МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

По усл. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{8}{17}\cdot\frac{-\sqrt{17}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда, т.к. по осн. триг. тождеству $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, то

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \;\Big|\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha = -\cos^2\alpha$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0 \text{ – не подходит, т.к. тогда } \operatorname{tg}\alpha \text{ не сущ.}\\ 4\sin\alpha = -\cos\alpha\end{array}\right.$

$\Updownarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \;\Big|\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha$

$\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ 4\cos\alpha = -\sin\alpha\end{array}\right.$

$\Updownarrow$

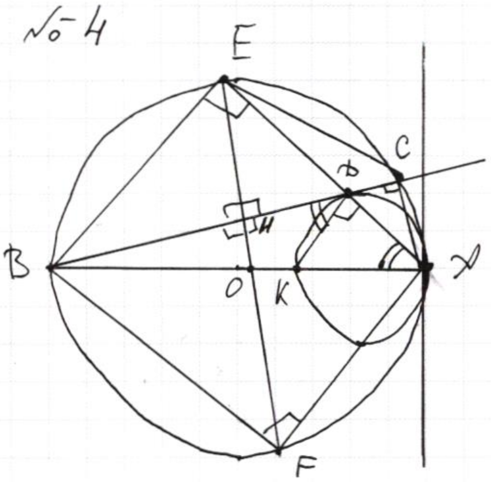
$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha = -4\end{array}\right.$

Тогда:

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}\\ \operatorname{tg}\alpha=-4\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}\\ \operatorname{tg}\alpha=-4\end{array}\right.$

№ 4



Пусть $\omega \cap AB = A$ и $\omega \cap AB = K$. Тогда $\angle ADK = 90°$ (оп. на диам. AK)
BD – кас. к ω => $\angle BDK = \angle DAK$ (оп. на дугу DK). $\angle BKD$ – внешний угол $\triangle ADK$ => $\angle BKD = 90 + \angle DAK$
Пусть $EF \cap AB = O$, $EF \cap BD = H$
$\angle HOK = 360° - \angle OHD - \angle OKD - \angle KDH = 360° - 90° - 90° - \angle DAK - \angle DAK = 180° - 2\angle DAK$ => $\angle EOB = 180° - \angle HOK = 180° - 180° + 2\angle DAK = 2\angle DAK$ => => $\angle EOB$ – центр. угол, оп. на дугу BE, т.к. $\angle EAB$ – впис. угол, оп. на дугу BE, и $\angle EAB \cdot 2 = \angle EOB$ => => O – центр большей окр-ти => => $BO = AO$.
$O \in EF$ => EF – диаметр Ω =>
=> $\angle BEA$, $\angle BFA$, $\angle EAF$, $\angle EBF$ оп. на диаметр => $\angle BEA = \angle BFA = \angle EAF = \angle EBF = 90°$ => EH – высота, пров. из прямого угла $\triangle BED$ => => $EH = \sqrt{BH \cdot DH}$
Найдем BH и DH.
Заметим, что $\angle ACB = 90°$ (оп. на диаметр) $= \angle OHB$ ($EF \perp BD$) => => $AC \parallel OH$, но $BO = OA$ => OH – ср. линия $\triangle BAC$ => $OH = \frac{1}{2}AC$; $BH = HC$ => $BH = \frac{BC}{2} = \frac{BD + CD}{2} = \frac{9}{2}$ => $DH = BD - BH = 2$
Тогда $EH = \sqrt{BH \cdot DH} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot 2} = 3$
Рассм-м $\triangle EHD$ и $\triangle ADC$. $\angle EHD = \angle ACD = 90°$; $\angle EDH = \angle ADC$ – верт. => => по углам $\triangle EHD \sim \triangle ACD$ => $EH : AC = HD : DC = 2 : \frac{5}{2} = 4 : 5$ => => $\frac{EH}{AC} = \frac{4}{5}$ => $\frac{3}{AC} = \frac{4}{5}$ => $AC = \frac{15}{4}$ => $OH = \frac{1}{2}AC = \frac{15}{8}$ => $EO = EH + HO = 3 + \frac{15}{8} = \frac{39}{8} = OF$ => $EF = \frac{39}{4}$, $R = OF = \frac{39}{8}$
$\rho(A; EF) = \rho(AC; EF)$, т.к. $AC \parallel EF$ => $\rho(A; EF) = CH = BH = \frac{9}{2}$ =>
=> $S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{39}{4} = \frac{39 \cdot 9}{16}$
$BEAF$ – прямоугольник => $BE = AF$. BE по т. Пифагора в $\triangle BEH$:
$BE = \sqrt{EH^2 + BH^2} = \sqrt{9 + \frac{81}{4}} = \frac{\sqrt{117}}{2}$ => $AF = \frac{\sqrt{117}}{2}$
$S_{AFE} = \frac{39 \cdot 9}{16} = \frac{1}{2} AF \cdot EF \cdot \sin AFE = \frac{\sqrt{117}}{4} \cdot \frac{39}{4} \cdot \sin AFE$ => $\sin AFE = \frac{9}{\sqrt{117}}$ => => $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{9}{\sqrt{117}}\right)$
$\sin(EAB) = \frac{BE}{AB}$ из п/у $\triangle AEB$ => $\sin(EAB) = \frac{\sqrt{117}}{2} \cdot \frac{4}{39} = \frac{2\sqrt{117}}{39}$ =>
=> $\cos(EAB) = \sqrt{1 - \sin^2(EAB)} = \frac{\sqrt{1053}}{39}$
$AE = BF$ => по т. Пифагора из $\triangle BHF$ $BF = \sqrt{BH^2 + HF^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{27 \cdot 27}{16}} = \frac{9\sqrt{13}}{2}$ => $AE = \frac{9\sqrt{13}}{2}$; но $ED : DA = 4 : 5$ => $AD = \frac{5}{9} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{2}$
Тогда $r = \frac{1}{2} AK = \frac{1}{2}\left(\frac{AD}{\cos DAK}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{39}{\sqrt{1053}} = \frac{5 \cdot 39\sqrt{13}}{4\sqrt{1053}}$

