МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\neq 0 \quad (1)\\ \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$$

Т.к. $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$, то $\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$. По условию $tg\alpha$ – определ.

Значит:

(1): $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\\ &\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\end{aligned}\right. \quad \Big|\cdot\sqrt5$$

$$\left[\begin{aligned}&2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1\\ &2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&2\cdot\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1\\ &2\cdot\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{tg^2\alpha-1}{1+tg^2\alpha}=-1\end{aligned}\right. \quad \Big|\cdot(1+tg^2\alpha)>0$$

$$\left[\begin{aligned}&4tg\alpha=-2\\ &4tg\alpha+2tg^2\alpha=0\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&tg\alpha=-\frac{1}{2}\\ &tg\alpha=0\\ &tg\alpha=-2\end{aligned}\right.$$

Т.к. по условию есть хотя бы 3 значения, то все они достигаются.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0; -2.

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y\geqslant 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \quad (1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \end{cases}$$

1. (1): $x^2-x(5y-1)+(4y^2+2y-2)=0$

$D=25y^2-10y+1-8\cdot 2y^2-8y+8=9(y-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5y-1+3y-3}{2} \\ x=\frac{5y-1-3y+3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4y-2 \\ x=y+1 \end{array}\right.$$

2. Если $x=4y-2$, то:

$$\begin{cases} 4y-2-2y\geqslant 0 \\ (4y-2-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\geqslant 1 \\ 16y^2-32y+16+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\geqslant 1 \\ y^2-2y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\geqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \underline{y=2 \Rightarrow x=6}$$

3. Если $x=y+1$:

$$\begin{cases} y+1-2y\geqslant 0 \\ (y+1-2)^2+9(y+1-1)^2=5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\leqslant 1 \\ y^2-2y+1+9y^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\leqslant 1 \\ 10y^2-2y-24=0 \end{cases}$$

$5y^2-y-12=0$

$D=1+240$

$$\begin{cases} y\leqslant 1 \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{1+\sqrt{241}}{10}>1 \\ y=\frac{1-\sqrt{241}}{10} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow y=\frac{1-\sqrt{241}}{10} \Rightarrow x=\frac{11-\sqrt{241}}{10}$$

Ответ: $(6;2)$ и $\left(\frac{11-\sqrt{241}}{10};\ \frac{1-\sqrt{241}}{10}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

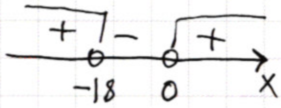
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x \quad (1)$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$



$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

Т.к. на ОДЗ $x^2+18x>0$, то $(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Пусть $(x^2+18x)=t$, $t>0$:

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t} \quad \Big| : 13^{\log_{12}t} \neq 0 \ (>0)$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t} + \left(12/13\right)^{\log_{12}t} \geq 1. \quad (2)$$

Т.к. $\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}t}$ — монотон. убыв с ростом $\log_{12}t$ и

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}t}$ — моног. убыв с ростом $\log_{12}t$, а также:

при $\log_{12}t=2$ достиг. равенство: $\frac{25}{169}+\frac{144}{169}=1$, то

$(2) \Leftrightarrow \log_{12}t \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 144$, т.к. $12>1$.

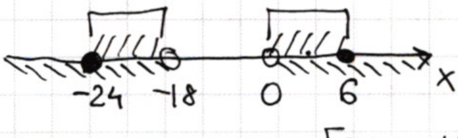
Обр. замена:

$x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$(x-6)(x+24) \leq 0$

$x \in [-24; 6]$.



