МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

√ 3. √ [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

√ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x-12y\geq 0 \\ 2xy-12y-x+6\geq 0. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

~~[illegible]~~

$$\begin{cases} (x-12y)^2 = 2y(x-6)-(x-6) \\ (x-6)^2+(6y-3)^2-90=0 \end{cases}$$

Произведём замену: $u=2y-1$, $v=x-6$, тогда уравнение примет вид:

Запишем ОДЗ также в терминах u, v:

$$\begin{cases} (v-6u)^2=uv \\ v^2+9u^2-90=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v-6u\geq 0 \\ uv\geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} v^2-13uv+36u^2=0 \\ v^2+9u^2-90=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (v-9u)(v-4u)=0 \\ v^2+9u^2-90=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=9u \\ 81u^2+9u^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} v=4u \\ 16u^2+9u^2=90 \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=9u \\ \left[\begin{array}{l} u=1 \\ u=-1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} v=4u \\ \left[\begin{array}{l} u=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ u=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=9 \\ u=1 \end{cases} \\ \begin{cases} v=-9 \\ u=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} v=\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ u=\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} v=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ u=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Отберём корни, подходящие под ОДЗ.

$\begin{cases} v=9 \\ u=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 9-6=3 \geq 0 \\ 9 \cdot 1 = 9 \geq 0 \end{matrix}$ - подходит.

$\begin{cases} v=-9 \\ u=-1 \end{cases} \rightarrow -9+6=-3<0$ - не подходит.

$\begin{cases} v=\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ u=\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \frac{12\sqrt{10}}{5}-6\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}=-\frac{6\sqrt{10}}{5}<0 \\ \frac{12\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}=\frac{360}{25}\geq 0 \end{matrix}$ - не подходит.

$\begin{cases} v=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ u=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} -\frac{12\sqrt{10}}{5}+\frac{18\sqrt{10}}{5}=\frac{6\sqrt{10}}{5}\geq 0 \text{ подходит.} \\ -\frac{12\sqrt{10}}{5}\cdot -\frac{9\sqrt{10}}{5}=\frac{360}{25}\geq 0 \end{matrix}$ - подходит.

Возврат к x,y:

$\begin{cases} x=v+6 \\ y=\frac{u+1}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$

Ответ: $\left\{(15,1), \left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}, \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$ и ~~[illegible]~~.

Значит на промежутке ОДЗ $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$.

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 (10x - x^2)}.$$

Введём замену $y = 10x - x^2$, нер-во примет вид:

$$y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 (y)}$$

Так как левая и правая части неотрицательны, то равносильно:

$$3^y \cdot (3^y)^{\log_3 4} \geq (3^5)^{\log_3 y}$$

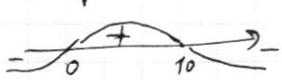
$$\Updownarrow$$

$$3^y \cdot 4^y \geq y^5$$

$$\Updownarrow$$

$$12^y \geq y^5$$

Справа и слева монотонно возрастающие функции, причем скорость роста левой больше. В первой точке y, принадлежащей ОДЗ неравенство уже будет выполняться (т.к. в 0 - первой, не принадлежащей, - выполняется ($12^0 \geq 0^5$ $(1 \geq 0)$)). Значит неравенство выполняется на всём ОДЗ.



$$10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(10 - x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 10)$$

Ответ: $(0, 10)$.

№5.

Посчитаем значение $f(x)$ для всех x, $2 \le x \le 25$.

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 3f(2) = 0$

$f(9) = 2f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 3$

$f(12) = f(6) + f(2) = 0$

$f(13) = 4$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 4f(2) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 3$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(2) + f(12) = 0$

$f(25) = 2f(5) = 2$

Кол-во 0-вых значений: 10

Кол-во 1 значений: 7

Кол-во 2 : 1

Кол-во 3 : 2

Кол-во 4: 3

Кол-во 5: 1.

