

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

Омб: $0; -2; -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$1) \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = -\cos^2 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha (2 \sin \alpha + \cos \alpha) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ 2 \operatorname{tg} \alpha + 1 = 0, \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2) \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$$

$$4 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin^2 2\alpha = 0$$

$$2 \sin \alpha \cdot (2 \cos \alpha + \sin \alpha) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ \operatorname{tg} \alpha = -2 \end{cases}$$

N2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Омб: $(6; 2) (2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}})$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Положим: $a = x-2, b = y-1$

$$ab = xy - 2y - x + 2$$

$$a-2b = x-2y$$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab \\ a^2+9b^2=25 \\ a \geq 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a \geq 2b \end{cases}$$

1) $a=4b$

$$25b^2=25$$

$$\begin{cases} b = +1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 \\ a = -4 \end{cases}$$

2) $a=b$

$$10b^2=25$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{5}{2}} = a$$

$$a \neq b = a = -\sqrt{\frac{5}{2}}$$

т.к. $a \geq 2b$, то получим $(4; 1)$

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

т.к. $a \geq 2b$, получим $(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -\sqrt{\frac{5}{2}})$

$$\begin{cases} x-2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \begin{cases} x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

Положим $t = x^2 + 18x$, $t > 0$, ~~$t \geq 0$~~

$$5^{\log_{12}t} + t \geq (t)^{\log_{12}13}$$

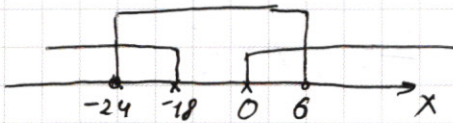
Положим $a = \log_{12}t$, $t = 12^a$

$$5^a + 12^a \geq 13^a \Rightarrow a \leq 2 \Rightarrow \log_{12}t \leq 2$$

$$\begin{cases} t \leq 144 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 144 \leq 0 \\ x^2 + 18x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)(x+24) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$

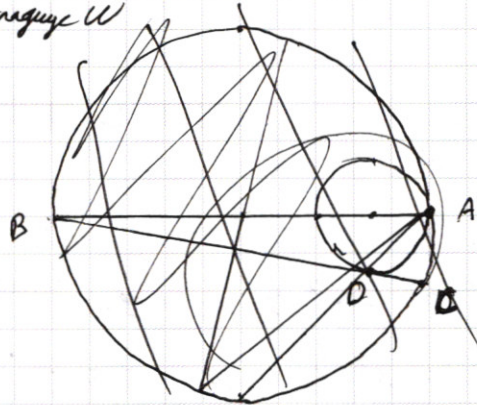


Отв: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

№4.

1) Пусть O — центр Σ , радиус $= R$ Пусть O_1 — радиус W

O_1 — центр W , радиус r
 $F \in BC = K$



2) Пусть $\angle BAE = \alpha, \Rightarrow \angle O_1DA = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1DB = \angle O_1DC = \angle BO_1D = 2\alpha$

3) BD — касательная $\perp W \Rightarrow O_1D \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDO_1 = 90^\circ$ и $\angle EKD = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1OK = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle FOA = 2\alpha$

4) $\angle BCA = 90^\circ$, фр. п. строится на диаметре AB

Стр. $\triangle BO_1D \angle O_1BD = 90^\circ - 2\alpha$

6) $\angle BEA = 90^\circ$, строится на $AB \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AEB \angle ABE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KBE = \alpha \Rightarrow \angle KDE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle KED = \alpha$

7) $\angle FEA = \alpha, \angle FOA = 2\alpha \Rightarrow O$ — центр W

8) $BD^2 = AB \cdot BG = 2R \cdot (2R - 2r) = 17^2$

9) $\angle ACB = \angle O_1DB = 90^\circ, \angle ABC = \angle ABC \Rightarrow \triangle BO_1D \sim \triangle BAC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2R - r}{17} = \frac{2R}{25} \Rightarrow 16R = 25r, R = \frac{25}{16}r$$

$$10) 289 = 4 \cdot \frac{25^2}{16^2} r^2 - \frac{25}{4} r^2, r = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}, R = \frac{85}{6}$$

