МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

дубл.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geq 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$\exists$ $\left.\begin{matrix} x-2=a \\ y-1=b \end{matrix}\right| \Rightarrow x-2y=a-2b \Big/ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=25 & (2) \end{cases}$$

(1) $a-2b=\sqrt{ab}$ $\uparrow_2$

Отсюда следует: (мы могли получить лишние корни, нужно будет проверить)

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0 \quad |:b^2$ ($b=0$ - решением не является $\rightarrow$ $\rightarrow b\neq 0$)

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

$\exists$ $\frac{a}{b}=t \rightarrow \quad t^2-5t+4=0$

$D=25-4\cdot 4=9 \Rightarrow t=\left[\begin{matrix} \frac{5+3}{2}=4 & \text{I} \\ \frac{5-3}{2}=1 & \text{II} \end{matrix}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

I: $t=4 \Rightarrow \frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$

Подставим во (2):

$16b^2+9b^2=25$

$25b^2=25$

$b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1 \Rightarrow$ 1. $b=1,\ a=4$

2. $b=-1,\ a=-4$

1. $b=1,\ a=4 \Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \\ x-2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$ (по ОДЗ подходит)

Проверим подставив в начальную систему:

$6-2\cdot 2=\sqrt{6\cdot 2-6-2\cdot 2+2}$

$2=\sqrt{12-8}$

$2=2 \Rightarrow$ подходит $\boxed{(6;2)}$

2. $b=-1,\ a=-4 \Rightarrow \begin{cases} y-1=-1 \\ x-2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$ (по ОДЗ подходит)

Проверим:

$-2-2\cdot 0=\sqrt{-2\cdot 0-(-2)-2\cdot 0+2}$

$-2=2 \Rightarrow$ не подходит

II $t=2 \Rightarrow \frac{a}{b}=\cancel{4}\,2 \Rightarrow a=\cancel{4}\,2b \Rightarrow$

~~Подставим во (2)~~

$\cancel{4b^2+9b^2=25 \Rightarrow 13b^2=25 \Rightarrow b=\pm\frac{5\sqrt{13}}{13}}$

$\cancel{1.\ b=\frac{5\sqrt{13}}{13},\ a=\frac{10\sqrt{13}}{13}}$

$\cancel{2.\ b=-\frac{5\sqrt{13}}{13},\ a=-\frac{10\sqrt{13}}{13}}$

$\cancel{1.\ b=\frac{5\sqrt{13}}{13},\ a=\frac{10\sqrt{13}}{13}}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№2)

$\Rightarrow \begin{cases} y-1 = \frac{5\sqrt{13}}{13} \\ x-2 = \frac{10\sqrt{13}}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5\sqrt{13}+13}{13} \\ x = \frac{10\sqrt{13}+26}{13} \end{cases}$

Проверим ОДЗ:

$\frac{(10\sqrt{13}+26)(5\sqrt{13}+13)}{13^2} - \frac{10\sqrt{13}+26}{13} -$

$- \frac{10\sqrt{13}+26}{13} + 2 = \frac{50\cdot 13 + 130\sqrt{13} + 130\sqrt{13} + 13\cdot 26}{169} -$

$- \frac{20\sqrt{13}+52}{13} + 2 = \frac{13\cdot 76 + 260\sqrt{13} - 260\sqrt{13} - 26\cdot 13}{169} > 0$

$= \frac{13\cdot 50}{169}$

Проверим ~~урав~~ подставив в (1):

$\frac{10\sqrt{13}+26}{13} - 10\sqrt{13}+26$

Заметим, если $a = 2b$

$a=b \Rightarrow$ Подставим во (2): $a^2+9a^2=25$

$10a^2=25 \Rightarrow a^2=\frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$ 1. $\begin{cases} x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow$

(N2)

$\Rightarrow$ 1 и 2. по ОДЗ подходят

Осталось проверить, чтобы выполнялось (1)

(а именно, чтобы правая и левая части были одного знака) $\Rightarrow$ что 1. не подходит, а 2. подходит $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$\Downarrow$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

