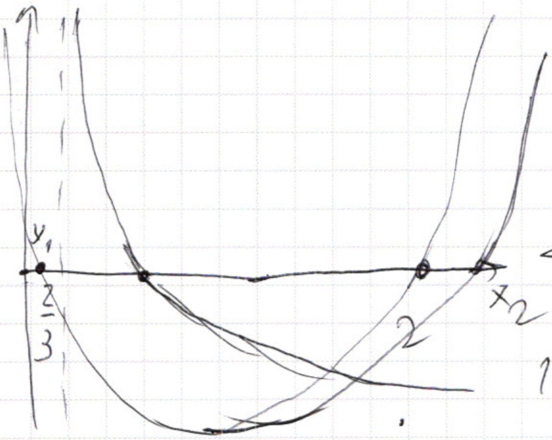
$132 \times 7 = 924$ $\qquad 16 \times 7 = 112$ $\qquad 289 - 112 = 177$ $\qquad 177 : 3 = 59$ $\qquad 289 - 224 = 65$

$18x^2 - 51x + 28$

$D = (3\cdot17)^2 - 4\cdot2\cdot9\cdot7\cdot4 = 9(17^2 - \cancel{8\cdot4\cdot7}) = 9(289 - 16\cdot7) =$

$\cancel{= 9\cdot177 = 9\cdot3\cdot59}$ $\quad 9\cdot65$

$x_{1,2} = \dfrac{51 \pm 3\sqrt{3\cdot59}}{36} = \dfrac{17 \pm \sqrt{177}}{12}$ $\qquad 169 < 177 < 196$



$\dfrac{17-13}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{17-14}{12} = \dfrac{5}{12} < \dfrac{1}{2}$

$\cancel{\dfrac{17-\sqrt{177}}{12} < \dfrac{17-14}{12} = \dfrac{5}{12}}$

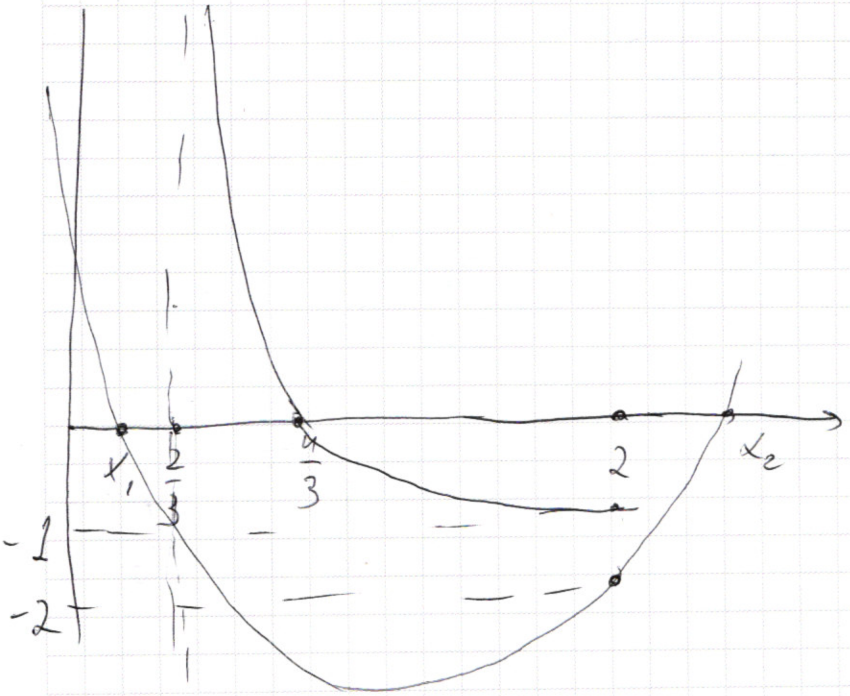
$\dfrac{17-\sqrt{177}}{12} < \dfrac{2}{3}$ $\qquad \dfrac{17-\sqrt{177}}{12} > \dfrac{17-13}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