11) $\angle EFA = 90^\circ - \alpha$

$$12) \text{ в } \triangle BDO_1; \sin 2\alpha = \frac{BD}{BO_1} = \frac{17}{\frac{25}{15}} = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{17} = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = \frac{17-8}{17} = \frac{9}{17}, \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle EFA = 90^\circ - \arcsin \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$13) S_{EFA} = \frac{1}{2} FA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \sin \alpha \cdot 2R \cdot \cos \alpha = R^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \cdot \frac{85^2}{6^2} = \frac{2125}{12}$$

$$\text{Омб: } R = \frac{85}{6} \quad r = \frac{136}{15} \quad \angle EFA = 90^\circ - \arcsin \frac{3}{\sqrt{34}}; \quad S = \frac{2125}{12}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$1) \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} -$$

гипербола с

асимптотами

$$y=3 \text{ и } x=-\frac{3}{4}$$

$$\text{при } x=-\frac{11}{4}, y=\frac{22}{8} \text{ (D)}$$

$$e) -8x^2 - 30x - 17$$

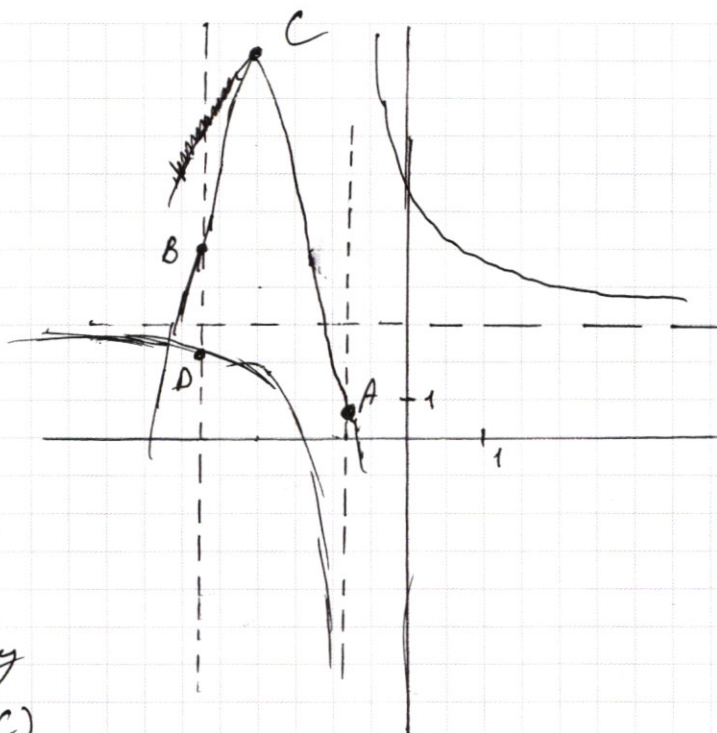
парабола ветвями вниз

с вершиной $(-\frac{15}{8}, \frac{89}{8})$ (C)

~~$$\text{при } x=-\frac{11}{4}, y=5$$~~

$$\text{при } x=-\frac{7}{4}, y=1 \text{ (A)}$$

$$\text{при } x=-\frac{11}{4}, y=5 \text{ (B)}$$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17.$$

