МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

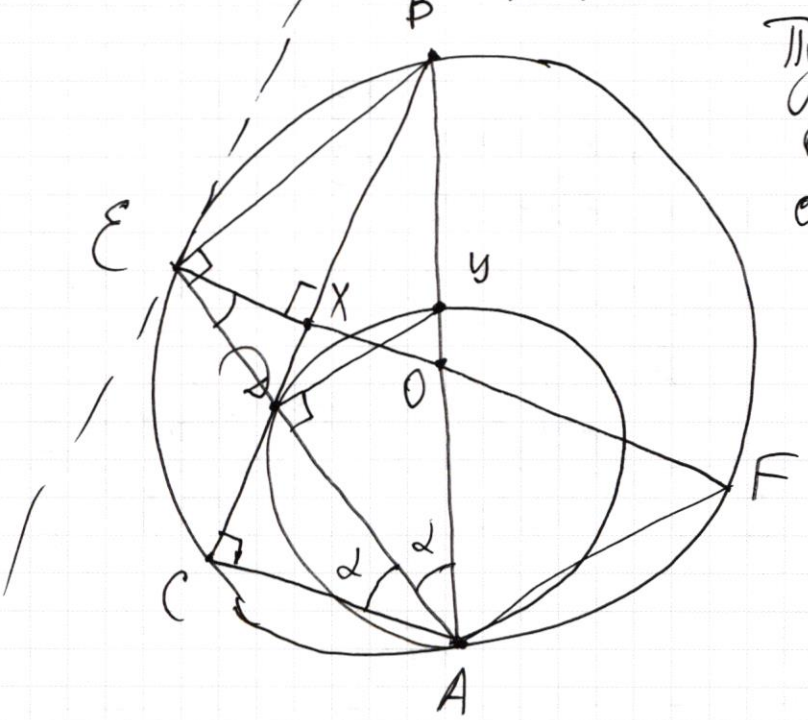
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Пусть R, r – радиусы окружностей Ω и ω соотв., $\alpha = \angle EAB$.

Т.к. ω и Ω касаются, то они гомотетичны при гомотетии, перевод. ω в Ω с центром в A: BC переходит в кас. к Ω, причем т.к. D перех. в E, то это будет кас. в точке E. Образ $BC \perp EF$ т.к. $EF \perp BC \Rightarrow EF$ – диаметр $\Omega \Rightarrow AB \cap EF = O$ – центр Ω., $\angle EAF = 90^\circ$

$AD = AY\cos\alpha = 2r\cos\alpha$

$AE = 2R\cos\alpha$ } т.к. AY и AB – диам. ω и Ω.

$-\deg_\Omega D =$

$= AD \cdot DE = 4r(R-r)\cos^2\alpha = BD \cdot DC = \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{2}$.

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. AB - диам. Ω $\Rightarrow$ $CA \parallel EF$

~~...~~ т.к. $\angle AEF$ прямоугл. и D - сер. AF, то

$\angle DEA = \angle EAD = \alpha = \angle CAE$.

$\angle CAE = \angle AEF$ т.к. $AC \parallel EF$

$\Downarrow$

$AC = 2R \cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{2R}$

$AC = AD \cdot \cos\alpha = AY \cos^2\alpha =$

$= 2r\cos^2\alpha = 2R \cos 2\alpha$

$\Downarrow$

$$\cancel{\frac{r}{R} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = 2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha = \left(\frac{CD}{AD}\right)^2 = \left(\frac{5/2}{2r\cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{25}{4r^2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{2r} =$

$= \frac{CB}{AB} = \frac{9}{2R} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{9}{5} \Rightarrow R = \frac{9}{5}r$

$\deg_\omega B = \left(\frac{13}{2}\right)^2 = (2R) \cdot (2R - 2r) = 4R(R - r) =$

$= 4 \cdot \frac{9}{5} r \cdot \frac{4}{5} r \Rightarrow \frac{13}{2} = \frac{3 \cdot 4}{5} r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{13 \cdot 5}{24} = \frac{65}{24}$, $R = \frac{9}{5} \cdot \frac{65}{24} =$

$= \frac{3 \cdot 13}{8} = \frac{39}{8}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 2R\cos\alpha \cdot 2R\sin\alpha =$$

$$= \cancel{2}R^2 \cdot \sin 2\alpha = R^2 \cdot \frac{9}{2R} = \frac{9}{2}R = \frac{39\cdot 9}{16}$$

№5.