$\cancel{\dfrac{17+\sqrt{177}}{12} < \dfrac{17+14}{12} = \dfrac{31}{12}} > 2$

$\dfrac{17+\sqrt{177}}{12} > \dfrac{17+13}{12} = \dfrac{30}{12} = \dfrac{5}{2} > 2$

$-2 + \dfrac{4}{3x-2}$ $\qquad -2 + \dfrac{4}{6-2} = -1$ $\qquad \cancel{18}^{\,2}\cdot\dfrac{4}{\cancel{9}} - 51\cdot\dfrac{2}{3} + 28$

$8 - 34 + 28 = 2$



$\dfrac{17-\sqrt{177}}{12} < \dfrac{2}{3}$

$17 - \sqrt{177} \vee 8$

$9 < \sqrt{177}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

~~$3(6x^2-17x+$~~

$D = 51^2 - 4\cdot 18\cdot 28$

$3^2\cdot 17^2 - 4\cdot 9\cdot 2\cdot 4\cdot 8 = 3^2(17^2 - 16\cdot 2\cdot 8)$

$3^2(17^2-2^4\cdot 2\cdot 2^3) = 3^2(17^2-2^8) = 3^2(17^2-16^2) =$

$= 3^2(17-16)(17+16) = 3^2\cdot 33$

$\sqrt{33} < 7$

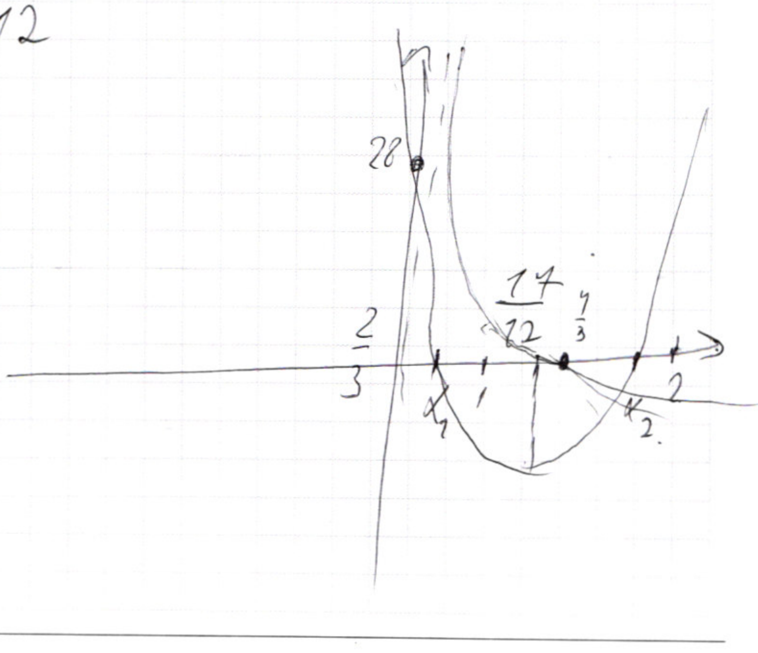
$x_{1,2} = \frac{51\pm 3\sqrt{33}}{36} = \frac{17\pm\sqrt{33}}{12}$

$\frac{4}{3x-2} = 2$

$4 = 6x-4$

$6x-8=0$

$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$



$12\cdot 4 - 102 + 28$

$40+32 \quad 72+28 = 100-102 = -2$

$y^2 - \cancel{6}12xy + 36x^2 - xy + 6x - 6 + y = 0$

$\cancel{6x(26x+1)}$ $12x(3x-y)$ y^2 $-xy$

$3x - y + 3x + 2y - 6$

$y^2 + 36x^2$ $\cancel{-6x(y-1)}$ $(3x-y)(12x+1)$

$\cancel{y = 2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}}$

$y^2 - xy + 3x + 2y - 6$

$(y-6x) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y(y-x) + 3x - 3y -$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$9a^2 + b^2 = 90$

ab

$\overset{b}{(y-6)} - 6(\overset{a}{x-1}) = \sqrt{(\overset{a}{x+1})(\overset{b}{y-6})}$