] $x^2+18x=t>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13} \quad (\text{на ОДЗ:})$$

$$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13} \geq 0 \quad |:t \quad (\text{т.к. } t>0.)$$

$$t^{\log_{12}5-1}+1-t^{\log_{12}13-1} \geq 0.$$

$$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \geq -1.$$

$\Downarrow$

$$\frac{5^{\log_{12}t}}{12^{\log_{12}t}}-\frac{13^{\log_{12}t}}{12^{\log_{12}t}} \geq -1. \quad \Big/ \cdot 12^{\log_{12}t}>0$$

$$5^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t} \geq -12^{\log_{12}t}$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

Это Пифагорова тройка $(5,12,13)$ и равенство

достигается при $\log_{12} t = 2$.
Известно, что правая часть растёт быстрее левой => что нам подходят все значения ≤ 2:

$$\log_{12} t \leq 2 \Rightarrow t \leq 144$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} t \leq 144 \\ t > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 18x \leq 144 \quad (1) \\ x^2 + 8x > 0 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$D = 18^2 + 4 \cdot 144 = 4(9^2 + 4^2 \cdot 3^2) = 2^2 \cdot 3^2 (9 + 4^2) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 30^2$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 30}{2} \rightarrow x = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -24 \end{array}\right. \Rightarrow x \in [-24; 6]$$

(2) $x^2 + 8x > 0$.
$x(x+8) > 0$

$+ \quad - \quad +$
$-8 \quad 0$

$x \in (-\infty; -8) \cup (0; +\infty)$

И (1) и (2) (пересекаем множества):

$x \in [-24; -8) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -8) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17.$$

Решать будем графическим методом

Выполнено для всех $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}$ – график гиперболы с асимптотами $-\frac{3}{4}$ и 3

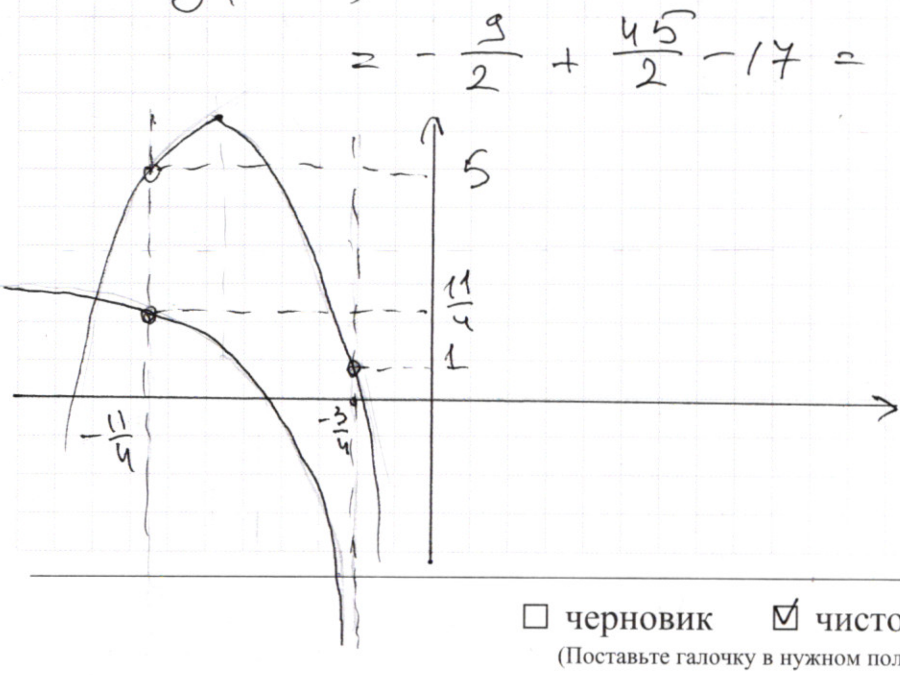
$f\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{11}{4}$

$g(x)=-8x^2-30x-17$ – график параболы с вершиной в $x_0=-\frac{15}{8}$; $y_0=\frac{89}{8}$ ветвями вниз: $g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{11^2}{4^2}+30\,\frac{11}{4}-17 =$

$$=-\frac{11^2}{2}+\frac{165}{2}-17 = 22-17=5$$

$$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-17 =$$

$$= -\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17 = 18-17=1.$$



→

(№6)