$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

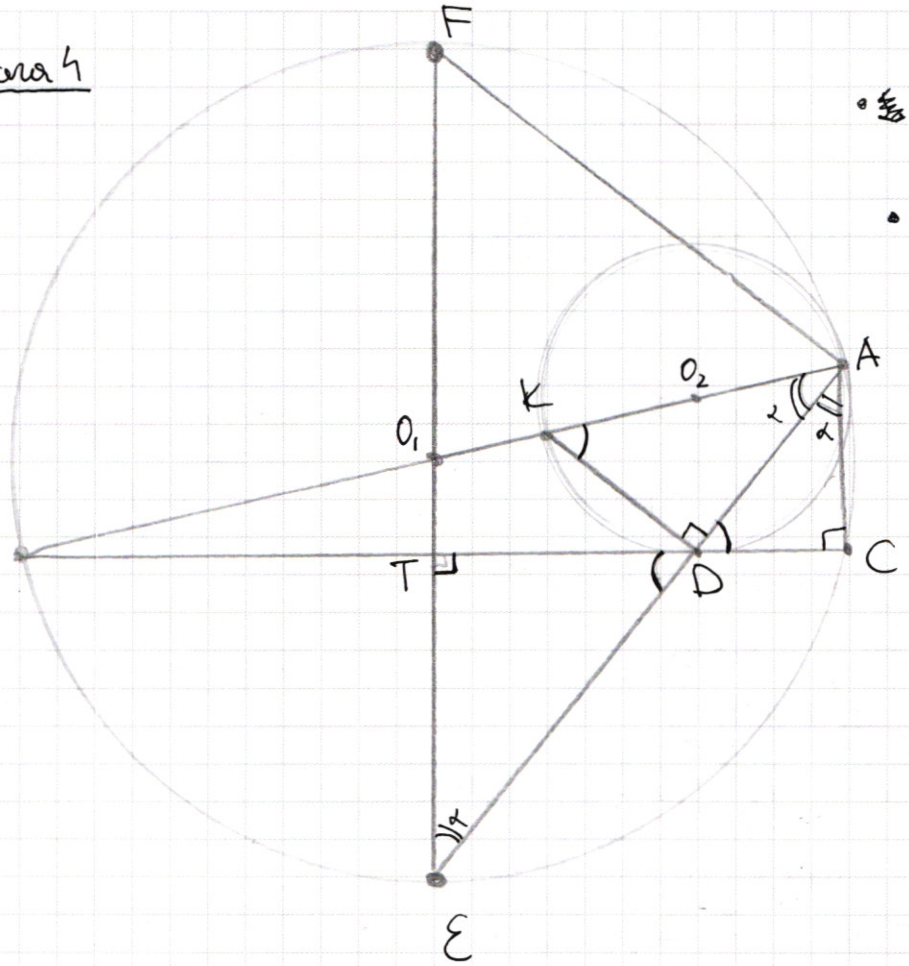
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

Задача 4



- Пусть центр $\omega - O_2$, $\Omega - O_1$.
- Пусть $AB \cap \omega$ повтор в т K.
- Пусть $BC \cap F\mathcal{E} = T$

1. Т.к. AB – диаметр Ω, то $O_1 \in AB$. ~~[illegible]~~ Т.к. A – точка касания, то A, O_1, O_2 – на 1 прямой. Т.о. K, B, O_1, O_2, A – на 1 прямой.

2. AK проходит через $O_2 \Rightarrow AK$ – диаметр $\omega \Rightarrow \angle KDA = 90°$.
BC – касат к $\omega \Rightarrow \angle ADC = \angle$ ~~[illegible]~~ AKD, как $\angle$ между хордой KD и кас.

3. $\left.\begin{array}{l} \angle TD\mathcal{E} = \angle ADC = \angle DKA \\ \text{(вертик)} \\ \angle \mathcal{E}TD = 90° = \angle ADK \end{array}\right\} \triangle ADK \sim \triangle \mathcal{E}TD \Rightarrow \angle KAD = \angle D\mathcal{E}T = \alpha$.

4. Предположим, что $F\mathcal{E} \cap AB = O_1' \neq O_1$.
$\left.\begin{array}{l} \angle FO_1'A = \angle A\mathcal{E}O_1' + \angle O_1'A\mathcal{E} = 2\alpha \text{ (внешн } \angle O_1\mathcal{E}A) \\ \smile FA = 2\angle F\mathcal{E}A = 2\alpha \end{array}\right\} \angle FO_1'A$ – центральн $\Rightarrow O_1' = O_1$. Противор.

Т.о. $BA \cap F\mathcal{E} = O_1$.