$$f(1/x) = f(x \cdot 1/x) - f(x) = f(1) - f(x) = -f(x),$$

т.к. $f(1) = f(1\cdot 1) = f(1) + 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

$$f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

Вычислим f для всех чисел от 3 до 27

n	f(n)	n	f(n)	n	f(n)
1	0	13	3	25	2
2	0	14	1	26	3
3	0	15	1	27	0
4	0	16	0		
5	1	17	4		
6	0	18	0		
7	1	19	4		
8	0	20	1		
9	0	21	1		
10	1	22	2		
11	2	23	5		
12	0	24	0		

Нужно посчитать кол-во пар (x, y), ~~при которо~~ что $f(x) < f(y)$. Для каждого $f(y)$ вычислим кол-во таких пар:

$f(y)$	кол-во $3 \le x \le 27$, что $f(x) < f(y)$
5	24
4	22
3	20
2	17
1	11
всего:	93

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$\Updownarrow$ $t=x^2+6x$

$$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$\Updownarrow$

$$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

$\Updownarrow$ $y=\log_4 t$

$$3^y+4^y \geq 5^y$$

$\Updownarrow$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^y+1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^y$$

$\Updownarrow$

$$-\left(\frac{5}{4}\right)^y+\left(\frac{3}{4}\right)^y+1 \geq 0$$

$\Updownarrow$ $\left(\frac{3}{4}\right)^y-\left(\frac{5}{4}\right)^y$ монотонная

$$y \leq 2.$$

$\Updownarrow$

$$\log_4(x^2+6x) \leq 2.$$

$\Updownarrow$

$$0 < x^2+6x \leq 16$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x \in [-2;8] \end{cases}$$

Ответ: $(0;8]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}+\frac{4}{9}=\frac{12+4}{9}=\frac{16}{9} \\ 3y\geq 2x \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ 3y\geq 2x \end{cases}$$

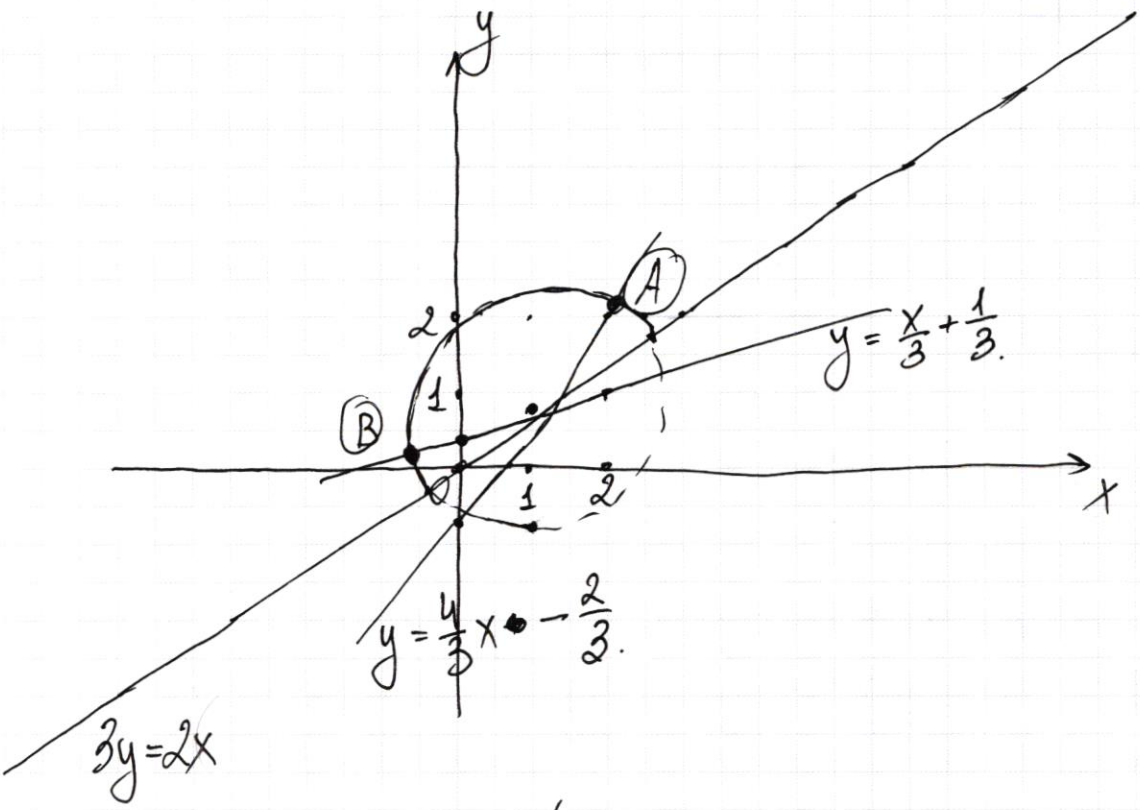
$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (3y-4x+2)(3y-x-1)=0 \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ 3y\geq 2x \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} \\ y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ 3y\geq 2x \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



Точки A и B – решения.