$\Rightarrow$ $ax+b$ – ~~у~~ это ~~его~~ уравнение прямой

! $ax+b$ проходит через точки $\left(-\frac{3}{4};1\right)$; $\left(-\frac{11}{4};5\right)$

$$\begin{cases} a\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+b=1 \rightarrow b=1+\frac{3}{4}a \\ a\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+b=5 \end{cases} \rightarrow -\frac{11}{4}a+1+\frac{3}{4}a=5$$

$$-2a=4$$

$$a=-2 \rightarrow b=1-\frac{3}{4}\cdot 2=$$

$$=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$y=-2x-\frac{1}{2}$ – касательная к графику $f(x)$

$\Downarrow$

$y=f(x) \Rightarrow -2x-\frac{1}{2}=\frac{12x+11}{4x+3} \rightarrow$ единственная возможная прямая которая лежит выше $f(x)$ и ниже $g(x)$ на $x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$

$$\rightarrow \left(-2x-\frac{1}{2}\right)(4x+3)=12x+11$$

$$-(4x-1)(4x+3)=24x+22$$

$$-(16x^2+12x-4x-3)=24x+22$$

~~$16x+36x$~~

$$-16x^2-8x+3=24x+22$$

$$16x^2+32x+19=0.$$

Ответ: $a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

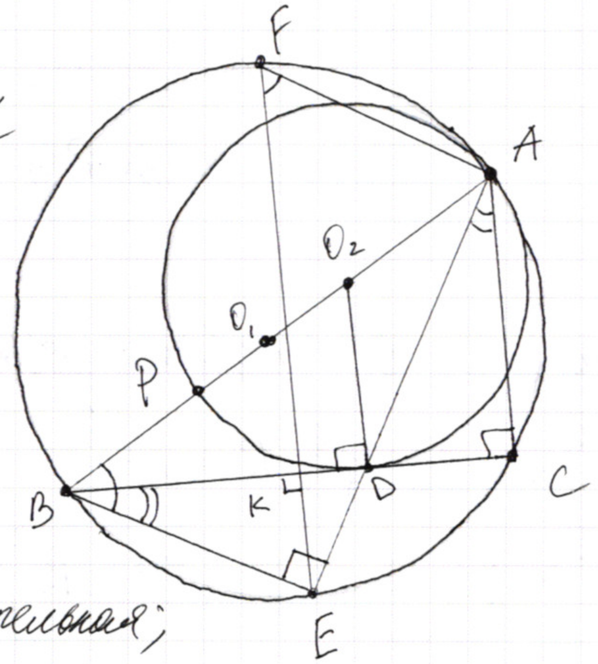
№4.

Дано: Ω; ω; AB - диаметр; $EF \perp BC$; $CD = 8$; $BD = 17$

Найти: R, r, $\angle AFE$, S_{AEF}

Решение:

1) т.к. A - точка касания окружностей, AB - диаметр $\Omega \to O_1 \in AB$, $O_2 \in AB$ (где O_1, O_2 - центры окружностей Ω и ω соответственно)



2) $O_2D \perp BC$, т.к. O_2D - радиус, BC - касательная;
$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. AB - диаметр

3) т.к. AB - секущая, BD - касательная к $\omega \Rightarrow$

$BP \cdot BA = BD^2$ (т.к. $BP = 2R - 2r$, $AB = 2R$)

$2R(2R - 2r) = 17^2$

4) $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ ($\angle ABC$ - общ, $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90^\circ$)

$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AC = \frac{r \cdot (CD + BD)}{BD} = \frac{r \cdot 25}{17}$

5) по теореме Пифагора $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow$

$4R^2 = \frac{r^2 \cdot 25^2}{17^2} + 25^2$

(N4)

6) Из (5) и (3) получаем систему:

$$\begin{cases} 4R^2 + 4Rr = 17^2 \\ 4R^2 = \dfrac{r^2 \cdot 25^2}{17^2} + 25^2 \end{cases}$$

