# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos^2\alpha - 1 =$

$= 2(1-\sin^2\alpha) - 1 =$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad (2) \end{cases}$$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\cos^2 2\beta - \sin^2 2\alpha =$

$2\cos^2 2\beta = \cos 4\beta + 1$

(2) $\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta\underbrace{(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}}} = -\frac{4}{17}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}},$

1) $\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

~~$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$~~

$4\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha \cancel{-1} = \cancel{-1}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

2) $\sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta}$

$\sin 2\beta = -\sqrt{1-\frac{16}{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha - (1-2\sin^2\alpha) = -1$

$4\sin 2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

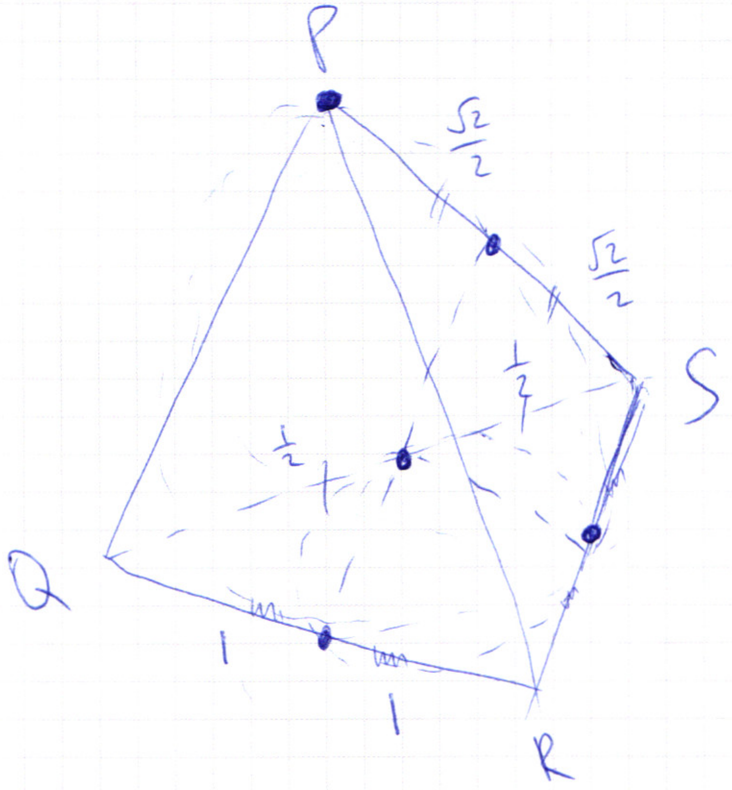
$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)


P
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
S
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
Q
1
1
R

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=0 \mid :\cos^2\alpha$

$4\,tg\alpha=-1$

$tg\alpha=-\frac{1}{4}$

$4\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha=0 \mid :\cos^2\alpha$

$4\,tg\alpha+tg^2\alpha=0$

$tg\alpha(4+tg\alpha)=0$

① $tg\alpha=0$ ② $tg\alpha=-4$

Ответ: $tg\alpha=-\frac{1}{4}$, $tg\alpha=0$ или $tg\alpha=-4$

2.

$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2)\end{cases}$ ~~$(3y-$~~

ОДЗ: $3y-2x\geq0$

$3y\geq2x$

(2) $3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{12}{9}=4+3+\frac{12}{9}$

$3(x^2-2x+1)+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})=4+3+\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=7+\frac{4}{3}=\frac{21+4}{3}=\frac{25}{3}$

$\boxed{(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}}$ – граф. окр. на плоск. $XY$ с центром $(1;\frac{2}{3})$ и радиусом $\frac{5}{3}$