5. $F\mathcal{E}$ – диаметр, $F\mathcal{E} \perp BC \Rightarrow T$ – середина $BC \Rightarrow$
$\Rightarrow BT = \frac{17+8}{2} = 12{,}5$; $TD = 12{,}5 - 8 = 4{,}5$
Также: $\mathcal{E}$ – серед $\smile BC \Rightarrow \angle BA\mathcal{E} = \angle \mathcal{E}AC = \alpha$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. Т.к. DA – секущ, BD – кас к ω, то:

$BK \cdot BA = BD^2 = 17^2$

$(AB - AK)AB = 17^2$. (1)

7. $\angle BCA$ опир на AB – диам Ω => $\angle BCA = 90°$.

$\triangle ETD \sim \triangle ACD$ (остр $\angle TDE = \angle CDA$ (вертик) и $\angle T = \angle C = 90°$) =>

$$\Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{TD}{CD} = \frac{4{,}5}{8} = \frac{9}{16}$$

8. BC и EA – П-ся хорды => $BD \cdot DC = ED \cdot AD$ => $ED \cdot AD = 17 \cdot 8$

Т.о: $\begin{cases} \frac{ED}{AD} = \frac{9}{16} \\ ED \cdot AD = 17 \cdot 8 \end{cases}$ $ED^2 = \frac{9 \cdot 17}{2}$ $AD^2 = \frac{8^2 \cdot 2 \cdot 17}{9}$

9. $AC^2 = AD^2 - DC^2$ по теореме Пифаг в $\triangle ADC$ =>

$$\Rightarrow AC^2 = \frac{8^2 \cdot 2 \cdot 17}{9} - 8^2 = \frac{8^2(34-9)}{9} = \frac{8^2 \cdot 5^2}{3^2} \Rightarrow AC = \frac{40}{3}.$$

10. AD – бис-са в $\triangle BAC$ => $AB/AC = BD/DC = 17/8$ =>

$$\Rightarrow AB = \frac{17}{8} \cdot \frac{40}{3} = \frac{17 \cdot 5}{3} \Rightarrow \boxed{r_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{85}{6}}$$

11. (1): $(AB - AK)AB = 17^2 \Rightarrow \left(\frac{17 \cdot 5}{3}\right)^2 - \frac{17 \cdot 5}{3}AK = 17^2$

$$\frac{17 \cdot 25}{9} - \frac{5}{3}AK = 17$$

$$AK = \frac{17 \cdot 16}{15} = \frac{272}{15} \Rightarrow \boxed{r_\omega = \frac{136}{15}}$$

12. $\angle AFE = 90 - \angle FEA = 90 - \alpha = \angle ADC$

$$\operatorname{tg}\angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{40}{3 \cdot 8} = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}}.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

12. $\triangle AEF \sim \triangle DAK$ (по остр $\angle FEA = \angle KAD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{DAK}} = \left(\frac{BA}{KA}\right)^2 = \frac{\cancel{17^2} \cdot 5^2 \cdot \cancel{15^2} \cdot 5^2}{\cancel{3^2} \cdot \cancel{17^2} \cdot 16^2} = \frac{5^4}{16^2}$

13. $S_{DAK} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot AD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} AK \cdot AD \cdot \frac{DC}{AD} = \frac{1}{2} AK \cdot DC =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{17 \cdot 16}{15} \cdot 8 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 4}{15}$

14. $S_{AEF} = S_{ADK} \cdot \frac{5^4}{16^2} = \frac{17 \cdot \cancel{16} \cdot 4}{15} \cdot \frac{5^4}{16^{\cancel{2}}} = \frac{17 \cdot 4 \cdot 5^3}{3 \cdot 16} = \frac{17 \cdot 5^3}{12}$

Ответ: $\frac{85}{6}$; $\frac{136}{15}$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$; $\frac{17 \cdot 125}{12}$

Задача 5

1. $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow \underline{f(1) = 0}$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $\quad$ // A

2. $f(p) \geq 0$, где $p = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

3. Заметим, что X и y не могут делиться более чем на 1 число из A, т.к иначе они $\geq 5^2 = 25 > 24$.