Из того что $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$:

$$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50R - 25r = 34R$$

$$\cancel{50R4} \quad 16R = 25r$$

$$r = \frac{16}{25}R \quad (*)$$

Подставим (*) в первое уравнение системы:

$$4R^2 + 4R \cdot \frac{16}{25}R = 17^2$$

$$4R^2 + \frac{64}{25}R^2 = 17^2 \Rightarrow R^2\left(\frac{164}{25}\right) = 17^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{17^2 \cdot 25}{164}} = \frac{17 \cdot 5}{2\sqrt{41}} = \frac{85}{2\sqrt{41}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{16 \cdot 17 \cdot 5}{25 \cdot 2\sqrt{41}} = \frac{8 \cdot 17}{5\sqrt{41}} = \frac{136}{5\sqrt{41}}$$

7) $\angle AFE = \angle ABE$ (опираются на хорду AE)

8) $\angle EAC = \angle EBC$ (Опир на хорду EC)

9) $\angle BEA = \angle BCA = 90^\circ$ (AB - диаметр)

10) $\triangle ADC \sim \triangle EBD$ (из (8) и (9)) $\Rightarrow \dfrac{ED}{DC} = \dfrac{BD}{AD} \Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(№4)

$\Rightarrow ED = \dfrac{BD \cdot DC}{AD} = \dfrac{8 \cdot 17}{AD}$

11) $AC^2 = AB^2 - BC^2$ (для ΔABC теорем.)

$AC = \sqrt{4 \cdot R^2 - (BD+DC)^2} = \sqrt{4 \cdot \dfrac{17^2 \cdot 25}{164} - 25^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{17^2 \cdot 25 - 25^2 \cdot 41}{41}} = 5\sqrt{\dfrac{17^2 - 25 \cdot 41}{41}}$

12) $AD^2 = AC^2 + CD^2$

$AD = \sqrt{\dfrac{17^2 \cdot 25 - 25^2 \cdot 41}{41} + 64} = \sqrt{\dfrac{17^2 \cdot 25 + 561}{41}} \Rightarrow$

$\Rightarrow ED = \dfrac{8 \cdot 17 \cdot \sqrt{41}}{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561}}$

~~17~~ 13) $AE = ED + AD = \dfrac{8 \cdot 17 \cdot \sqrt{41}}{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561}} + \dfrac{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561}}{\sqrt{41}} =$

$= \dfrac{8 \cdot 17 \cdot 41 + 17^2 \cdot 25 + 561}{\sqrt{41(17^2 \cdot 25 + 561)}} = \dfrac{11801}{\sqrt{278226}}$

14) $\sin \angle EFA = \sin \angle EBA = \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AE}{2R} = \dfrac{11801 \cdot \sqrt{41}}{\sqrt{278226} \cdot 85} =$

$= \dfrac{11801}{\sqrt{6786} \cdot 85} \Rightarrow \angle EFA = \arcsin\left(\dfrac{11801}{\sqrt{6786} \cdot 85}\right)$

15) из $\triangle BED$: (№4) (EK - высота) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad EK \cdot BD = BE \cdot ED$$

$$BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} \;\Big|\Rightarrow EK = \frac{\sqrt{BD^2 - ED^2} \cdot ED}{BD} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{ED^2}{BD^2}} \cdot ED = \sqrt{1 - \frac{8^2 \cdot 17^2 \cdot 41}{(17^2 \cdot 25 + 561) \cdot 17^2}} \cdot \cancel{ED} \cdot$$

$$\cdot \frac{8 \cdot 17\sqrt{41}}{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561}} = \frac{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561 - 8^2 \cdot 41}}{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561}} \cdot \frac{8 \cdot 17\sqrt{41}}{\sqrt{17^2 \cdot 25 + 561}} =$$

$$= \frac{8 \cdot 17 \cdot \sqrt{6466} \cdot \sqrt{41}}{6786}$$

16) $KD^2 = ED^2 - EK^2 \Rightarrow KD = \sqrt{ED^2 - EK^2} =$

$$= \sqrt{\frac{8^2 \cdot 17^2 \cdot 41}{6786} - \frac{8^2 \cdot 17^2 \cdot 6466 \cdot 41}{6786^2}} = \frac{8 \cdot 17}{6786}\sqrt{41 \cdot 6786 -}$$

$$\overline{- 41 \cdot 6466} = \frac{8 \cdot 17}{6786}\sqrt{320 \cdot 41} = \frac{8^2 \cdot 17}{6786}\sqrt{205}$$