(1) $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+9y^2-15xy+2x+3y-2=0$

$4x^2+x(2-15y)+(9y^2+3y-2)=0$

$x=\frac{15y-2\pm\sqrt{225y^2-60y+4-144y^2-48y+32}}{8}=$

$=\frac{15y-2\pm\sqrt{81y^2-108y+36}}{8}=$

$=\frac{15y-2\pm\sqrt{(9y-6)^2}}{8}$

$9\cdot16=144$

$15\cdot15=225$

$3\cdot16=48$

$225-144=81$

$6\cdot9=54\cdot2=108$

$-108$

$-2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

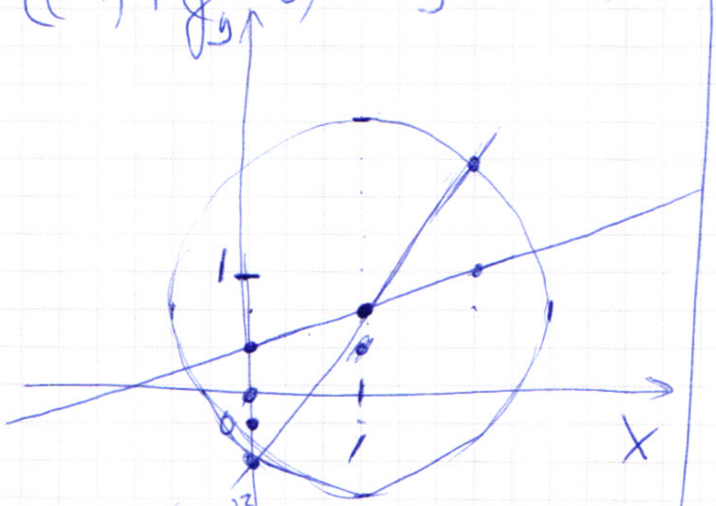
$x = \frac{15y - 2 \pm (9y-6)}{8}$

$x =$

① $x = \frac{15y-2+9y-6}{8} = \frac{24y-8}{8} = 3y-1$

$\begin{cases} x = 3y-1 \Rightarrow y = \frac{x+1}{3} \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$

$\frac{5}{3}$




$(3y-2)^2$

$(3y-1-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$9y^2 - 12y + 4 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$

$10y^2 - y\left(12 + \frac{4}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{4}{9} - 4 = \frac{21}{9} - 4 = \frac{7}{3} - 4 \,|\cdot 3$

$30y^2 - 36y - 4y = 7 - 12 = -5$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$

$6y^2 - 8y + 1 = 0$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 6\cdot 4}}{[illegible]} =$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{16-6}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$

③

Все зав от того, $9y-6 \geq 0$ или $9y-6<0$, перед знач под корнем стоит $\pm$, так что в об. случаях будет 2 варианта

$x = \frac{15y-2-9y+6}{8} = \frac{6y+4}{8} = \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}y = x - \frac{1}{2}$

$3y = 4x - 2$

$y = \frac{4x-2}{3}$

$(x-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$\left(\frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$\frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{4}y + \frac{1}{4} + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$

$\frac{25}{16}y^2 - y\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{4}{9} - \frac{1}{4}$

$\frac{25}{16}y^2 - \frac{25}{12}y = \frac{21}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{3} - \frac{1}{4} = \frac{28-3}{12} = \frac{25}{12}$

$\frac{25}{16}y^2 - \frac{25}{12}y - \frac{25}{12} = 0$

$\frac{1}{16}y^2 - \frac{1}{12}y - \frac{1}{12} = 0$

$y^2 - \frac{16}{12}y - \frac{16}{12} = 0$

$y^2 - \frac{4}{3}y - \frac{4}{3} = 0$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2+\frac{1}{2x-2}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{13}{13-2x} = \frac{2R-r}{R}$$

$$13R = (2R-r)(13-2x)$$

$$\begin{cases} 13R = 26R - 13r - 4xR + 2xr \\ R^2 - r^2 = \frac{25}{4} \\ (2R-r)^2 - r^2 = \frac{169}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 13 \\ 13 \\ \hline 39 \\ 13 \end{array}$$

$$\begin{cases} R^2 - r^2 = \frac{25}{4} \\ (2R-r)^2 - r^2 = \frac{169}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R-r)(R+r) = \frac{25}{4} \\ (2R-r-r)(2R-r+r) = \frac{169}{4} \end{cases}$$

$$(R-r)(R+r) = \frac{25}{4}$$

$$2(R-r)\cdot 2R = \frac{169}{4}$$

$$\frac{4R}{R+r} = \frac{169}{25}$$

$$\cancel{25R}\ 100R = 169R + 169r$$

5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

Пусть $t = \frac{1}{y}$

$f(xt) < 0$

$f(xt) = f(x) + f(t) < 0$

Разложим x на прост. множ.

$f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n)$

6.

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax + b \ge 8x^2 - 34x + 30$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ax + b \le \frac{4x-3}{2x-2} \\ ax + b \ge 8x^2 - 34x + 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b \le 4x - 3 \\ 8x^2 - x(34+a) - 30 - b \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2ax^2 + x(2b - 2a - 4) - 2b + 3 \le 0 \quad (1) \\ 8x^2 - x(34+a) - 30 - b \le 0 \end{cases}$