$$-8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17.$$

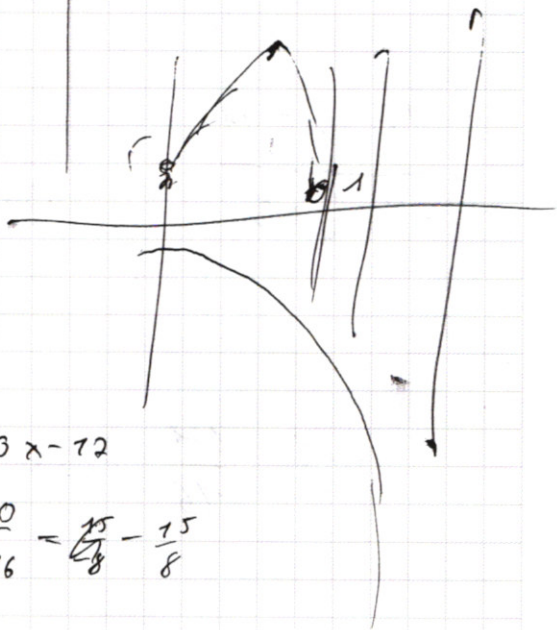
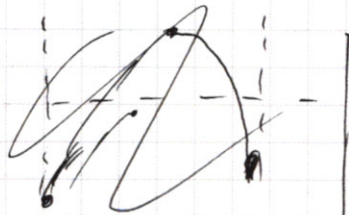
$$\frac{36}{2} - 17 = 1$$

$$f\left(\frac{13}{6}\right) = f\left(13 \cdot \frac{1}{6}\right) = f\left(13\right) + f\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$$

$$f\left(-\frac{15}{8}\right) = \frac{29}{8}$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$$



$$-8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17.$$

$$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17.$$

$$\frac{36}{2} - 17 = 1$$

$$-8x^2 - 30x - 17$$

$$x_1 = \frac{30}{-16} = \frac{15}{8} - \frac{15}{8}$$

$$-\frac{11}{8} \quad -\frac{15}{8} \quad -\frac{6}{2}$$

$$-8 \cdot \frac{225}{64} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17.$$

$$17x = 136$$

$$-8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17.$$

$$-\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17.$$

$$-\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17.$$

$$\frac{225 - 136}{8}$$

$$\frac{89}{8} \quad \frac{-121 + 165 - 34}{2} = \frac{-155 + 165}{2} = 5$$

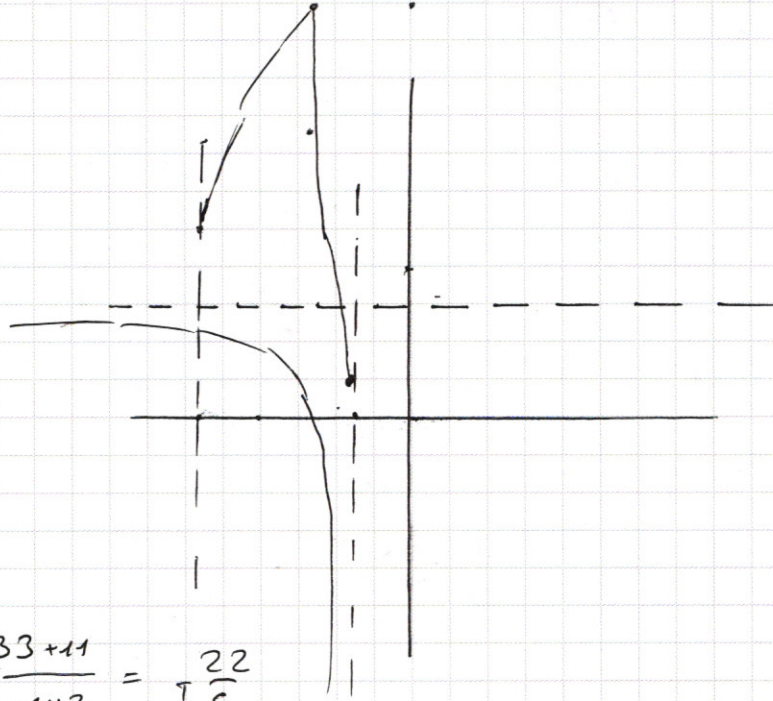
$$\frac{225}{8} - 17.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x + 11}{-4}$$

$$= \frac{-12 \cdot \frac{11}{4} + 11}{-4 \cdot \frac{11}{4} + 3}$$

$$\frac{-33 + 11}{-11 + 3} = \frac{22}{-8}$$



$$-8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 12$$

$$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 12$$

$$\frac{44}{2}$$

$$\frac{44}{2} - 12 = 22 - 12 = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{25}{4} - \frac{25 \cdot 16}{4} = \frac{15}{8}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