4. Пусть $X = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, $y = 2^m \cdot 3^n$, где $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0,

тогда $f\left(\frac{X}{y}\right) = f\left(\frac{X}{y}\right) + 0 = f\left(\frac{X}{y}\right) + f(2^v) + f(3^w) = f\left(\frac{X 2^v \cdot 3^w}{y}\right) \geq 0$,

т.к. мы можем взять любую степень w и v, $v, w \in \mathbb{Z}$, чтобы $\frac{X \cdot 2^v \cdot 3^w}{y}$ было целым. А $f(t)$, где $t \in \mathbb{Z}$ всегда ≥ 0, т.к раскладывать в произв простых сумма f от которых $= 0$ (т.к. это 2 или 3)

5. Пусть $X = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot q$, $y = 2^m \cdot 3^n$, $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0; $q \in A$.

Тогда: $f\left(\frac{X}{y}\right) = \underbrace{f(q)}_{\geq 0} + \underbrace{f\left(\frac{2^\alpha \cdot 3^\beta}{2^m \cdot 3^n}\right)}_{\geq 0 \text{ по доказ}} \geq 0$.

6. Пусть $X = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot q$, $y = 2^m \cdot 3^n \cdot r$, $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0; $r, q \in A$, $q \geq r$

Тогда: $f\left(\frac{X}{y}\right) = f(q) + f\left(\frac{1}{p}\right) + f\left(\frac{2^\alpha \cdot 3^\beta}{2^m \cdot 3^n}\right) =$

$= f(q) + f(1) - f(p) + f\left(\frac{2^\alpha \cdot 3^\beta}{2^m \cdot 3^n}\right) = \underbrace{f(q) - f(p)}_{\geq 0} + \underbrace{f\left(\frac{2^\alpha \cdot 3^\beta}{2^m \cdot 3^n}\right)}_{\geq 0}$.

7. Пусть $x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot q$, $y = 2^{m} \cdot 3^{n} \cdot r$; $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0

$q, r \in A$, $q < r$ и не $\begin{matrix} p=5 \\ r=7 \end{matrix}$ и не $\begin{matrix} p=17 \\ r=19 \end{matrix}$ (1)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \underbrace{f(q) - f(r)}_{<0} + \underbrace{f\left(\frac{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}{2^{m} \cdot 3^{n}}\right)}_{=0} < 0$$

8. Пусть $x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}$, $y = 2^{m} \cdot 3^{n} \cdot r$, $\alpha, \beta, m, n \in \mathbb{Z}$ и ≥ 0

$r \in A$.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \underbrace{f\left(\frac{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}}{2^{m} \cdot 3^{n}}\right)}_{=0} - \underbrace{f(r)}_{>0} < 0.$$

(9) Т.о. нам подходят пары:

I $\begin{cases} x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24\} \text{ — 11шт.} \\ y = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot r = \{5, 10, 15, 20, 7, 14, 21, 11, 22, 13, 17, 19, 23\} \text{ — 13шт.} \end{cases}$

Итого: 11·13 шт

II $\begin{cases} x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot q \\ y = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot r \\ q < r \end{cases}$

	y	x
5 =	5	—
7 =	7	5
2·5 =	10	—
11 =	11	10, 7, 5
13 =	13	11, 10, 7, 5
2·7 =	14	10, 5
3·5 =	15	—
17 =	17	15, 14, 13, 11, 10, 7, 5
19 =	19	17, 15, 14, 13, 11, 10, 7, 5
7·3 =	21	15, 10, 5
11·2 =	22	21, 15, 14, 10, 7, 5
23 =	23	22, 21, 19, 17, 15, 14, 13, 11, 10, 7, 5

Итого: 45 вар —

7 вар = 38 вар

не подход под (1).

Т.о. Всего: $11 \cdot 13 + 38$ вар $= 181$ вар

Ответ: 181 вар.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f($

$\frac{x}{y} \le 24$

Если $x \vdots y$ то нет.