(1) $2ax^2 - x(2a + 4 - 2b) - 2b + 3 \le 0$

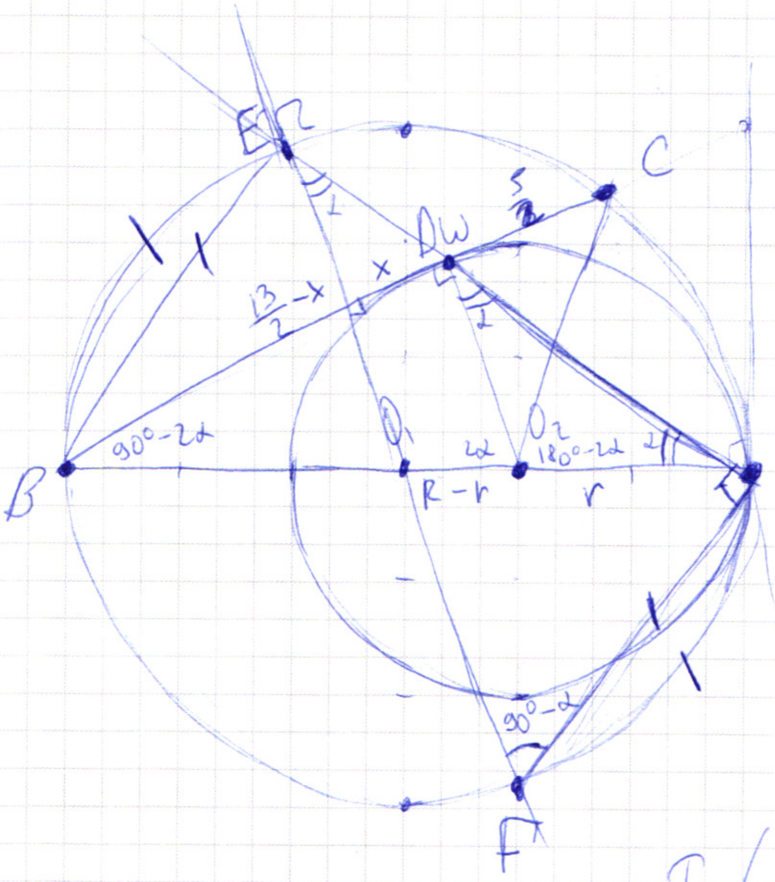
$x = \frac{a + 2 - b \pm \sqrt{(a+2-b)^2 + 4ab - 6a}}{2a} =$

$= a + 2 - b \pm \sqrt{a^2 + 4 + b^2 - 2ab + 4a - 4b + 4ab - 6a}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




r – радиус ω

R – радиус Ω

$O_2D$ – радиус ω,

$O_2D \perp CB$

$EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel DO_2$

Пусть $EF \cap AB = X$

~~$\triangle EXA \sim \triangle O_2DA$~~

$\triangle XEA \sim \triangle O_2DA$ ($D \in AE$,

$EX \parallel O_2D \Rightarrow$ по 2 соотв. углу при парал. прямых)

~~Рассм. $\triangle AO_2E$, $XE = O_2D$.~~

~~$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{O_2D}{O_1E}$~~

Рассм. $\triangle AO_2D$ и $\triangle AO_1E$,

Они под. с $k = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$X = O_1$, $O_1E = R$

$EF$ – диам. $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

Пусть $\angle O_2AD = \alpha$

$$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}-x} = \frac{2R-r}{R}$$

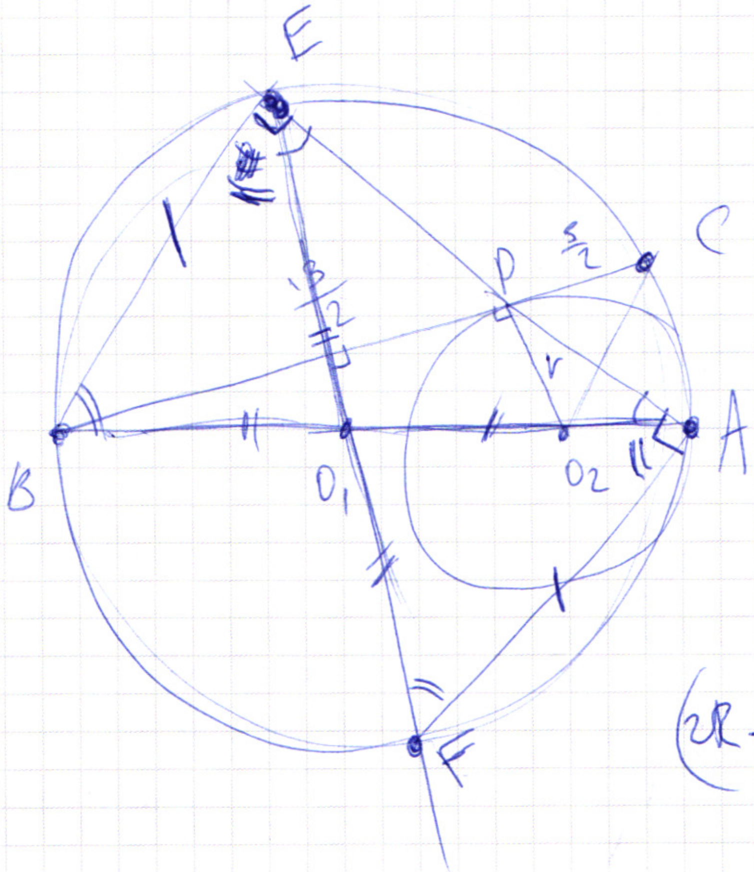
$R^2 - r^2 = \frac{25}{4}$

$24^2 + 25 \cdot 6 \ldots 40$

$3^2 \cdot 5 \cdot 8 \quad 65 \quad 5 \cdot 65^2 = 5 \cdot 5 \cdot 13$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)




$$(2R-r)^2 - r^2 = \frac{169}{2}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$x = 3y - 1 = \frac{4+\sqrt{10}}{2} - 1 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$3y \geq 2x$ – ?