Ответ: $r = \frac{5 \cdot 39\sqrt{13}}{4\sqrt{1053}}$; $R = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{9}{\sqrt{117}}\right)$; $S_{AEF} = \frac{39 \cdot 9}{16}$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cancel{3y \geq 2x} \\ \cancel{9y^2+4x^2=3xy-2x-3y+2} \\ \cancel{3x^2+3y^2-6x-4y=4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x(x-2)+3y(y-2)=2(2-y) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \cancel{3y-2x\geq 0} \\ \cancel{(3y-2x)(3y-2x)=(x-1)(3y-2)} \\ \cancel{3x(x-2)+(y-2)(3y+2)=0} \end{cases}$$

Пусть $3y-2=a$; $x-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 2b \\ a^2+4b^2-5ab=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ a\geq 2b \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ a \geq 2b \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 1 случай:

$a=b \Rightarrow 3y-2=x-1 \Rightarrow x=3y-1$

$3\cdot(3y-1)^2-18y+6-4y=4$

$3\cdot(3y-1)^2-22y+2=0$

$27y^2-40y+5=0$

$y=20\pm\sqrt{365}$

$a\geq 2b \Rightarrow 3y-2\geq 2x-2 \Rightarrow 3y \geq 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y \geq 6y-2 \Rightarrow 3y \leq 2 \Rightarrow y \neq 20+\sqrt{365}$. $20-\sqrt{365}\not\geq 2$

$-\sqrt{365} \not\geq -38 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=20-\sqrt{365}$; $x=59-\sqrt{365}$ подходит.