$\frac{x}{y}$

Можно: умножать на 2 и 3

$\frac{15}{11}=f\left(\frac{5}{11}\right)=f(5)+f\left(\frac{1}{11}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{xy}{y^2}\right)=f$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$ $f\left(\frac{x}{y}\right)$ $f\left(\frac{1}{\cdot}\right)$

$\uparrow$

$\underbrace{5,7,11,13,17\ 19,23}$

$x \not\vdots y \Rightarrow \exists p:\ y \vdots p$ и $x \not\vdots p$

$f\left(\frac{1}{p}\right)=a_p.$ $f\left(\frac{1}{p}\right)+f(p)=f(1)=0$

$p \ne 2$

$p \ne 3$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(ab)-f(a)=f(b)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ | ОДЗ: $x^2+18x>0$

Пусть $x^2+18x=t$; $t>0$

$5^{\log_{12}t} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}t} = t$

$t^{\log_{12}a} = t$ $\quad \log_{12}a = $

$5^{\log_{12}t} + t \geqslant 13^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geqslant 13^{\log_{12}t}$

$5^k + 12^k \geqslant 13^k$

при $k=2$: $25+144=169$

при $k=1$: $5+12>13$

при $k=0$: $1+1>2$

$144 = 12^2 = 2^4\cdot 3^2$

$\underline{k \leqslant 2}$

5^k

$\left(\frac{5}{13}\right)^k + \left(\frac{12}{13}\right)^k \geqslant 1$

монот убыв $\quad$ мон. убыв

$3\cdot 2^3 - 3\cdot 2 = 3\cdot 8 - 6$

$24^2 - 18\cdot 24 - 24\cdot 6$

$24(24-18-6)$

$x^2+18x-144 \leq 0$ $\qquad 36 + 18\cdot 6 \qquad 36+108=144$

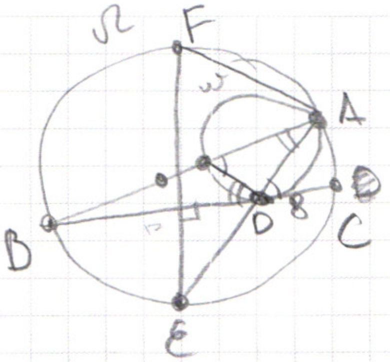
$(x-6)(x+24) \leq 0$

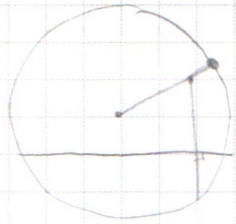
☑ черновик ☐ чистовик

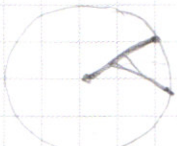
(Поставьте галочку в нужном поле)