$3y = \frac{4+\sqrt{10}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$2x = 2+\sqrt{10}$

$2x > 3y \Rightarrow$ пост. корень

2) $y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}$

$x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} - 1 = \frac{2-\sqrt{10}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$3y = \frac{4-\sqrt{10}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad 2x = 2-\sqrt{10}$

$3y > 2x$ – подх.

Ответ: $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$, $(2;2)$.

$y = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{3} = \frac{2\pm 4}{3}$

1) $y = \frac{2+4}{3} = 2$

$x = \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$,

$3y > 2x$

2) $y = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3}$

$x = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$3y = -2 < 2x = 0$ – пост.

$y = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} = \frac{2\pm 4}{3}$

$\frac{10}{36} + \frac{10}{4} = \frac{10+90}{36} = \frac{100}{36} = \frac{25}{9}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3. (5)

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

$$\log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2+6x \geq 0$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$$t = x^2+6x \geq 0$$

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5} \qquad 3^t$$

$$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$$

$$3^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$$

$$(\log_4 3 \log_4 t = \log_4 t \log_4 3)$$

$$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4}$$

$$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$$

$$\alpha = \log_4 t$$

$$3^\alpha + 4^\alpha \geq 5^\alpha$$

Для $\alpha < 0$ очев. вып.

~~Для $\alpha = 2$ вып.~~

~~[illegible]~~

~~Для [illegible] $\alpha \geq 2$ вып.~~

~~$3^2 \cdot 3^{\alpha>1} + 4^2 \cdot 4^{\alpha>1} \vee 5^2 \cdot 5^{\alpha>1}$~~

Для $\alpha \leq 2$: для 2 вып.

$$3^2 \cdot 3^{\alpha<1} + 4^2 \cdot 4^{\alpha<1} \vee 5^2 \cdot 5^{\alpha<1}$$

$$5^\alpha < 3^\alpha,\ 3^\alpha > 5^\alpha,\ 4^\alpha > 5^\alpha$$

$27 + 64 \quad 125$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha > 5^\alpha \cdot 3^2 + 5^\alpha \cdot 4^2 = 5^\alpha \cdot 25 = 5^\alpha \cdot 5^2$

Док., что при $\alpha > 2$ не вып.

$3^2 \cdot 3^\alpha + 4^2 \cdot 4^\alpha < 5^\alpha (9+16) = 5^\alpha \cdot 5^2$

$\alpha \le 2$

$\log_4 t \le 2 = \log_4 16$

$\log_4 t \nearrow$

$t \le 16$

$\begin{cases} x^2+6x \le 16 \\ x^2+6x \ge 0 \end{cases}$

$64 + 128 - 16$

$\begin{cases} x^2+6x-16 \le 0 \\ x^2+6x \ge 0 \end{cases}$

$x(x+6)$

$x = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5$

$\begin{cases} \begin{cases} x \ge -8 \\ x \le 2 \end{cases} \\ \left[ \begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -6 \end{array} \right. \end{cases}$

Ответ: $x \in [-8; -6] \cup [0; 2]$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