Рассмотрим нашу функцию:

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

$f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Кол-во способов выбрать $2 \le x \le 25$, $2 \le y \le 25$, чтобы это выполнялось:

$7 \cdot 10 + 1 \cdot 17 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 23 = 196$

Ответ: 196.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

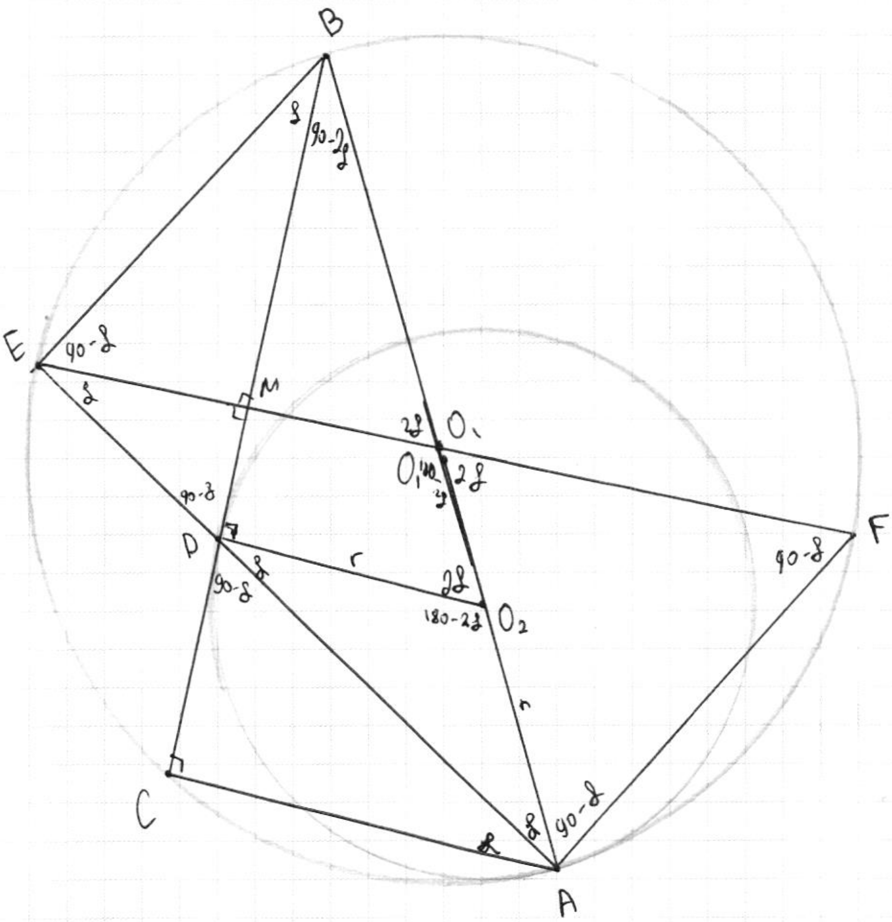
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



1) $\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опирается на AB - диаметр.

2) $\angle AEB = 90^\circ$, т.к. опирается на AB.

3) $\angle DAO_2 = \delta \Rightarrow \angle ADO_2 = \delta$ (р/б $\triangle$, т.к. $O_2D = O_2A = r$ (окружность ω)).

$\angle DO_2A = 180 - 2\delta$

$\angle CDA = 90 - \delta$ ($O_2D \perp BC$ - радиус и касательная).

$\angle CAD = 90 - (90 - \delta) = \delta$.

$\angle EDB = \angle CDA = 90 - \delta$ - вертикальные

$\angle AEF = 90^\circ - (90 - \delta) = \delta$.

$\cancel{\angle AEB} = \angle BEF = \cancel{90}\angle AEB - \delta = 90 - \delta$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle BEF$ и $\angle BAF$ - вписанные в Ω, опираются на одну дугу
$\Rightarrow \angle BEF = \angle BAF = 90 - \delta$.

Значит $\angle EAF = 90° \Rightarrow EF$ - диаметр Ω.