2 случай: $a=4b \Rightarrow 4b\geq 2b \Rightarrow b \geq 0 \Rightarrow y\geq \frac{2}{3}$; $x=\frac{3y+2}{4} \Rightarrow 75y^2-100y-100=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y^2-4y-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \text{ – не подх.} \end{array}\right. \Rightarrow y=2;\ x=2 \Rightarrow$ Ответ: $(2;2)$; $(59-\sqrt{365}; 20-\sqrt{365})$

№5

$f(x/y)+f(y)=f(x) \Rightarrow f(x/y)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Простые числа от 3 до 27: 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23

число x	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(x)$	0	~~2~~ 1	~~2~~ 1	2	3	4	4	5

Если x и y – простые, то:

$x=3 \to y\geq 5$

$x=5 \to y \geq 11$

$x=7 \to y\geq 11$

$x=11 \to y\geq 13$

$x=13 \to y \geq 17$

$x=17 \to y\geq 23$

$x=19 \to y \geq 23$

$x=23 \to y \in \varnothing$

$\Rightarrow$ кол-во подходящих случаев: $7+5+5+4+4+1+1=27$

Если $f(x/y)$ – простое или 1, то это невозможно

Ответ: 27

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

ОДЗ:

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)^{\log_4 4} \ge (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Замена: $x^2+6x=t$; $t>0$

$t^{\log_4 3} + t \ge \cancel{(x^2+6x)} \; t^{\log_4 5}$

$t\left(1+t^{\log_4\frac{3}{4}} - t^{\log_4\frac{5}{4}}\right)\ge 0$

$t>0 \Rightarrow 1+t^{\log_4\frac{3}{4}} \ge t^{\log_4\frac{5}{4}}$

$1+\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 t} \ge \frac{5}{4}^{\log_4 t}$

Замена: $\log_4 t = y$

$\underbrace{1+\left(\frac{3}{4}\right)^y}\ge\left(\frac{5}{4}\right)^y$

$f(y)=1+\left(\frac{3}{4}\right)^y$ – убыв. ф-ия, т.к. $\frac{3}{4}<1$; $g(y)=\left(\frac{5}{4}\right)^y$ – возр. ф-ия, т.к. $\frac{5}{4}>1 \Rightarrow 1+\left(\frac{3}{4}\right)^y\ge\left(\frac{5}{4}\right)^y$ имеет реш. $y\in(-\infty;y_0]$, где y_0 – точка р-ва знач. ф-ий (пересекаются 1 раз вследствие монотонности). $1+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow y\le 2$

Тогда $\log_4 t\le 2 \Rightarrow t\le 16 \Rightarrow x^2+6x\le 16 \Rightarrow x^2+6x-16\le 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-2)(x+8)\le 0 \Rightarrow x\in[-8;2]$, но по ОДЗ $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

1) $8x^2-34x+30 \leq ax+b$

$\underbrace{8x^2-x(34+a)+(30-b)}\leq 0$

$f(x)=8x^2-x(34+a)+(30-b)$ – парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ н-во выполнено для всех $x\in(1;3]$, если $f(1)\leq 0$ и $f(3)\leq 0$

$\begin{cases} 8-34-a+30-b\leq 0 \\ 72+102-3a+30-b\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\leq a+b \\ 3a+b\geq 0\end{cases}$

2) $\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b$

$2+\frac{1}{2x-2}\geq ax+b$

$\frac{1}{2x-2}\geq ax+(b-2)$

Случай 1: $a=0$

$\underbrace{\frac{1}{2x-2}}\geq b-2$

$g(x)=\frac{1}{2x-2}$ – убыв. ф-ия при $x>1$; при $x\in(1;3]$ $g(x)\in[\frac{1}{4};+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow b-2\leq\frac{1}{4}\Rightarrow b\leq 2{,}25$; но $\begin{cases}4\leq a+b\\ 3a+b\geq 0\end{cases}\Rightarrow a\neq 0$

Случай 2: $a>0$

$\underbrace{\frac{1}{2x-2}}\geq \underline{ax+(b-2)}$

$y=ax+(b-2)$ возр. при $x\in(1;3]$ $\Big|\Rightarrow$

$g(x)$ убывает при $x\in(1;3]$

$\Rightarrow$ чтобы н-во выполнялось для всех $x\in(1;3]$, необходимо и дост., чтобы $y(3)\leq 0{,}25\Rightarrow 3a+b-2\leq 0{,}25\Rightarrow 3a+b\leq 2{,}25$