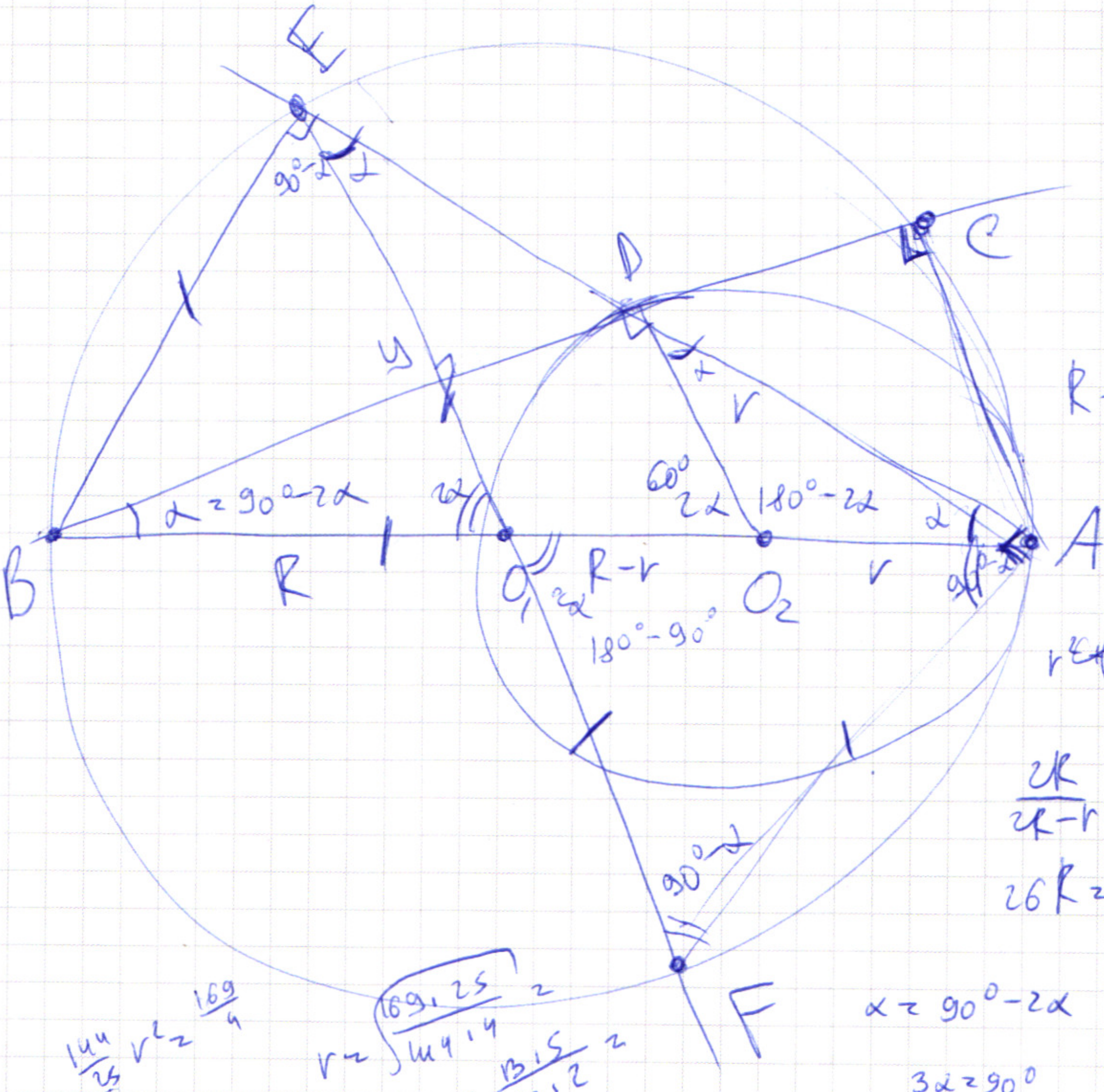
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$15 \times 15 = 225$




$R = \frac{9}{5} r$

$r^2 + (2R - r$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$

$18r = 10R$

$R = \frac{18}{10} r = \frac{9}{5} r$

$\frac{144}{25} r^2 = \frac{169}{4}$

$r = \sqrt{\frac{169 \cdot 25}{144 \cdot 4}} = \frac{13 \cdot 5}{12 \cdot 2} = \frac{65}{24}$

$(2R - r)^2 - r^2 = \frac{169}{4}$

$\left(\frac{18}{5} r - r\right)^2 - r^2 = \frac{169}{4}$

$\left(\frac{13}{5} r\right)^2 - r^2 = \frac{169}{4}$

$\frac{169}{25} r^2 - r^2 = \frac{169}{4}$

$\alpha = 90^\circ - 2\alpha$

$3\alpha = 90^\circ$

$\alpha = 30^\circ$

$\angle EFA = 90^\circ - \alpha = 60^\circ$

$\frac{r}{\frac{13}{2}} = tg\, 30^\circ \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{13}{2} = \frac{13\sqrt{3}}{6}$

$2R - r = 2r$

$2R = 3r \Rightarrow R = \frac{3r}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{12}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ACB = 90^\circ$, т. к. $AB$ – диаметр., $AC \parallel O_2D \parallel EF$ (т.к. $\perp BC$)

$\triangle ACB \sim \triangle O_2DB$ ($AC \parallel O_2D$, $\angle BO_2D = \angle BAC$, $\angle BDO_2 = \angle BCA$)

$\frac{AB}{O_2B} = \frac{BC}{DB}$; $BC = CD + BD = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2} = 9$.

$AB = 2R$, $O_2B = R + R - r = 2R - r$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{\cancel{9} \cdot 2}{13} = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$

$18r = 10R$

$R = \frac{18}{10} r = \frac{9}{5} r$

Рассм. $\triangle O_2DB$.

$O_2D^2 + BD^2 = BO_2^2$ (т. Пифагора)

$r^2 + \frac{169}{4} = (2R - r)^2 = (\frac{18}{5}r - r)^2 = (\frac{13}{5}r)^2 = \frac{169}{25} r^2$

$\frac{144}{25} r^2 = \frac{169}{4}$

$r = \sqrt{\frac{169 \cdot 25}{144 \cdot 4}} = \frac{13 \cdot 5}{12 \cdot 2} = \frac{65}{24}$.