$\triangle DBO_2 \sim \triangle CBA \Rightarrow \dfrac{AC}{r} = \dfrac{BC}{BD} = \dfrac{16}{\left(\frac{17}{2}\right)} = \dfrac{32}{17}$.

$$tg\,\delta = \frac{CD}{AC} = \frac{15}{2} : \frac{32}{17} r = \frac{15 \cdot 17}{64 r}$$

$$tg(2\delta) = \frac{2\,tg\,\delta}{1 - tg^2\delta} = \frac{\frac{15 \cdot 17}{32 r}}{\frac{64 \cdot 64 r^2 - (15 \cdot 17)^2}{64^2 r^2}} = \frac{15 \cdot 17 \cdot 128 r}{(64 r)^2 - (15 \cdot 17)^2}.$$

$$ctg\, 2\delta = \frac{2r}{17} = \frac{1}{tg\, 2\delta}.$$

$$\frac{2r}{17} = \frac{(64 r)^2 - (15 \cdot 17)^2}{15 \cdot 17 \cdot 128 r}$$

$$15 \cdot 256 r^2 = (64 r)^2 - (15 \cdot 17)^2$$

$$256 r^2 (16 - 15) = (15 \cdot 17)^2$$

$$\underbrace{r = \frac{15 \cdot 17}{32} = \frac{255}{32}}$$

$$AC = \frac{32}{17} r = \frac{32 \cdot 255}{32 \cdot 17} = 15.$$

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$225 = 4R^2 - 16^2$$

$$4R^2 = 481$$

$$\underbrace{R = \frac{\sqrt{481}}{2}}$$

$$tg\,\delta = \frac{15 \cdot 17 \cdot 32}{64 \cdot 15 \cdot 17} = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta = arctg\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \angle AFE = 90 - \delta = 90 - arctg\,\frac{1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$tg(2\delta) = \frac{17}{2r} = \frac{17 \cdot 32}{2 \cdot 15 \cdot 17} = \frac{16}{15}.$$

$\sin(2\delta) = x$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{16}{15}.$$

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{256}{225}$$

$$225x^2 = 256 - 256x^2$$

$$481x^2 = 256$$

$$x = \frac{16}{\sqrt{481}} = \sin 2\delta$$

$$\Rightarrow S(AFE) = S(AO_1F) + S(AO_1E) =$$

$$= \frac{R \cdot R \cdot \sin 2\delta}{2} + \frac{R \cdot R \cdot \sin(180° - 2\delta)}{2} =$$

$$= R^2 \cdot \sin 2\delta = \frac{\sqrt{481}}{2} \cdot \frac{16}{\sqrt{481}} = 8.$$

Ответ: $r = \frac{255}{32}$; $R = \frac{\sqrt{481}}{2}$; $\angle AFE = 90° - arctg\frac{1}{2}$; $S(AFE) = 8$.

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$CD = \frac{13}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