17) EF и BC - хорды $\Rightarrow EK \cdot KF = BK \cdot KC \Rightarrow$

$$\Rightarrow KF = \frac{(BD - KD)(CD + KD)}{EK}$$

18) Из $\triangle EFA$: $\frac{AE}{\sin\angle EFA} = \frac{EF}{\sin\angle EAF} \Rightarrow \sin\angle EAF =$

$$= \frac{EF}{AE}\sin\angle EFA = \frac{EK + KF}{AE} \cdot \sin\angle EFA$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N4)

(9) $\triangle EFA$

Мы знаем: $\angle EFA$, $\angle EAF$, EF, AE

теперь мы можем по теореме синусов найти сторону AF

$\cancel{AF^2}$ $AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot \cos\angle EFA$

А затем $S_{AEF} = \frac{1}{2} \sin\angle EFA \cdot EF \cdot FA$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

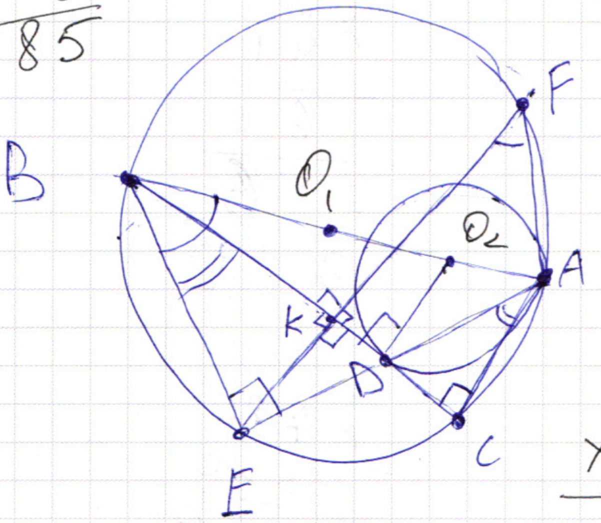
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 5 \\ \hline 85 \end{array}$$



Ω ω

$AB = D_\Omega$

$R, r, \angle AFE, S_{AEF}$

$CD = 8$

$BD = 17$

$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\frac{R-r}{2R} = \frac{17}{25}.$$

$$2R(2R-2r) = 17^2$$

$34R =$

$$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} \rightarrow \cancel{r = \frac{BD\cdot AC}{BC} = 17}$$

$$AC = \frac{BC\cdot r}{BD} = \frac{25\cdot r}{17}$$

$\triangle B\omega D \sim \triangle BAC$

$$(2R)^2 = 25^2 + AC^2 = 25^2 + \frac{25^2\cdot r^2}{17^2}$$

$$AD = \sqrt{DC^2 + AC^2}$$

$$\triangle ADC \sim \triangle BDE \rightarrow \frac{\cancel{AE}\ ED}{DC} = \frac{\cancel{AD}\ BD}{AD} \rightarrow$$

$$ED = \frac{BD\cdot DC}{AD}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}} = x.$$

$$\cancel{\cos\alpha} = \sin\alpha = \frac{AE}{2R} = \frac{AD+ED}{2R}$$

$x - 2x = -x.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{17^2 \cdot 25}{41} - 25^2 + 64.$

$625 - 64 = 561$

$561 : 3 = 187$

$17 \times 17 = 289$ (119, 17)

289×25: 1445, 578, 6225

$6225 + 561 = 6786$

6786×41: 6486, 27144, 278226

$41 \times 8 = 328$

328×17: 2296, 328, 5576

$5576 + 6225 = 11801$

$11801 : 41 = 28$ (82, 360, 328, 321)

64×41: 64, 256, 320

$6786 - 320 = 6466$

$11801 : 17 = 65$ (108, 100, 85, 151)