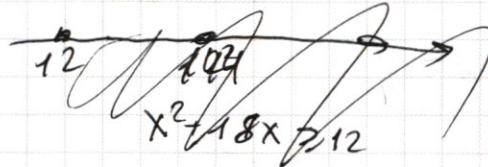
$$2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -1 = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$$

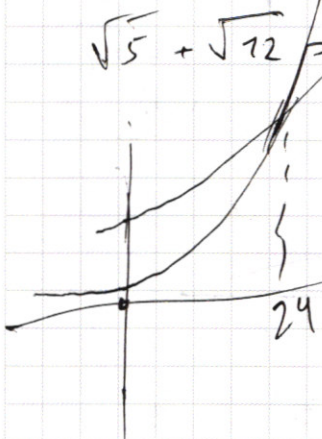
$$4 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = -2 \cos 2\alpha$$

$$5 \log_{12} t + t \geq t \log_{12} 13$$

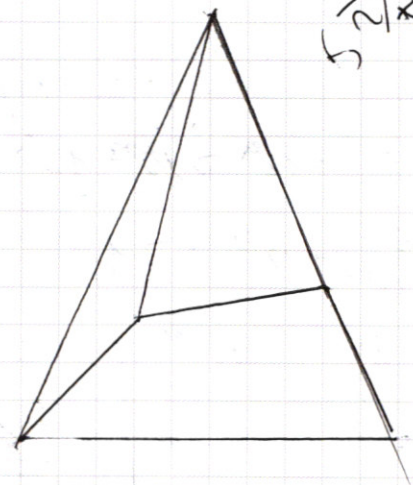
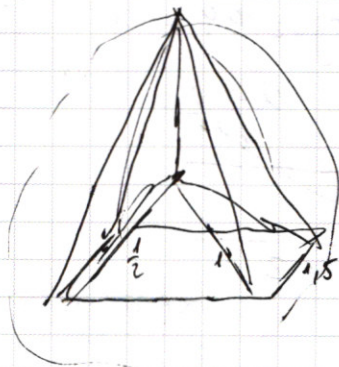
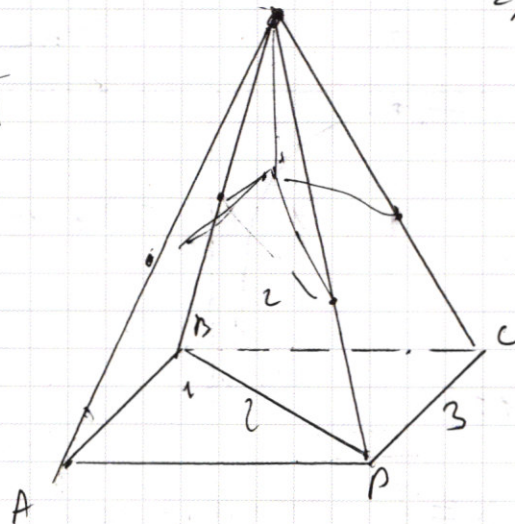
$$\sqrt{5} + \sqrt{12} \geq \frac{13}{2} = 6,5$$



$$17 \cdot \frac{15}{15} = \frac{15}{6}$$



$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 213 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3,3 \\ \times 3,3 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array} \quad \frac{55}{6} = \frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 3}$$