$4\leq a+b\Rightarrow b\geq 4-a\Rightarrow 3a+4-a\leq 3a+b\leq 2{,}25\Rightarrow 2a+4\leq 3a+b\leq 2{,}25$,

но $a>0\Rightarrow 2a+4>4\Rightarrow 4\leq 2{,}25$, что неверно $\Rightarrow$ это невозможно

Случай 3: $a<0$

$\frac{1}{2x-2}\geq ax+(b-2)$

$\frac{4x-3-2ax^2+2ax-2bx+2b}{x-1}\leq 0$

$\frac{2a^2-2x(a-b+4)-(2b-3)}{x-1}\leq 0 \quad \Big| \cdot (x-1)>0$

$2ax^2 - 2x(a-b+4) - (2b-3) \le 0$

$a < 0 \Rightarrow y = 2ax^2 - 2x(a-b+4) - (2b-3)$ – парабола с ветвями вниз $\Rightarrow$ чтобы н-во выполнялось при всех $x \in (1;3]$,

$y(1) \le 0$ и $y(3) \le 0$

$$\begin{cases} 2a - 2a + 2b - 8 - 2b + 3 \le 0 \\ 18a - 6a + 6b - 24 - 2b + 3 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \le 0 \\ 12a + 4b - 21 \le 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$4(3a+b) \le 21$

$(3a+b) \le 5,25$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 3a+b \le \frac{21}{4} \\ 4 \le a+b \\ 3a+b \ge 0 \end{cases}$$

~~$b \ge 4-a$ $\Rightarrow$ $0 \le 2a+4 \le \frac{21}{4}$ $0 \le 2a+4 \le 3a+b$~~

~~$a \ge 4-b$ $-4 \le 2a \le$~~

$0 \le 3a+b \le \frac{21}{4}$

$a < 0 \Rightarrow b \le \frac{21}{4}$

$$\begin{cases} b \ge -3a \\ b \ge 4-a \end{cases}$$

$\Downarrow$

подходят такие пары $(a;b)$, где $a<0$; $b \le \min(-3a; 4-a) \le \frac{21}{4}$

~~Ответ: $a<0$; $b \le \min(-3a;$~~

$-3a \le 4-a \Rightarrow a \ge -2$; $b \le -3a \le \frac{21}{4} \Rightarrow b \le -3a$ при $a \in [-\frac{7}{4}; 0)$

$4-a \ge -3a \Rightarrow a \le -2$; $b \le 4-a \le \frac{21}{4} \Rightarrow 4-a \le \frac{21}{4} \Rightarrow -a \le \frac{5}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow a \ge -\frac{5}{4}$, но $a \le -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходят пары $(a;b)$, где $a \in [-\frac{7}{4}; 0)$; $b \le -3a$

Ответ: $(a;b)$, где $a \in [-\frac{7}{4}; 0)$; $b \le -3a$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3(x^2 + y^2 - 2x) = 4(y+1)$

$-a \le \frac{5}{4}$

$-3a \le \frac{21}{4}$

$-a \le \frac{7}{4}$

$a \ge -\frac{7}{4}$

$3y - 2x$

$3x^2 + 3y^2 - 4 = 2(3x + 2y)$

$3x(x-2) + 3y(y-2)$

$(3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

$3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$9y^2 + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 36y = 36$

$5x^2 - 20x - 33y + 3xy - 34$

xy

$x-y$

$3y - 2x$

$3y + 2x$

$3x + 2y$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax + b \ge 8x^2 - 34x + 30 = \cancel{(2\sqrt{2}x)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}}$

$2(4x^2 - 17x + 15)$ $((2\sqrt{2})x)^2 - 2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{17}{2\sqrt{2}} + \frac{289}{8}$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