$85 \times 80 = 6800$

$85 + 90 = 650$

$6786 - 6466 = 320$

~~16 · 20~~

16 · 20

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}(\alpha) - ?$

$\boxed{\text{три значения}}$

$\Rightarrow$ ~~$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-}$~~

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

~~$\sin 2\alpha \sin 2\beta +$~~

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

I $-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} + \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad / \cdot \sqrt{5}$

$-\cos 2\beta + \sin 2\beta(2+\sqrt{5}) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

~~$\sin$~~

$\sqrt{1+4+4\sqrt{5}+5}\left(\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}\sin 2\beta - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}}_{\sin\gamma}\cos 2\beta\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\gamma = \arcsin\frac{1}{\sqrt{10+4\sqrt{5}}}$

$\sqrt{10+4\sqrt{5}}\ \sin(\gamma+2\beta)$

$121 \times 2 = 242$

330 | 2
2 | 165
13
12
10

165
121
44

$\frac{58}{4}$

11

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cancel{\cos} \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$2 \quad t<0 \Rightarrow t^{\log_{12}5} + t \geq \cancel{\ } -t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t + t^{\log_{12}13} \geq 0. \quad |:t.$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 + t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \leq 0.$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}\left(1 + t^{\log_{12}\frac{13}{5}}\right) + 1 \leq 0.$

$\frac{5^{\log_{12}t}}{12^{\log_{12}t}} + \frac{13^{\log_{12}t}}{12^{\log_{12}t}} + 1 \leq 0.$

$\frac{5^{\log_{12}t} \cancel{+} 13^{\cancel{\log_{12}t}} - \log_{12}t}{12^{\log_{12}t}} \geq -1.$

$5^{\log_{12}t} - 13^{\log_{12}t} \geq 12^{\log_{12}t}$

$5^a - 13^a \geq 12^a$

$+\begin{array}{r}144\\25\\\hline 169\end{array}$

3 4 5

9 16 25

$\sqrt{27}$ $\sqrt{64}$ $\sqrt{125}$

5 8 11

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x)$ $\qquad$ $g(x)$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17.$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9}{4x+3} + \frac{2}{4x+3} = \qquad \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

$$= 3 + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}$$

$$-8x^2-30x-17 = -(\quad)$$

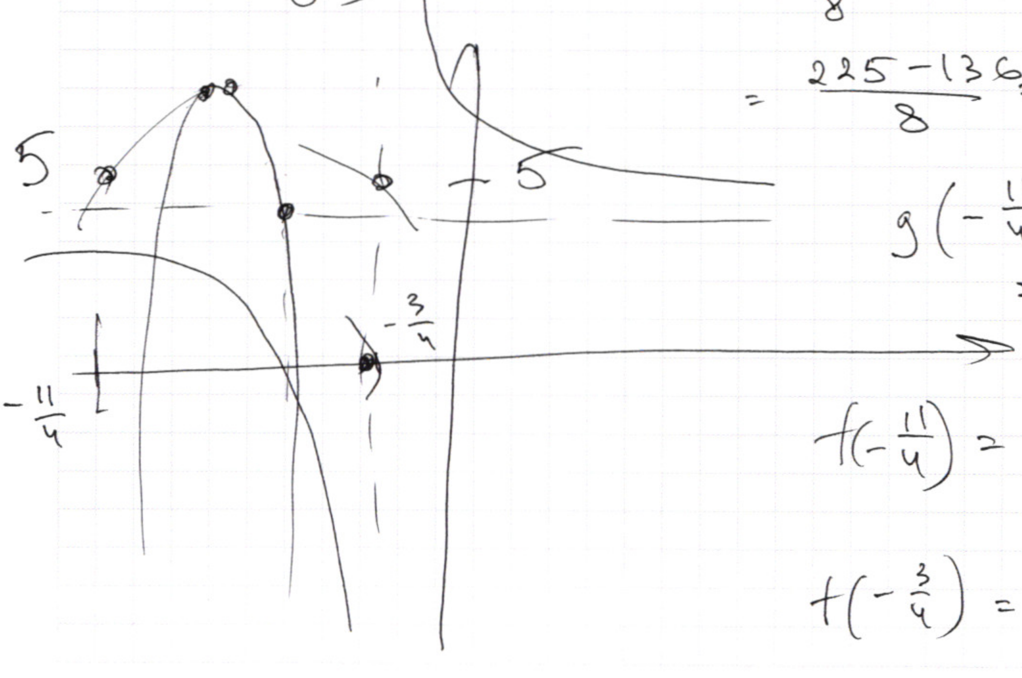
$$x_0 = -\frac{30}{2\cdot 8} = -\frac{15}{8} \Rightarrow y_0 = -8\cdot\frac{15^2}{8^2} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 =$$