МФТИ

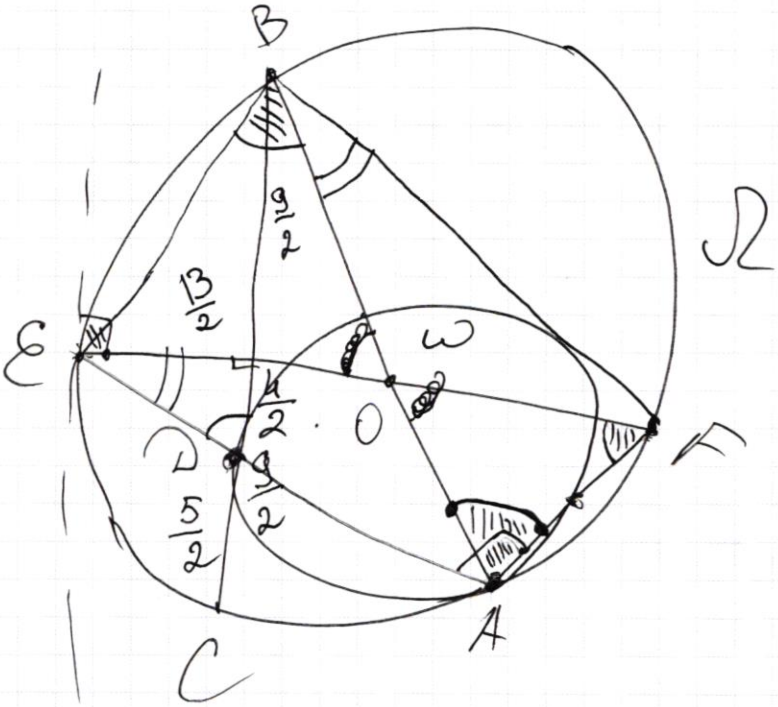
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



x	f(x)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = (2R-2r)\cdot 2R = 4R(R-2)$$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1.$

$f(6)=0$

$f\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) = f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x)-f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

x	f(n)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	2
22	2
23	5
24	0
25	2
26	3
27	0

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{9}=$

$=\frac{12+4}{9}=$

$=\left(\frac{4}{3}\right)^2$

5×1
4×2
3×2
2×4
1×6
0×10

25.

24.
22.
20
16
10

92

$\cancel{3x}$ $\cancel{3y}$ $-2x$

$15xy=5x\cdot 3y=5x\cdot -2x$

$(3y\cdot 4x+\cdot)(3y\cdot 1x+\cdot)$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)}=3y-2x$

$\cancel{3yx-3y-2x+2}$

$(3y-2)(x-1)=9y^2-12xy+4x^2$

$3y\geq 2x$

$3yx-2x-3y+2=9y^2-12xy+4x^2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$(\quad -y+2)(\quad y+x-1)$

$2x=-3y$

$4x^2+4x^2$

$10x^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$\frac{17\pm7}{8} = 3;\ \frac{5}{4}$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$D = 289 - 4\cdot4\cdot15 = 49$

$2\cdot(4x^2-17x+15)$

$8x^2-34x+30$

$3 = 4^{\log_4 3}$

$8-34+30 = -8-4=4.$

$4^{\log_4 t \cdot \log_4 3} = t^{\log_4 3}$

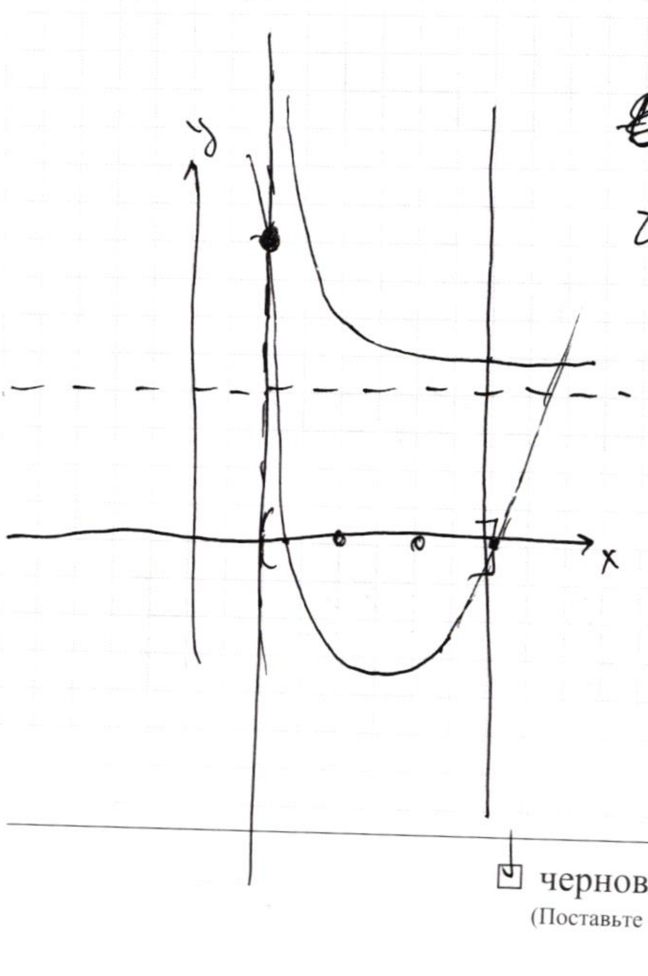
$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{+1}{2x-2}$