$\frac{289}{8} = 36\frac{1}{8}$

$\frac{125}{100} = \frac{5}{4}$

$a \ge 4 - b$

$4 \le a + b$

$12 - 3b + b \le 5{,}25$

$b \ge 4 - a$

$2a + 4 \le 5{,}25$

$3a + 4 - a$

$2a \le 1{,}25$

$a \le \frac{5}{8}$

$x \in (1; 3]$

$6{,}75 \le 2b$

$2 + \frac{1}{2x-2} \ge 2 + \frac{1}{4} \ge ax + b \ge \left(2\sqrt{2}x - \frac{17}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 6\frac{1}{8}$

$b \ge 4 - a$

$\frac{675}{100} = \frac{27}{4}$ 224 28

$a \ge 4 - b$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$D_1 = 289 - 8 \cdot = 65$

$2{,}25 \ge 3a + b \ge 12 - 2b$

$f(p) = \frac{p}{4}$

$160 + 64$ 224

$2{,}25 \ge 3a + b \ge 2a + 4$

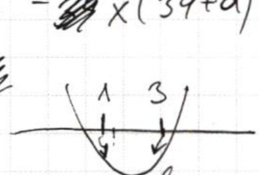
$f(ab) = f(a) + f(b)$

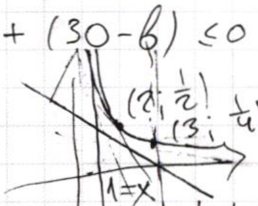
$8x^2 - 34x + 30 \le ax + b$

$\frac{525}{100} = \frac{21}{4}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$8x^2 - x(34 + a) + (30 - b) \le 0$





$(2; \frac{1}{2})$

$(3; \frac{1}{4})$

$4 - a \le -3a$

$\frac{4x-3}{2x-2} - ax - b \ge 0$

$\frac{4x - 3 - 2ax^2 + 2ax - 2bx + 2b}{2x-2} \ge 0$

$\begin{cases} 8 - 34 - a + 30 - b \le 0 \\ 72 - 102 - 3a + 30 - b \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \le a + b \\ 3a + b \ge 0 \end{cases}$

$2ax^2 - 2x(a - b + 4) - (2b - 3)$

≤ 0

$4 \le a + b$

$\frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

1) $a = 0$: $-2x(4 - b) - 2b - 3 = 2x(b - 4) \le 2b + 3$

$a = 0$:

$3a + b \ge 0$

$0 \ge ax + b \ge 2 + \frac{1}{2x-2}$

$(2; \frac{5}{2})$ $(3; 2{,}25)$

$3a + b \le 2{,}25$

$-3a \le 4 - a$

$-4 \le 2a$

$-2 \le a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\frac{1}{4} + 1 - 2\cos Q = 1 + 2 - 4\cos Q}$

$(3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3y(y-2) = 4 - 2y + 6x - 3x^2$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23

0 1 1 2 3 4 4 5

$f(x/y) + f(y) = f(x)$

$f(x) - f(y) = f(x/y) < 0$

$f(x) < f(y)$

18^2

$\times 18$

144

18

324

$3(9y^2 + 1 - 6y)$

$27y^2 - 18y + 3$

$D = 400 - 27 \cdot 5 = 365$

-22

$-40y$

135

$3x(x-1) + 3y^2 - 3x - 4y = 4$

$3x(x-1) + y(3y-2) = 4 + 2y + 3x$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 + 4x^2 - 15xy = -2x - 3y + 2$

$3y - 2x = 3y - 2 + 2 - 2x$

$(3y-2) - 2(x-1)$

$(3y-2) = a$

$(x-1) = b$

$a - 2b = \sqrt{ab}$

$a^2 + 4b^2 - 5ab = 0$

$D = 25b^2 - 16b^2 = (3b)^2$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{5b+3b}{2} = 4b \\ a = \frac{5b-3b}{2} = b \end{array}\right.$