$9(\underset{a}{x+1})^2 + (\underset{b}{y-6})^2 - 90$

$y - 6x + 6 - 6$

$y - 6 - 6(x-1)$

$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$ $b^2 = 90 - 9a^2$

$D = 1\cancel{8}9 - 144 = 25$

$b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$b_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left[\begin{matrix} 9 \\ 4 \end{matrix}\right.$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0 \quad |:a^2$

$\cancel{b_{1,2} = 13a \pm \sqrt{36a^4}}$

$\frac{b}{a} = \begin{matrix} b = 9a \\ b = 4a \end{matrix}$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 13\frac{b}{a} + 36 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

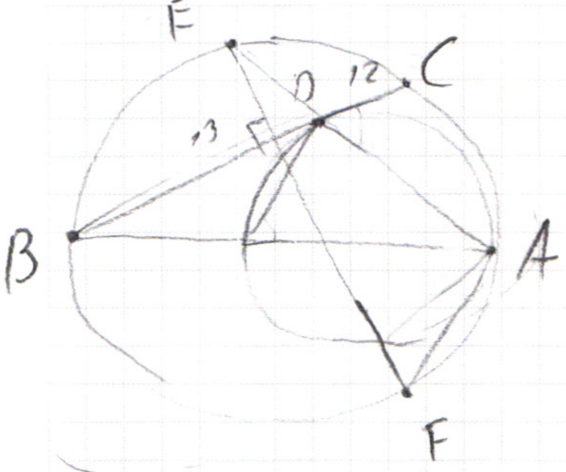
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = 12$ $\angle AFE$ ч. R

$BD = 13$ $S_{\text{ц}ABFE}$

$ED \cdot DA = 12 \cdot 13$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 91 \end{cases}$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$9x^2 - 2 \cdot 9x + 9 + y^2 - 12y + 36 -$

$9(x^2 - 2x + 1) \quad + y^2 - 2 \cdot 6y + 6^2 = 90$

$9(x^2 - 1)^2 + (y - 6)^2 = 90$

$y - 6 = 3\sqrt{10}$

$y = 3(2 \pm \sqrt{10})$

$y \geq 6 \quad y < 0$

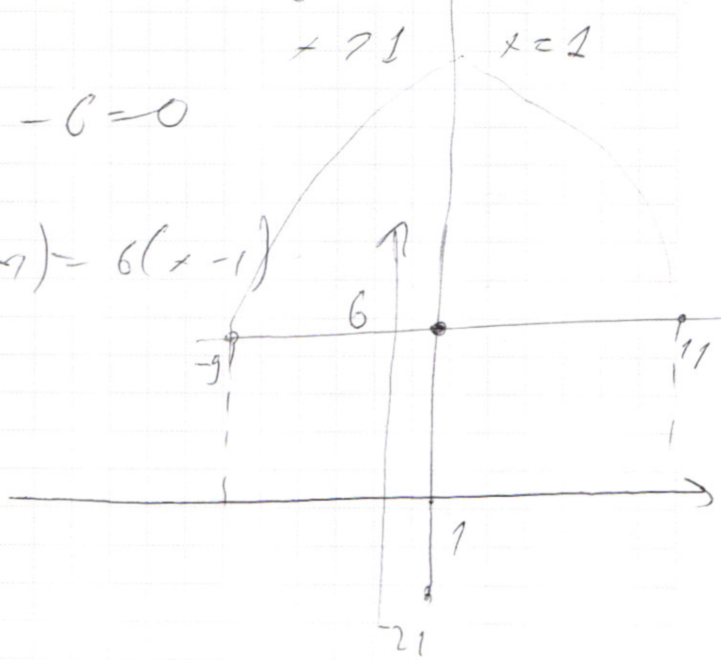
$x \geq 1 \quad x = 1$

$y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0$

$xy - y - 6(x - 1) \qquad y(x-1) = 6(x-1)$

$y(x-1) - 6(x-1)$

$(x-1)(y-6)$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)