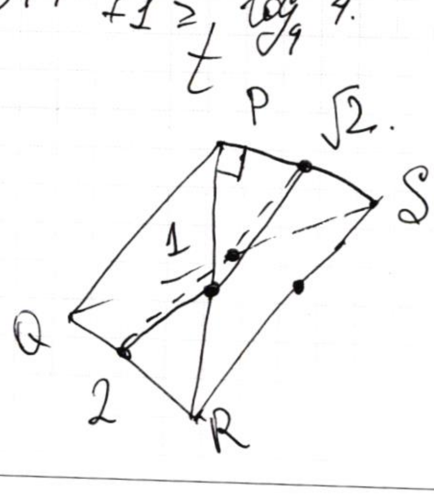
$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 3 - \log_4 4 = \log_4 \frac{3}{4}$ $\quad \underline{t>0}$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq t^{\log_4 5 - 1}.$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}.$





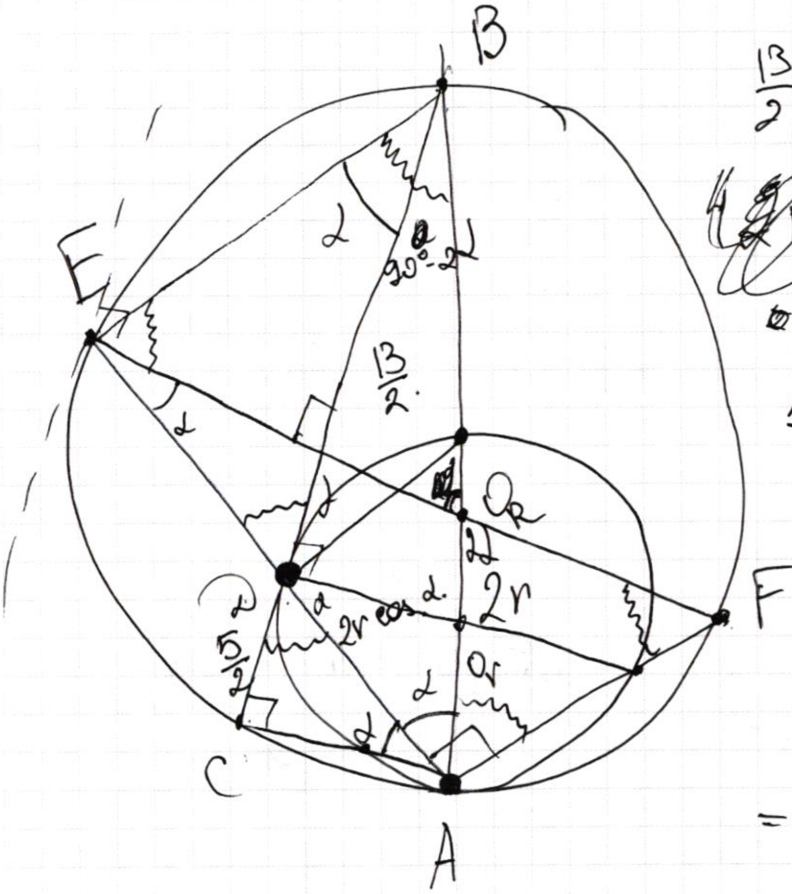
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$\underline{R,\ 2}$



$\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}=4r(R-2)\cos^2\alpha$

$1-\cos^2\alpha=$

$=\sin^2\alpha=$

$=\left(\frac{5/2}{2r\cos\alpha}\right)^2=$

$=\frac{25}{16r^2\cos^2\alpha}=>$

$=> 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$

$=\frac{25}{4r^2}=$

$=\sin^2 2\alpha =>$

$=> \sin 2\alpha=\frac{5}{2r}$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2=4(R-2)R=4R^2-4rR$

$\sin 2\alpha=\frac{5}{2r}=\frac{13/2}{2R}=\frac{9}{2R}$