МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 - 12x + 36y^2 - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y + x + 6} \\ x(x-12) + 36y(y-1) = 45 \end{cases}$$

$$x - 12y = \sqrt{-2y(x+6) - (x+6)}$$

$$x - 12y = \sqrt{(x+6)(-2y-1)}$$

~~$x = \sqrt{-2y}$ (? ?)~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} u = x-6 \\ v = 2y-1 \end{cases}$: $\begin{cases} x = u+6 \\ y = \frac{v+1}{2} \end{cases}$ т.е $\begin{cases} x = 9+6 = 15 \\ y = \frac{1+1}{2} = 1 \end{cases}$ или

$x = -12 \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} + 6$

$y = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}$

Ответ: $(15; 1)$; или $\left(-12\sqrt{\frac{2}{3}} + 6; -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{2}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. ОДЗ: $10x - x^2 > 0$, с учетом ОДЗ $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Замена $t = 10x - x^2$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$, $t > 0$

По свойству логарифма $5^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$

Подставляем в первое $t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$,

$t(1 + t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1}) \geq 0$

По ОДЗ $t > 0$ поэтому можно сократить на t

$1 + t^{\log_3(\frac{4}{3})} - t^{\log_3(\frac{5}{3})} \geq 0$

$1 + (\frac{4}{3})^{\log_3 t} - (\frac{5}{3})^{\log_3 t} \geq 0$

Если $t \in (0; 1)$ то, $\log_3 t < 0$, поэтому $(\frac{5}{3})^{\log_3 t} < 1$

$1 + (\frac{4}{3})^{\log_3 t} > 1$ т.е $t \in (0; 1)$ входит в ответ

Если $t = 1$, то $1 + (\frac{4}{3})^0 - (\frac{5}{3})^0 = 1 \geq 0$ т.е $t = 1$ тоже входит в ответ

Если $t > 1$, то $\log_3 t > 0$, поэтому $f(t) = 1 + (\frac{4}{3})^{\log_3 t} - (\frac{5}{3})^{\log_3 t} = 0$ строго убывает по t

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

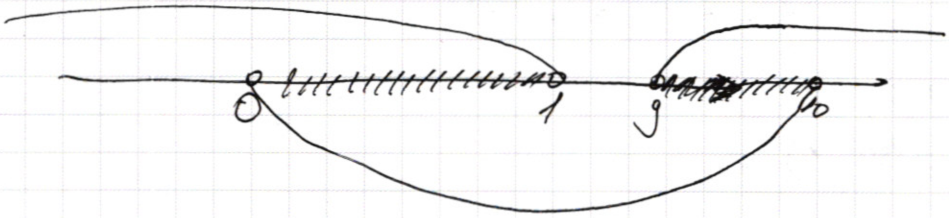
Имеет не более одного решения. Заметим, что $t=9$ подходит, поэтому т.к $f(t)$ строго убывает при $t>1$, то $f(t)\geq 0$ $t\in[1;9]$, $f(t)<0$, при $t>9$, то есть в Ответ входят только $t\in[1;9]$ и

$t=10x-x^2$;

$$\begin{cases} 10x-x^2>0 \\ 10x-x^2\leq 9 \end{cases}$$

$x^2-10x<0$

$0<x<10$



$x^2-10x+9\geq 0$

$x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

1. Попробуем разложить на множители подкоренное выражение

$\cancel{2xy - 12y - x + 6 = 2y(x-6) - (x-6)}$

$2xy - 12y - x + 6 = 2y(x-6) - (x-6) = (x-6)(2y-1)$

Обозначим $u = x - 6$; $v = 2y - 1$

Тогда $u - 6v = (x-6) - 12y + 6 = x - 12y$

Т.е уравнение 1 имеет вид: $u - 6v = \sqrt{u \cdot v}$

~~2) выделим~~ выделяем полные квадраты

по x и по y:

$(x^2 - 12x + 36) - 36 + 36(y^2 - y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) = 45$

$(x-6)^2 - 36 + 9 \cdot 4(y - \frac{1}{2})^2 - 36 \cdot (\frac{1}{4}) = 45$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 45 + 36 + 9$

$u^2 + 9v^2 = 90$

Получим систему

$\begin{cases} u - 6v = \sqrt{u \cdot v} \\ u^2 + 9v^2 = 90 \end{cases}$, где $u = x - 6$, а $v = 2y - 1$

$\begin{cases} u^2 - 12uv + 36v^2 = uv \\ u - 6v \geq 0 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$u^2 - 13uv + 36v^2 = 0$

Решаем как квадратное уравнение по переменной u, считая v числом

$D = 169v^2 - 4 \cdot 36v^2 = 25v^2$

$u = \frac{13v \pm 5v}{2}$

$u_1 = 9v \quad u_2 = 4v$

Подставляем $u = 9v$:

$81v^2 + 9v^2 = 90$

$90v^2 = 90$

$v = \pm 1$

$v = 1$ или -1; $u = 9$ или -9, но $u \geq -6v$ ⇒

⇒ Поэтому остается только $u = 9$, $v = 1$, ~~но $u \geq -6v$ ⇒~~

Подставляем $u = 4v$

$16v^2 + 9v^2 = 90$

$25v^2 = 90$

$v = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ или $-3\sqrt{\frac{2}{5}}$;

$u = 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ или $-12\sqrt{\frac{2}{5}}$, но $u \geq 6v$ ⇒

поэтому остается только $u = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$v = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $f(2)=0 \qquad f(7)=1 \qquad f(17)=4$

$f(3)=0 \qquad f(11)=2 \qquad f(19)=4$

$f(5)=1 \qquad f(13)=3 \qquad f(23)=5$

$$f(p) = f(p^2) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p)$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0 \qquad f\left(\frac{1}{7}\right)=-1 \qquad f\left(\frac{1}{17}\right)=-4$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=0 \qquad f\left(\frac{1}{11}\right)=-2 \qquad f\left(\frac{1}{19}\right)=-4$

$f\left(\frac{1}{5}\right)=-1 \qquad f\left(\frac{1}{13}\right)=-3 \qquad f\left(\frac{1}{23}\right)=-5$

Пусть $x = a_1^{x_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{x_n}$ — разложение на простые множители, тогда $f(x) = a_1 \cdot f(a_1) + \ldots + a_n \cdot f(a_n)$, т.к $f(a_i)$ нам известно то $f(x)$, мы сможем найти

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = a_1 \cdot f\left(\frac{1}{a_1}\right) + \ldots + a_n \cdot f\left(\frac{1}{a_n}\right) = -f(x)$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$, нужно найти такие пары

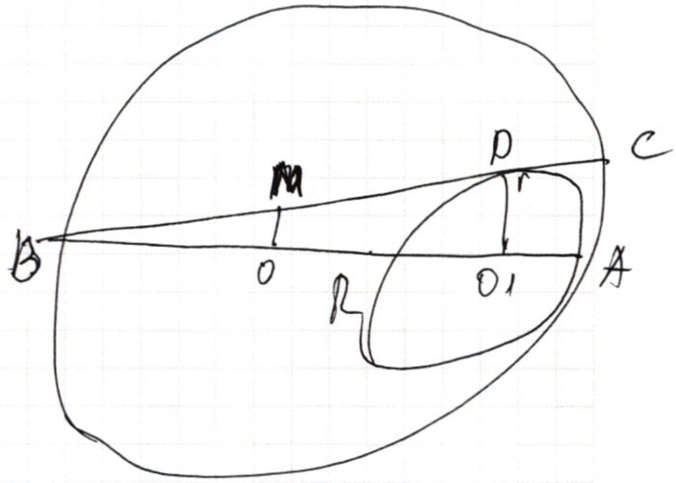
~~Введем таблицу~~

~~K~~	~~f(K)~~
~~2,~~	~~0~~ ~~10 шт~~
~~3,~~	
~~4,~~	
~~6,~~	
~~8,~~	
~~9,~~	
~~12,~~	
~~16,~~	
~~18,~~	
~~24~~	

~~№ 3б~~

№4. Хорда $BC = \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = 16$

Пусть M ее середина, тогда $BM = 8$ по свойству окружности $\angle BMO = 90°$, где O – центр большой окружности. Пусть искомые радиусы r, R, тогда $BO = R$, тогда $MO = \sqrt{R^2 - 64}$, ~~DO_1~~ $DO_1 = r$



~~Из MO Из $MO = DO_1$~~

Из $\frac{MO}{DO_1} = \frac{BM}{BD}$

$$\frac{\sqrt{R^2-64}}{\frac{8}{\frac{17}{2}}} = \frac{16}{17}$$

т.к внутреннее касание, то $OO_1 = R - r$, тогда из подобия $\frac{BO}{BO_1} = \frac{BM}{BD}$; $\frac{R}{2R-r} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17}$

из этого $\Rightarrow 17R = 32R - 16r$; ~~R~~

~~Подставим~~ Отсюда $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Введем таблицу:

k	f(k)
2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24	0 - 10шт
5, 7, 10, 14, 15, 20, 21	1 - 7шт
11, 22, 25	2 - 3шт
13,	3 - 1шт
17, 19	4 - 2шт
23	5 - 1шт

Легко убедиться, что числа и значения функции к ним правильные. Все числа у которых простые делители это 2 и 3, только у них будет сумма вида $K \cdot f(2) + m \cdot f(3) = 0$ и т.д.