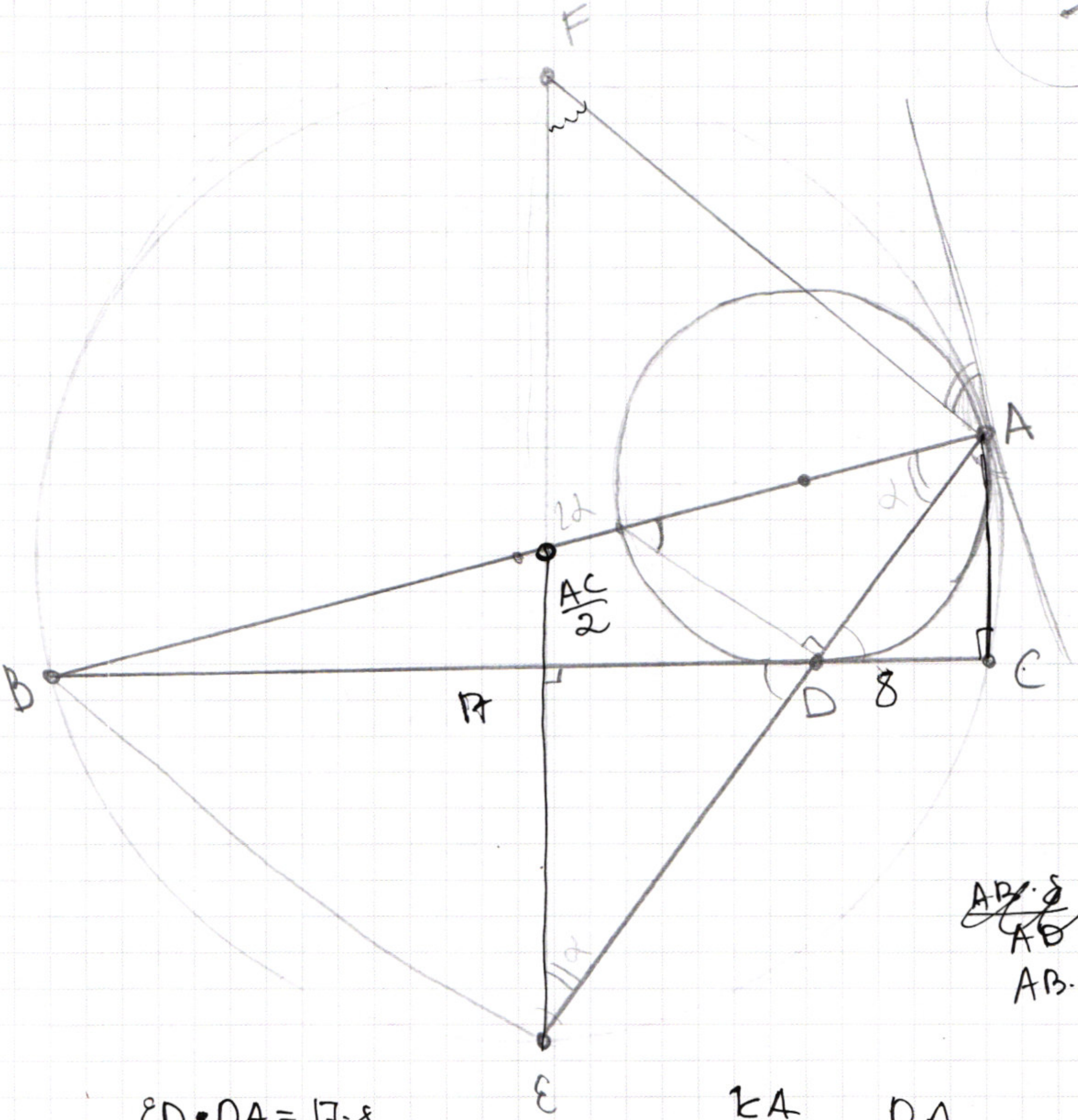
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)









$\cancel{\frac{AB\cdot 8}{AD\cdot 17}} =$

$AB\cdot 8^2 = ET\,DA^2$

$ED\cdot DA = 17\cdot 8$

$\frac{KA}{ED} = \frac{DA}{ET}$

~~BD / DC~~

$BD^2 = (D-d)D$

$KA\cdot ET = 17\cdot 8$

~~AB DC~~

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{AC}{AD} = \frac{ET}{ED}$

$\frac{AB\cdot DC}{AD\cdot BD} = \frac{ET}{ED}$

$\frac{AB\cdot 8}{AD\cdot 17} = \frac{ET}{ED}$

$\frac{AB\cdot 8}{AD\cdot \cancel{17}} = \frac{ET\cdot DA}{\cancel{17}\cdot 8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(\alpha\cdot 2+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos 2\beta$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{\sqrt5}} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt5 = \frac{2\sqrt5}{5} =$$

$$2\cos 2\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{1} = 4$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = 2/\sqrt5 \qquad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right.}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \qquad tg\alpha(tg\alpha+2)$$

1. $$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$$

2. $$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} =$$

$$2tg\alpha+1-\cancel{tg^2\alpha} = -1-\cancel{tg^2\alpha}$$

$$\underline{tg\alpha = -1}$$

$$tg^2\alpha+2tg\alpha = 0$$

$$4tg\alpha+tg^2\alpha-1 = -1-tg^2\alpha$$

$$4tg\alpha+1-\cancel{tg^2\alpha} = -1-\cancel{tg^2}$$

$$2tg^2\alpha+4tg\alpha = 0$$

$$tg^2\alpha+2tg\alpha = 0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

② $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

x^2+9

$1+\sqrt{241} \vee 10$

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$1-$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$