$$= -\frac{15^2}{8} + \frac{450}{8} - 17 =$$

$$\times\begin{array}{r}17\\8\\\hline 136\end{array} \qquad -\begin{array}{r}225\\136\\\hline 89\end{array}$$

$$= \frac{450-225}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 =$$

$$= \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$$



$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{11^2}{4^2} + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 =$$

$$= -\frac{11^2}{2} + \frac{330}{4} - 17 = 22 - 17 = 5$$

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-\frac{12\cdot 11}{4}+11}{-\frac{11}{4}\cdot 4+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{-\frac{12\cdot 3}{4}+4}{-\frac{3}{4}\cdot 4+3}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (*) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (**) \end{cases}$$

$(*)$ $xy-x-2y+2 = x(y-1)-2(y-1)=(y-1)(x-2)$

$(**)$ $(x-2)^2+9(y-1)^2=12+9+4=25$

x^2-4x+4 $\quad 9(y^2-2y+1)$

$\cancel{4}\ 2+2$

Пусть $x-2=a$ $\quad y-1=b$.

$\boxed{x-2y=a-2b}$

$x-2-2y+2=x-2y$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad \uparrow 2 \Rightarrow a^2-4ab+4b^2=ab \Rightarrow a^2=5ab-4b^2 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$3ab+5b^2=25.$

$a^2-5ab+4b^2=0 \quad /:b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$ $\qquad$ $b=0$ — роверить

$t^2+5t+4=0.$

$D=25-16=9 \quad \rightarrow \quad t=\frac{-5\pm 9}{2}=\left[\begin{array}{l} 2 \\ -7 \end{array}\right.$

$\times 13$
13
39
13

4. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

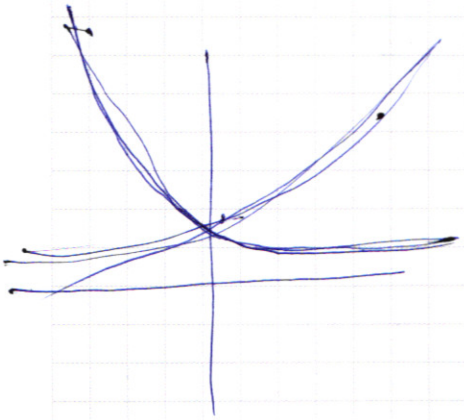
$\exists$ $x^2+18x=t$

$t^{\log_{12}5}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

1. $\cancel{t<0}$ $t\geq 0 \Rightarrow t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0.$

$t\left(t^{\log_{12}5-1}-t^{\log_{12}13-1}+1\right)\geq 0.$



$\log_{12}5-1=\log_{12}5-\log_{12}12=\log_{12}\frac{5}{12}.$

$\log_{12}\frac{13}{12}.$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \geq -1.$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}\left(1-t^{\log_{12}\frac{13}{12}-\log_{12}\frac{5}{12}}\right)\geq -1.$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}\left(1-t^{\log_{12}\frac{13}{5}}\right)\geq -1$

1. $t>1$ $0<t^{\log_{12}\frac{5}{12}}<1.$ $1-t^{\log_{12}\frac{13}{5}}<0$?

2. $\boxed{t=1.}$ – ok $\Rightarrow$

3. $t\in(0;1)$ – ok.

$t=0$ – ok

x^2

$xy-x-2y+2>0.$

$(y-1)(x-2)>0.$

$y>1$ $x>2.$