$D_1 = 4 + 12 = 4^2$

$y = \frac{2+4}{3} = 2$

$y = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3}$

$3 \cdot \frac{(3y+2)^2}{16} + 3y^2 - \frac{3(3y+2)}{2} - 4y = 4$

$3y - 2 = 4x - 4$

$x = \frac{3y+2}{4}$

$3(3y+2)^2 + 48y^2 - 24(3y+2) - 64y = 64$

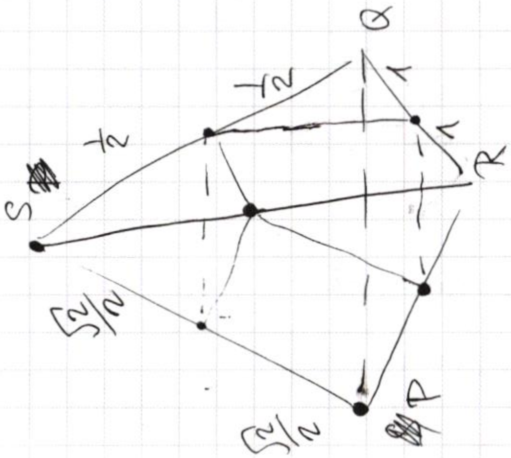
$3(9y^2 + 4 + 12y) + 48y^2 - 72y - 48 - 64y - 64 = 0$

$75y^2 \quad 12 - 48 - 64 \quad -112$

$\frac{3y+2}{4} - 4 \geq 0$

$3y - 2 \geq 0$

$y \geq \frac{2}{3}$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) ~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$~~

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\overset{a}{\alpha+\beta}) + \sin(\overset{b}{\alpha-\beta})$

$2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \sin a + \sin b$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta \cdot 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{-2} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

1) $4\sin 2\alpha = -1 + \cos 2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(\sin\alpha + 4\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sin\alpha = -4\cos\alpha\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = -4\end{array}\right.$

2) $4\sin 2\alpha = -1 - \cos 2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$

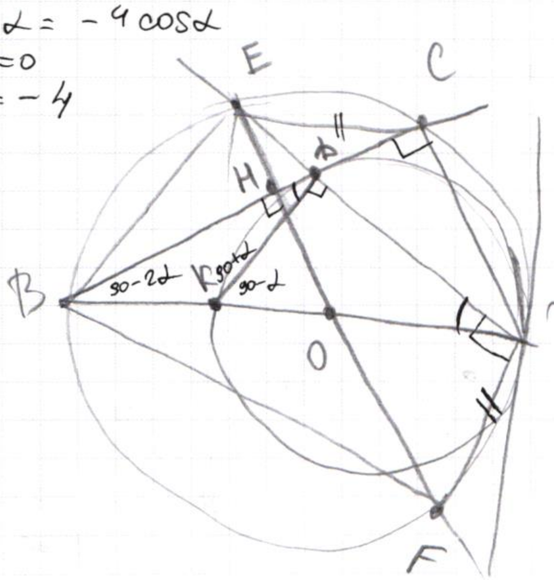
$8\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0\\ 4\sin\alpha = -\cos\alpha\end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$



$180 - 90 - 2\alpha$

$90 - 2\alpha$

3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ $\quad 3^{y}+$

ОДЗ:

$x^2+6x>0 \quad x(x+6)>0 \quad x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x-\ldots 0$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$D_1 = 9+4 = \sqrt{13}^2$

$4^{\log_4 1}$

$(x^2+6x)^1 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}$

$(x^2+6x) \geq 5^{\log_4(x^2+6x)} - 3^{\log_4(x^2+6x)}$

$\cancel{t \geq 5^t - 3^t}$

$(x^2+6x)\left(1 + (x^2+6x)^{\log_4 3 - 1} - (x^2+6x)^{\log_4 5 - 1}\right) \geq 0$