$x^2-5xy+x+(4y^2+2y-2)=0$

x^2

$x^2-x(5y+1)+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2+10y+1-16y^2-8y+8=\cancel{8y^2+2y+8}\ 9y^2-18y+9=$
$\underbrace{=9(y-1)^2}$

$x=\frac{5y-1+3y-3}{2}=4y-2$

$x=\frac{5y-1-3y+3}{2}=y+1$

$(4y-4)^2$

$-4y\cdot 4\cdot 2$

$25y^2-50y=0$

$241 \mid 23$, 23, 1, 11

$6-4=\sqrt{12-6-4+2}$

$\cancel{36+9\cdot 4-16-8\cdot 18=12}$

$\cancel{72-16-108=12}$

$\cancel{36-16=12}$

$\cancel{36}+9\cdot 4-4\cdot 6-\cancel{18\cdot 2}=12$

$36-24=12$

$5y^2-y-12=0$

$D=1+4\cdot 5\cdot 12=1+2\cdot 120$

$D=1+2\cdot 10\cdot 12$

$5y^2-y-12$

$D=241 \mid 13$, 13, 17, 111, 91, 19, 19, 11

$241 \mid 19$, 9

$5y^2-y-12=0$

$D=1+20\cdot 12=241$

$241 \mid 17$, 17, 1, 71

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \quad , p \in P$

$f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow \underline{f(1) = 0}$

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(4) = 2f(2) = 2 \cdot 0 = 0$

$f(4) = 0$

$f(x) = f(p_1) + f(p_2) \dots$

Для где $p = 2, 3 \quad f(p) = 0$

где $p = 5, 7 \quad f(p) = 1$

где $p = 11 \quad f(p) = 2$

$p = 13 ; \quad f(p) = 3$

$p =$

f

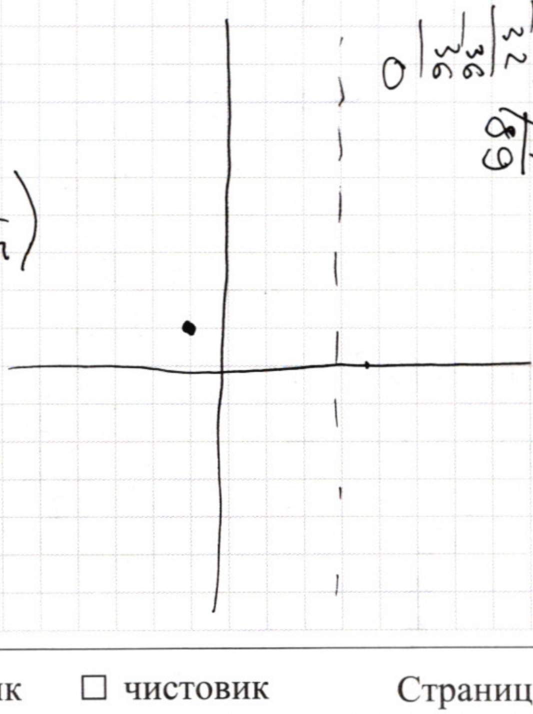
$x = 1 :$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) + f(2) = f\left(\frac{1}{4}\right)$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 11 \\ \hline 13 \\ 13\ \ \\ \hline 143 \end{array}$$



$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b \le$

$8x^2 + 30x + 17 + ax + b \le 0$

$8x^2 + x(30+a) + (17+b) \le 0$

$w) =$

$\ell 3$

$\frac{11-36}{3-11}$

$\frac{-12 \cdot 3 + 11}{-11+3} =$

$\frac{-12+11}{-4+3}$

-1

$D = 900 - 4 \cdot 8 \cdot 17$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 17 \\ \hline 224 \\ + 32 \\ \hline 544 \end{array}$