1) Если $f(y) = 1$, то подходит 10 штук $x \Rightarrow 7 \cdot 10 = 70$
2) Если $f(y) = 2$, то подходит 17 штук $x \Rightarrow 3 \cdot 17 = 51$
3) Если $f(y) = 3$, то подходит 20 штук $x \Rightarrow 20 \cdot 1 = 20$
4) Если $f(y) = 4$, то подходит 21 штук $x \Rightarrow 21 \cdot 2 = 42$
5) Если $f(y) = 5$, то подходит 23 штук $x \Rightarrow 23 \cdot 1 = 23$

Складываем: $70 + 51 + 20 + 42 + 23 = 206$ пар $(x;y)$

Ответ: 206 пар $(x;y)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 случай: Подставляем в первое $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

Подставляем $tg\,\alpha$:

$$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - 2\,\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$$

$$2tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$$

$$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$$

$$tg\alpha = -1;\ \frac{1}{3}$$

Ответ: Возможные значения $tg\alpha$: $3; -1; \frac{1}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y = 4 - \frac{4}{y} \\ y^2 - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

Получим единственную общую точку $y=2$

$x = \frac{5-2}{4} = \frac{3}{4}$ т.е $g(x) = -4x+5$ касательная к гиперболе $y = h(x)$

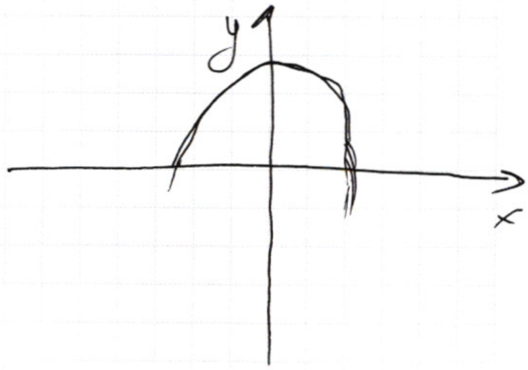
$g(\cancel{1})$ ~~т.е~~ т.е любая искомая прямая $g(x) = ax + b$, лежит на $[\frac{1}{4}; 1]$ не выше прямой $g(x) = -4x+5$

На $(\frac{1}{4}; 2)$ лежит ниже $y = -4x+5$ и в частности точки касания $C(\frac{3}{4}; 2)$

$g(\frac{3}{4}) < 2$, то гипербола $h=2$

поэтому такая прямая $g(x) = ax+b$ не подходит, подходит только $g(x) = -4x+5$

~~Ответ: a=-4, b=5~~



Ответ: $a=-4$, $b=5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

1. В равенстве 2 переводим сумму в произведение:

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a=-\frac{2}{5}$

$2\sin\frac{2a+4\beta+2a}{2}\cdot\cos\frac{4\beta+2a-2a}{2}=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

Подставляем из первого $\sin(2a+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta\right)=-\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

Отсюда $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{2}{\sqrt5}=\sin 2\beta$

---

2. Из 1 $\sin 2a\cdot\cos 2\beta+\cos 2a\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

1 случай:

Подставим в 1 $\cos 2\beta$, который равен $\frac{1}{\sqrt5}$,

$\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2a\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos 2a\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2a+2\cdot\cos 2\alpha=-1$, подставляем $\sin 2a$,

$\cos 2a$ через $tg\,a$: $\frac{2\,tg\,a}{1+tg^2a}+2\cdot\frac{1-tg^2a}{1+tg^2a}=-1$

$2\,tg\,\alpha+2-2\,tg^2a=-1-tg^2a$; $\quad 2\,tg\,\alpha+2-2\,tg^2a+1+tg^2a=0$

$tg^2\alpha-2\,tg\,\alpha-3=0$

$tg\,\alpha=3$ или -1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

6. ~~[illegible]~~

Решение: $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$f(x) = -32x^2+36x-3 \to$ парабола направлена ветвями вниз,

при $x_0 = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16}$

$f(\frac{1}{4}) = 4$; $f(1) = 1$ Парабола выпукла вверх, поэтому чтобы было $ax+b \ge -32x^2+36x-3$ для всех $x \in$ принадлежащих $[\frac{1}{4}; 1]$ необходимо и достаточно, чтобы прямая T $(x = ax+b)$ на концах отрезка $[\frac{1}{4}; 1]$

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ — гипербола, которая на $[\frac{1}{4}; 1]$ выпукла вверх, причем $h(\frac{1}{4}) = 3$; $h(1) = 0$

Заметим, что прямая $g(x) = ax+b$ проходящая через концы параболы $y = f(x)$ на $[\frac{1}{4}; 2]$ т.е через точки $A(\frac{1}{4}; 4)$, $B(1; 1)$ имеет ав:

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + b = 4 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 5 \end{cases}$$

$g(x) = -4x+5$ является касательной к $h(x) = 4 + \frac{4}{4x-5}$. Действительно если решить систему

$$\begin{cases} y = -4x+5 \\ y = 4 + \frac{4}{4x-5} \end{cases}$$