$1 + t^{\log_4 3 - 1} \geq t^{\log_4 5 - 1}$

$\cancel{1 \geq t^{\log_4}}$

$\cancel{t \geq t^{\log_4 5 - \log}}$

$t + t^{\log_4} \geq t^{\log_4\left(\frac{15}{3}\right)}$

$\cancel{t + t^{\log_4 15 - \log_4 5} \geq t^{\log_4 15 - \log_4 3}}$

$t\left(1 + t^{\log_4 3 - 1} - t^{\log_4 5 - 1}\right) \geq 0$

$\cancel{(1 + t^{\log_4 3 - 1}} < 0 \quad > 0$

$1 + t^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ $\quad t \geq 1:$

$\log_4 \frac{3}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{16}}$ $\quad t^{\log_4 3}\left(1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} - t^{\log_4 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$

$t^{\log_4 \frac{4}{3}} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$\log_4 \frac{5}{4}$

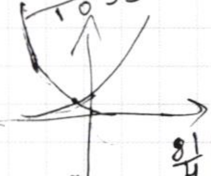
$D_1 = 9+16 = 5^2$

$\cancel{1 \geq t^{\log_4 \frac{4}{3}}}$ $\quad \cancel{1 \ (t \log}$

$\frac{-3+5}{1} = 2$

$\frac{-3-5}{1} = -4 = -8$

$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ +117 \\ \hline 1521 \\ -468 \\ \hline 1053 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 117 \\ \times 4 \\ \hline 468 \end{array}$



$\frac{81}{4}\left(1+\frac{9}{4}\right)$

$\frac{81}{4} \cdot \frac{13}{4}$

$\frac{9}{2}\sqrt{13}$

$\frac{ED}{DA} = \frac{4}{5}$

$EH = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{2}} = 3$

$OD = \frac{5}{2}, \quad BD = \frac{13}{2}$

$BC = 9$

$1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} \quad \frac{5}{4}$

$1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$90 + \frown = 180 - (90 - m) = 90 + m$

$90 - \beta = 180 - 2\beta$

$BE = \sqrt{9 + \frac{81}{4}}$

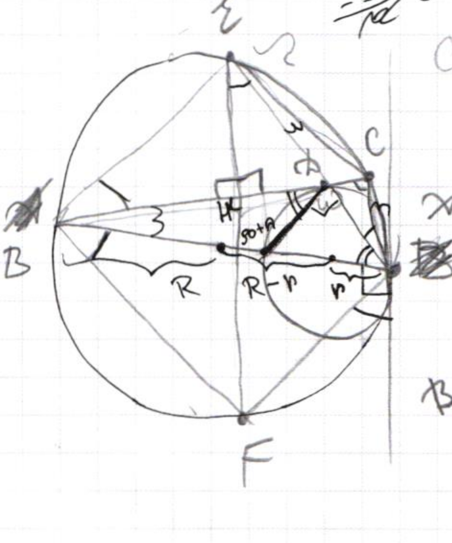
$\frac{36+81}{4} = \frac{\sqrt{117}}{2}$

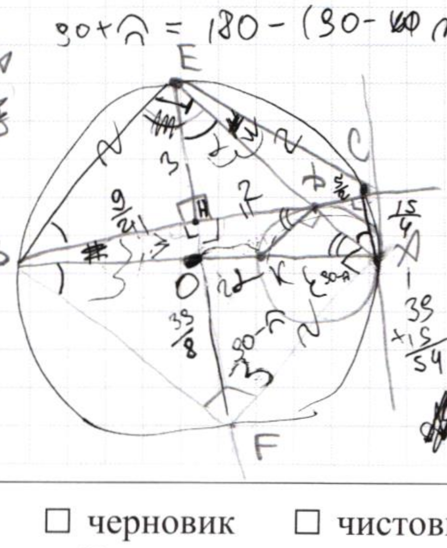
$\triangle BX+$

$360 - 90 - \frown - 90 - \frown =$

$180 - 2\cdot\frown =$

$\frac{81}{4} + 15$





$\frac{39}{8} + \frac{15}{8}$

$\frac{54}{8} = \frac{27}{4}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)