$\begin{array}{r} 900 \\ -\ 544 \\ \hline 356 \end{array}$

$356 \,|\, 4 = 89$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$17^2=(D-d)D$ $\quad 17\cdot 8=ED\cdot DA$ $\quad \frac{BA}{KA}=\frac{17\cdot 5}{3}\cdot\frac{1}{16}=\left(\frac{25}{16}\right)^2$

$\frac{D}{AC}=\frac{17}{8}$ $\quad \frac{DA}{AC}=\frac{d}{DA}$

AC

$\frac{DA^2}{AC}=d$

$\frac{d}{D}=\frac{AD}{AE}$ $\quad \frac{1}{2}\frac{17\cdot 5}{3}\cdot\left(3\sqrt{\frac{17}{2}}+\frac{8}{3}\sqrt{2\cdot 17}\right)$

$\frac{d}{D}=$ $\quad ET=\frac{17\cdot 8}{d}$ $\quad 17$

$ET=\frac{D}{2}-\frac{AC}{2}$ $\quad ET=$ $\quad 17+8=25$

$f(2)$, $f(1)=0$, $f(3)=0$

$25/2=12,5$

$d\cdot ET=17\cdot 8$

$d\cdot\left(\frac{D-AC}{2}\right)=17\cdot 8$ $\quad 12,5-8$

$f(1)=f(2)$

$\frac{AB}{AC}=\frac{17}{8}$ $\quad 17$ $\quad AK=\frac{17(25-9)}{9}=\frac{5}{3}AK$

$\frac{17\cdot 8}{9}\cdot 16$ $\quad \frac{5}{4}=\frac{40}{3\cdot 8}$ $\quad \frac{17\cdot 16}{9}=\frac{5}{3}AK$

$ED^2\cdot AD^2=17^2\cdot 8^2$ $\quad \frac{1}{4}=\frac{8}{3\cdot 8\cdot 4}$ $\quad \frac{17\cdot 16}{15}AK$

$\frac{9\cdot 17}{2}\cdot AD^2=17^2\cdot 8^2$

$9\cdot AD^2=8^2\cdot 2\cdot 17$

$$\begin{array}{r} 17\\ \cdot 16\\ \hline 102\\ +17 \end{array}$$

13

$$\begin{array}{r} 17\\ \cdot 8\\ \hline 136 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

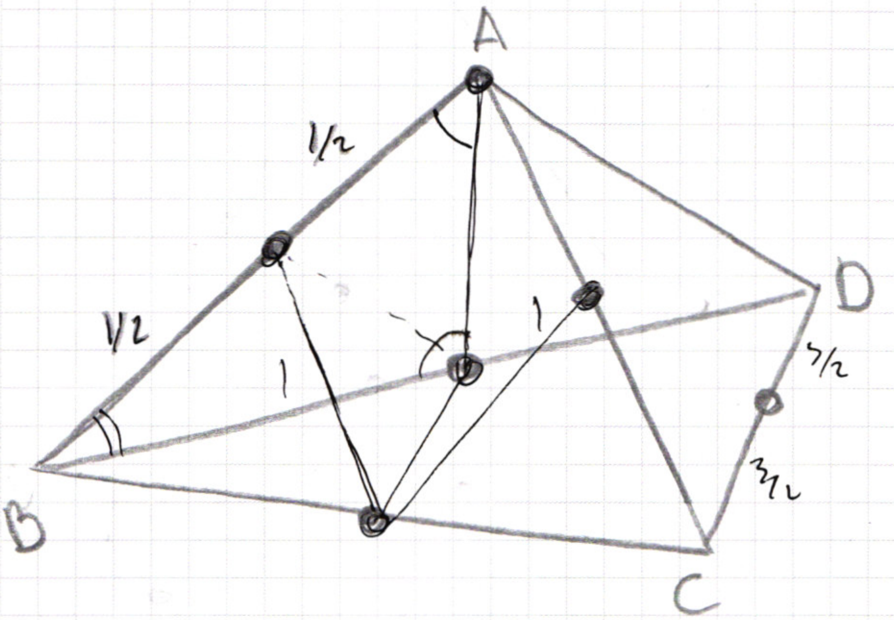
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)