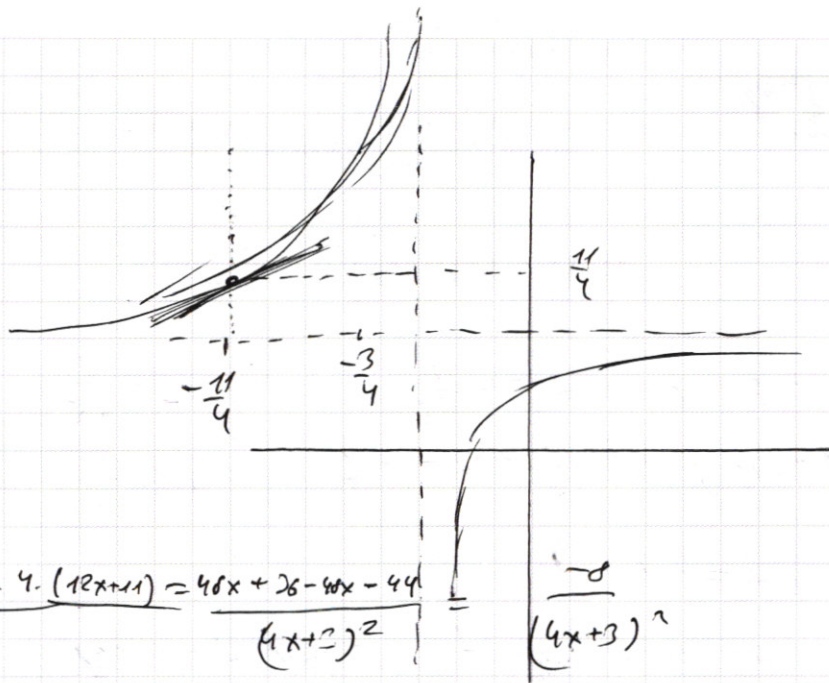


$$\cos \alpha (2 \sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\text{или } 2 + \lg 2$$

$$2 + \lg 2 = 0$$

$$3 + \frac{2}{4x+3}$$



$$f' = \frac{12 \cdot (4x+3) - 4 \cdot (12x+11)}{(4x+3)^2} = \frac{48x+36-48x-44}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2}$$

$$y = \frac{12 \cdot (-\frac{11}{4}) + 11}{4 \cdot (-\frac{11}{4}) + 3} = \frac{-22}{-11} = \frac{11}{4}$$

$$x^2 + 18x - 244$$

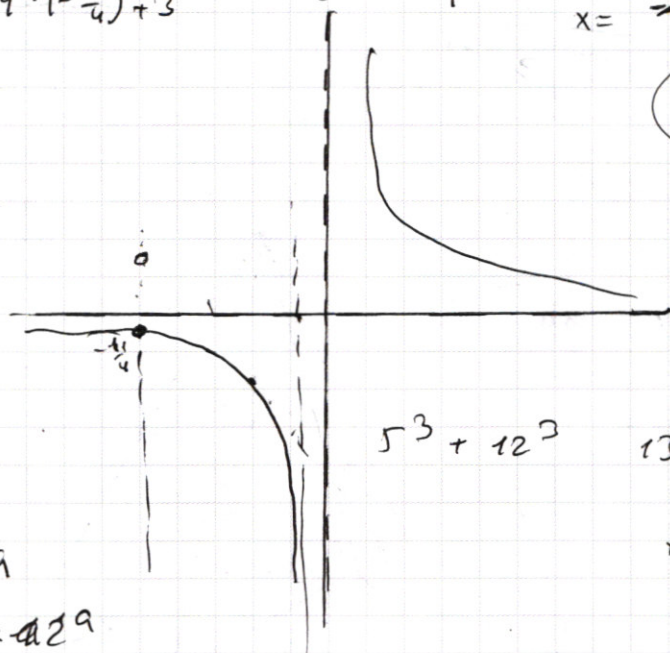
$$\frac{D}{4} = 81 + 244 = 325$$

$$x = -9 \pm \sqrt{325}$$

$$a(-\frac{11}{4}) + b \geq \frac{11}{4}$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{12} \quad \sqrt{13}$$