$R = \frac{9}{5} r = \frac{9 \cdot 65}{5 \cdot 24} = \frac{39}{8}$,

Ответ 1: радиус $\Omega = \frac{39}{8}$, радиус $\omega = \frac{65}{24}$.

Из вышедок. подобия: $\frac{AC}{DO_2} = \frac{BC}{DB} = \frac{18}{13}$

$AC = DO_2 \cdot \frac{18}{13} = r \cdot \frac{18}{13} = \frac{65 \cdot 18}{24 \cdot 13} =$

$= \frac{15}{4}$,

$\triangle DCA$: $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{225+100}{16}} = \sqrt{\frac{325}{4}}$ (т. Пифагора)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Из ранее док. подобия

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$$

$$AE = \frac{9}{5} AD = \frac{9}{5} \cdot \frac{\sqrt{325}}{2} = \frac{9\sqrt{13}}{2}$$

$\triangle FEA$: $\angle EAF = 90^\circ$, т.к. $EF$ – диам.

$$\frac{AE}{\underbrace{EF}_{=2R}} = \sin \angle AFE = \frac{9\sqrt{325} \cdot \cancel{8}^{4^{2}}}{\cancel{10}_{5} \cdot 39 \cdot \cancel{2}} = \frac{18\sqrt{325}}{5 \cdot 39}$$

Ответ 2: $\angle AFE = \arcsin \frac{18\sqrt{325}}{39}$ ($\angle AFE < 90^\circ$, так что положит. без нужд. $2\pi k$) $= \frac{18 \cdot 5\sqrt{13}}{5 \cdot 39} = \frac{18\sqrt{13}}{39}$

$\cancel{S_{\triangle EFA} = \frac{FE \cdot AF}{2} \cdot \sin \angle AFE = \frac{2 \cdot 39}{8 \cdot 2}}$

$\triangle AEF$: $AF = \sqrt{EF^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{39^2}{8^2} \cdot 2^2 - \frac{9^2 \cdot 13}{2^2}} = \sqrt{\frac{39^2}{4^2} - \frac{9^2 \cdot 13}{2^2}}$

$$S_{\triangle AEF} = \cancel{AF}\ \frac{AF \cdot AE}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{2} \cdot \sqrt{\frac{39}{16} - \frac{81 \cdot 13}{4}} =$$

$$= \frac{9\sqrt{13}}{4}\sqrt{39 -}$$

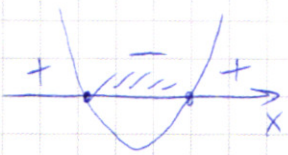
Я где-то ошибся в счете, подкорн. выраж. $< 0$, но сам ход решения – верный. Очень прошу это учесть.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I. $x^2+6x-16\le 0$

~~II.~~ $x^2+6x-16=0$

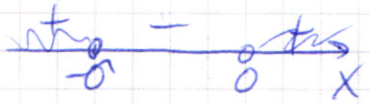
$x=-3\pm\sqrt{9+16}=-3\pm 5$



– вид граф. $\Rightarrow -8\le x\le 2$

~~x...~~

II. $x(x+6)>0$

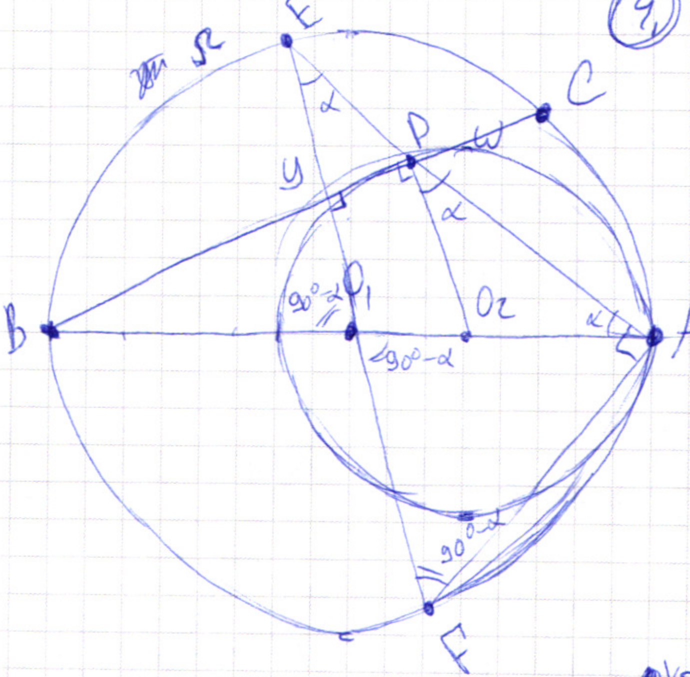


$$\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$$

Итоговая система:

$$\begin{cases} \begin{cases} x\le 2 \\ x\ge -8 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2].$$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$.