$$ax + b$$



$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$\log_{12} t = a$$

$$5^a + 12^a \geq 13^a \quad t = 12^a$$

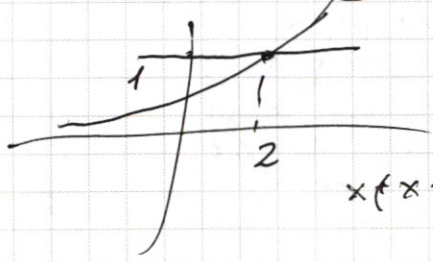
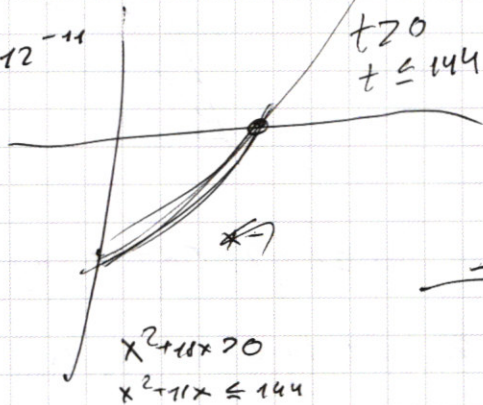
$$\frac{5^a}{12^{13}} + 12^{a-13} \geq 1$$

$$a \leq 2 \quad 25 + 144 = 169$$

$$t \geq 20 \quad t \leq 144$$

$$\log_{12} 144 = a$$

$$a = 2$$



$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 2192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ +169 \\ \hline 2192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times 12 \\ \hline 288 \\ +144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3}$$

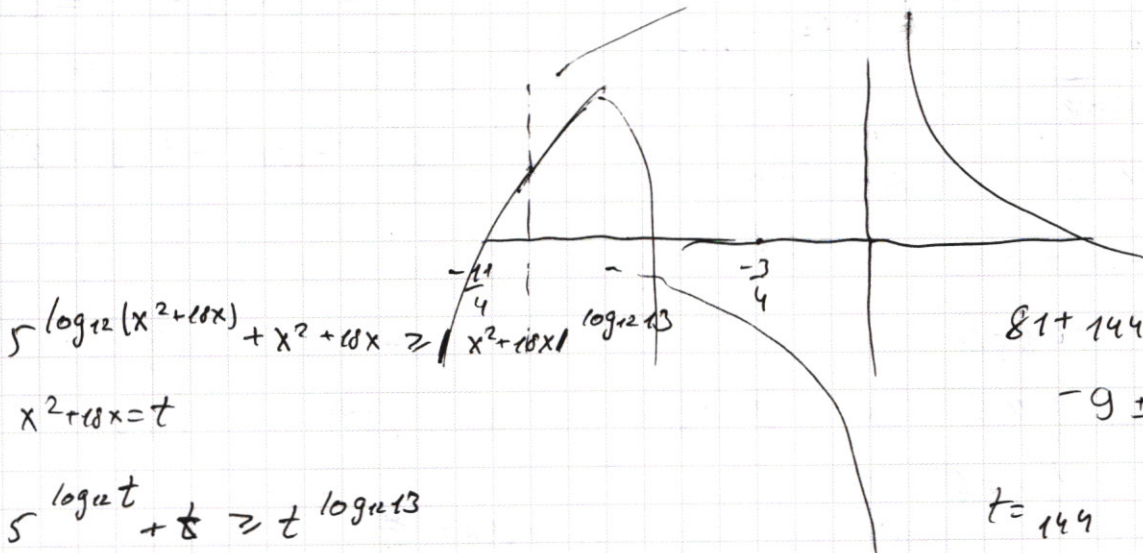
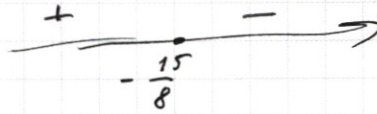
$$\frac{12x+11}{12x+9} \Big| \frac{4x+3}{3}$$

$$-8x^2 - 30x - 17 = -(8x^2 + 30x + 17)$$

$$\frac{D}{4} = 225 - 136 = 89$$

$$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq$$

$$f' = -16x - 30 \quad \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$$



$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13}$$

$$81 + 144 = 225$$

$$x^2+18x=t$$

$$-9 \pm 15$$

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$t = 144 \quad \underline{6}; -24$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13}$$