4

Пусть $R$ – рад. $\Omega$, $r$ – рад. $\omega$.
Пусть $O_1$ – центр $\Omega$, а $O_2$ – центр $\omega$.
Для начала докажем, что $O_1\in EF$.
Пусть $EF\cap AB=X$.
$EX\perp CB$, $O_2D\perp CB\Rightarrow EX\parallel O_2D$.
$\angle ADO_2=\angle AEX$, как (соотв. при секущ. $AD$, перес. $EX\parallel O_2D$).
$\triangle XEA\sim\triangle O_2DA$ (по 2 углам: $\angle DAO_2$ – общ., $\angle ADO_2=\angle AEO_1$), $k=\frac{AE}{AD_1}$ (коэф. под.)

Теперь рассм. $\triangle AEO_1$ и $\triangle ADO_2$.

$\triangle AEO_1$ – р/б, $O_1E = O_1A = R \Rightarrow \angle O_1EA = \angle EAO_1 =$

$\triangle O_2DA$ – р/б, $O_2D = O_2A = r \Rightarrow \angle O_2AD = \angle O_2DA$,

$\triangle AEO_1 \sim \triangle ADO_2$ (по 2 углам: $\angle O_2AD = \angle O_1AE$ (общ. угол), $\angle ADO_2 = \angle AEO_1 = \angle DAO_2$). Коэф. подобия: $\frac{AE}{AD}$

След., $AO_1 = \frac{AE}{AD} \cdot AO_2$, $AX = \frac{AE}{AD} \cdot AO_2$, $O_1$ и $X \in AB \Rightarrow O_1 = X$.

Что и треб. доказать.

Пусть $\angle EAO_1 = \angle O_2DA = \angle O_1EA = \alpha$,

Т. к. $EF$ – диам. $\Omega$, $\angle FAE = 90° \Rightarrow \angle EFA = 90° - \alpha$.

$\triangle O_1FA$ – р/б, $O_1F = O_1A = R \Rightarrow \angle O_1FA = \angle FO_1A = 90° - \alpha$,

$\angle EO_1B = \angle FO_1A = 90° - \alpha$ (верт. углы).

Пусть $EF \cap BC = Y$.

$\triangle BYO_1$: $\angle BYO_1 = 90°$ (по усл.) $\Rightarrow \angle YBO_1 = 90° - \angle YO_1B = 90° - 90° + \alpha = \alpha$,

$\triangle EO_1A$: $\angle EO_1A = 180° - \angle O_1EA - \angle O_1AE = 180° - 2\alpha$,

$\angle BO_1Y = 180° - \angle EO_1A = 180° - 180° + 2\alpha = 2\alpha$ (смежн. углы)

$\triangle BYO_1$: $\angle YBO_1 = 90° - \angle YO_1B = 90° - 2\alpha$,

$\angle YBO_1 = \alpha = 90° - 2\alpha$

$\alpha = 90° - 2\alpha \Rightarrow \alpha = 30°$,

$\angle EFA = 90° - \alpha = 90° - 30° = 60°$

Рассм. $\triangle BO_2D$,

$\frac{O_2D}{BD} = tg\,\alpha$

$r = O_2D = BD \cdot tg\,\alpha = \frac{13}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{13\sqrt{3}}{6}$

$\frac{O_2D}{BO_2} = \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow BO_2 = 2O_2D$

$BO_2 = R + R - r = 2R - r = 2R - \frac{13\sqrt{3}}{6}$

$2R - \frac{13\sqrt{3}}{6} = \frac{26\sqrt{3}}{6}$, $R = \frac{39\sqrt{3}}{12} = \frac{13\sqrt{3}}{4}$,

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I. $y = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$x = \frac{4+\sqrt{10}}{6}\cdot 3 - 1 =$

$= \frac{4+\sqrt{10}}{2} - 1 = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$3y = \frac{4+\sqrt{10}}{2} = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$2x = 2+\sqrt{10}$

$2x > 3y \Rightarrow$ не подх. по ОДЗ,

II. $y = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$,

$x = \frac{4-\sqrt{10}}{6}\cdot 3 - 1 = \frac{4-\sqrt{10}}{2} - 1 =$

$= \frac{2-\sqrt{10}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$3y = \frac{4-\sqrt{10}}{2} = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$2x = 2 - \sqrt{10}$

$3y > 2x$ — реш. подх. по ОДЗ,

I. $y = \frac{2+4}{3} = 2$,

$x = \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2} = 2$,

$3y = 6$, $2x = 4$

$3y > 2x$ — подх. по ОДЗ,

II. $y = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3}$

$x = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$2x = 0$, $3y = -2$

$3y < 2x$ — не подх. по ОДЗ,

Ответ: $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2;2)$.