$$25 + 144 =$$

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13} \Rightarrow t \in (12; \infty)$$

$$t = 12^3$$

$$5^{\log_{12} t} + t \geq 2 \sqrt{5^{\log_{12} t} \cdot t}$$

$$t = 5^{\log_{12} t}$$

$$125 + 12^3 \geq 13^3$$

$$4 \cdot 5^{\log_{12} t} = t \vee t^{\log_{12} 13}$$

$$12^4$$

$$4 \cdot 5^{\log_{12} t} \vee t^{\log_{12} 13} - \log_{12} 12$$

$$5^4 + 12^4 \vee 13^4$$

$$4 \cdot 5^{\log_{12} t} \vee t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$$

$$5^4 \vee (13^2 - 12^2)(13^2 + 12^2)$$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1628 \\ 125 \\ \hline 1743 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$$287$$

$$125 \cdot 13^2 + 12^2$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$$

$$x-2=a$$

$$y-1=b$$

$$a^2+9b^2=25$$

$$a \cdot b = xy - x - 2y + 2$$

$$2a = 2x-4 \quad b = y-1 \quad 2a+2b = 2x+y-3$$

$$x-2=a \quad x-2y=a-2b$$

$$2y-2=2b$$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a-2b=\sqrt{ab+2} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2+4b^2-4ab=ab+2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2+4b^2-5ab=2 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{25-9b^2}$$

$$x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$$

~~a^2~~

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a-2b=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$a^2+9b^2=25 \quad a-2b > 0$$

$$a^2+4b^2-4ab=ab \quad a > 2b$$

$$a^2+4b^2-5ab=0$$

$$a=b$$

$$a=4b$$

$$\begin{cases} 10b^2=25, & b^2=\frac{5}{2} \\ 25b^2=25. \end{cases}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$b = \pm 1$$

$$xy - x - 2y + 2$$

$$y(x-2) + (x-2)$$

$$(x-2)(y-1)$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 89 \\ 46 \\ \hline 549 \end{array}$$

$$1) \cos 4\beta = \frac{4}{5}$$

$$\cos 4\beta = -\frac{4}{5}$$

$$2 = \sqrt{12-6-4+2}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha = -1 = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$$

$$\sqrt{5} \sin(2\alpha + \arctan 2) = -1$$

$$\cos 2\beta = 1 \quad \sqrt{5} + \sqrt{11} \quad \sqrt{13} \quad x-2-2y+2 = x-2y$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$$

$$(x^2-4x+4) + (y^2-4y+4) - 13 = 12$$

$$\sin 2\alpha = \frac{BD}{2R-r}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{17}{\frac{289}{25}} = \frac{15}{77}$$

$$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25, \quad (x-2)^2 + \sqrt{3}(y-1)^2 = 25; \quad \cos 2\alpha = \frac{8}{77}$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{8}{77}$$

$$x^2+4y^2-4xy = xy-x-2y+2$$

$$x^2+4y^2-5xy = 2-x-2y$$

$$\frac{4 \cdot 25 - 136}{25} = \frac{289}{15}$$

$$(x-y)(x-4y) = 2-x-2y$$

$$\frac{85^5}{3} - \frac{136}{75}$$

$$x^2+4y^2-5xy$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$D = x^2 - 5xy + 4y^2$$

$$\frac{8}{77} = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$D = 25y^2 - 16y^2 = 9y^2$$

$$289 = \frac{825}{64}r^2 - \frac{400}{64}r^2$$

$$\frac{25}{x \cdot 25}$$

$$x = \frac{5y \pm 3y}{2} \quad \begin{matrix} 4y \\ y \end{matrix}$$

$$289 = \frac{225}{64}r^2$$

$$\frac{25}{39} = \cos^2\alpha \quad \frac{16}{y} \cdot \frac{25}{64} \quad 25 \cdot 76$$