3.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$\log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2+6x > 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$t = x^2+6x > 0$

$3^{\log_4 t} + \underset{= t^{\log_4 4}}{t} \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$, т. к. $\log_4 t \cdot \log_4 5 = \log_4 5 \cdot \log_4 t$

(прологарифм. выраж.)

(степень вынос. как множ. по св-ву логарифма)

Аналогично $t^{\log_4 4} = 4^{\log_4 t}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

Пусть $\log_4 t = \alpha$

$3^{\alpha} + 4^{\alpha} \geq 5^{\alpha}$.

Докажем, что при $\alpha \leq 2$ нерав. выполняется.

$\alpha = 2+d$, где $d \leq 0$,

$\cancel{3^{2+d} + 4^{2+d}} = 3^{2+d} + 4^{2+d} = 3^2 \cdot 3^d + 4^2 \cdot 4^d$

При $d \leq 0$:

$3^d \leq 5^d$, $4^d \leq 5^d$

$3^2 \cdot 3^d + 4^2 \cdot 4^d \geq 3^2 \cdot 5^d + 4^2 \cdot 5^d = 5^d(9+16) = 5^d \cdot 5^2 =$

$= 5^{d+2} = 5^{\alpha}$.

$3^{\alpha} + 4^{\alpha} \geq 5^{\alpha}$

Что и треб. доказать.

Теперь докажем, что при $\alpha > 2$ нерав. не выполн.

$\alpha = 2+d$, где $d > 0$,

$3^{2+d} + 4^{2+d} \vee 5^{2+d}$

При $d > 0$ $3^d < 5^d$, $4^d < 5^d$

$3^{2+d} + 4^{2+d} = 3^2 \cdot 3^d + 4^2 \cdot 4^d < 3^2 \cdot 5^d + 4^2 \cdot 5^d =$

$= 5^d(9+16) = 5^d \cdot 5^2 = 5^{d+2}$

$3^{\alpha} + 4^{\alpha} < 5^{\alpha}$,

Что и треб. доказать.

Таким образом, необх. и дост. условие: $\alpha \leq 2$.

$\alpha = \log_4 t$

$\log_4 t \leq 2 = \log_4 16$

$f(t) = \log_4 t$ – возр. функция $\Rightarrow t \leq 16$.

$t = x^2 + 6x$

$\begin{cases} x^2+6x \leq 16 \\ x^2+6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-16 \leq 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

Т.к. $tg\,\alpha$ определен, $\cos\alpha \neq 0$, на него можно делить.

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad (2) \end{cases}$$

$(2)$: $\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta(\cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{17}$ (из (1))

$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$

1) $\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad |: 2\cos^2\alpha$

$4\,tg\,\alpha + 1 = 0$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

2) $\sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = -\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha - (1-2\sin^2\alpha) = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0 \quad |: \cos^2\alpha$

$4\,tg\,\alpha + tg^2\alpha = 0$; $tg\,\alpha(4+tg\,\alpha) = 0$

$tg\,\alpha = -4$, $tg\,\alpha = 0$

Ответ: $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$, $tg\,\alpha = 0$ или $tg\,\alpha = -4$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

(2)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $3y-2x\geq 0$

$3y\geq 2x$

(2): $3x^2-6x+3y^2-4y=4$

$3(x^2-2x+1)+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})=4+3+\frac{12}{9}=4+3+\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9},$

(1) $\underbrace{3y-2x}_{\geq 0}=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2-x(\underbrace{12y+3y-2}_{=15y-2})+(9y^2+3y-2)=0$

$x=\frac{15y-2\pm\sqrt{(15y-2)^2-16(9y^2+3y-2)}}{8}=$

$=\frac{15y-2\pm\sqrt{225y^2-60y+4-144y^2-48y+32}}{8}=$

$=\frac{15y-2\pm\sqrt{81y^2-108y+36}}{8}=\frac{15y-2\pm\sqrt{(9y-6)^2}}{8}$

Вне зав. от знака $(9y-6)$ будет 2 случая:

① $x=\frac{15y-2+9y-6}{8}=$

$=\frac{24y-8}{8}=3y-1$

Подставим во (2):

$(\underbrace{3y-1-1}_{=(3y-2)^2})^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$9y^2-12y+4+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=\frac{25}{9}$

$10y^2-y(12+\frac{4}{3})-\frac{21}{9}+4=0 \mid\cdot 3$

$30y^2-40y-7+12=0$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0,$

$y=\frac{4\pm\sqrt{16-6}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6}$

$x=\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8}=$

$=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$

Подставим во (2):

$(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$(\frac{3}{4}y-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$\frac{9}{16}y^2-\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=\frac{25}{9}$

$\frac{25}{16}y^2-\frac{25}{12}y-\frac{25}{12}=0 \mid\cdot\frac{16}{25}$

$y^2-\frac{4}{3}y-\frac{4}{3}=0 \mid\cdot 3$

$3y^2-4y-4=0$

$y=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\frac{2\pm 4}{3}$