$$r = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$$

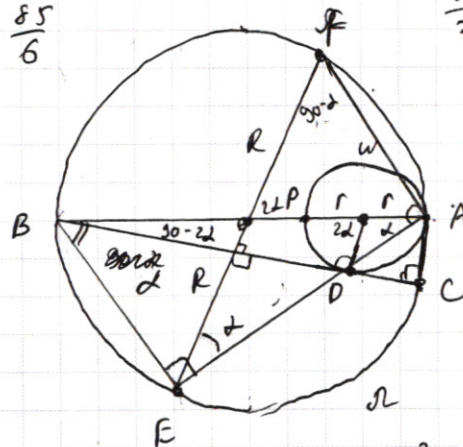
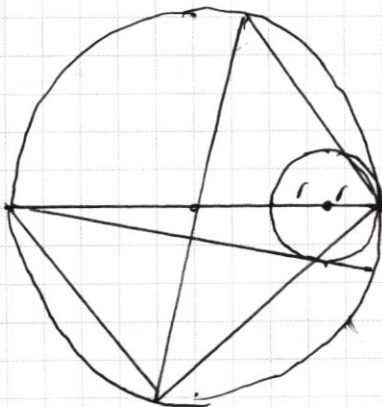
$$\cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$R = \frac{25}{16} \cdot \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{5 \cdot 17}{3 \cdot 2} = \frac{85}{6}$$

$$\frac{15}{25} \cdot \frac{25}{75} \cdot \frac{25}{25} = \frac{15}{225}$$

$$CD = 8$$

$$BD = 17$$



$$\sin(90-\alpha) = \frac{AE}{AB}$$

$$AD^2 = 21^2 + 2 \cos \alpha \cdot r^2$$

$$BD^2 = BP \cdot BA = (2R-2r) \cdot 2R$$

$$100 - 32 + d = 90$$

$$90 - 2d = d = 45$$

$$90 - d = (90 - 2d) = 2$$

$$R = \frac{25}{16}$$

$$EO \cdot AE^2 = 2R^2 + 2 \cos \alpha R^2$$

$$\frac{2R-r}{17} = \frac{2R}{25}$$

$$289 = 4R^2 - 4Rr$$

$$289 = 4 \cdot \frac{25^2}{16} r^2 - \frac{25}{4} r^2$$

$$50R - 25r = 34R$$

$$16R = 25r$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\dots \sin \alpha = \frac{tL}{p}$$

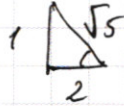
$$\frac{tL}{p} = \cos 2\alpha$$

$$\frac{tL}{p} = \sin 2\alpha$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\begin{array}{r} 15 \\ 65 - 176 \\ \hline 3 \\ 425 - 176 \\ \hline 249 \\ \hline 71 \\ \hline 52 \end{array}$$

1) $\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cos 2\alpha$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2\alpha + 2\beta = x \quad 2\alpha = x - 2\beta$$

$$2\alpha + 4\beta = 2x$$

$$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

1) $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin 2x = +\frac{4}{5} \quad \cos 2x = +\frac{3}{5}$$

$$\sin 2x + \sin(2x - y) = -\frac{4}{5}$$

$$\sin y + \sin 2x \cdot \cos y - \sin y \cos 2x = -\frac{4}{5}$$

$$\sin y + \frac{4}{5} \cos y - \frac{3}{5} \sin y = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{2}{5} \sin y - \frac{4}{5} \cos y = -\frac{4}{5}$$

$$\sin y - 2 \cos y = -2$$

$$\sqrt{5} \sin(y - \arctan 2) = -2$$

$$\frac{5}{15} \cdot \frac{5}{25 \cdot 0.5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8 \cdot 5} = \frac{1}{80}$$

$$\frac{25 \cdot 85}{72}$$

$$\begin{array}{r} 8500 \cdot 4 \\ 85 \\ \hline 12175 \\ \hline 4 \\ \hline 10 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$2125$$