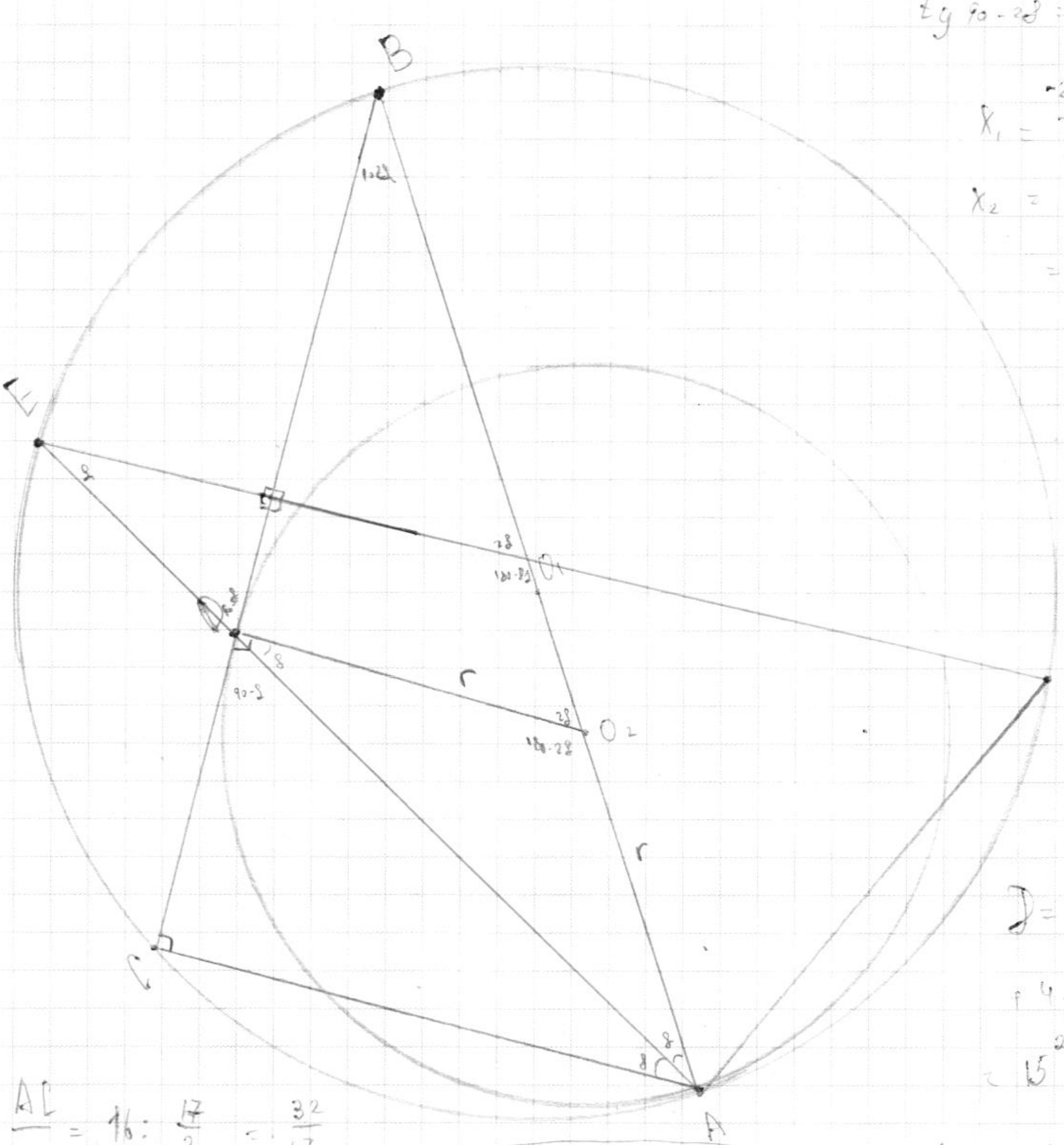
$\sin(2a+2b)$ r, R; $\angle AFE$ $S(AEF)$ №1.

Благодаря r - знаем $tg\,\delta$. $R = f(r)$ $BC = 16$

$tg(90-2\delta) = \frac{\cos 2\delta}{\sin 2\delta} = ctg\, 2\delta$

$x_1 = \frac{-256\cdot 15 \pm 13\cdot 128\sqrt{293}}{2\cdot 64\cdot 64}$

$x_2 = \frac{-30 + 13\sqrt{293}}{64}$



$+\frac{289}{4}$

293

$2\cdot 64 = 128$

$D = 256\cdot 256\cdot 15\cdot 15 +$

$+ 4\cdot 64\cdot 64\cdot 15\cdot 17\cdot 15\cdot 17 =$

$= 15^2\cdot 128^2\cdot (4 + 17^2) =$

$\frac{AC}{r} = 16 : \frac{17}{2} = \frac{32}{17}$

$AC = \frac{32}{17}r$

$\boxed{tg\,\delta = \frac{15}{2} : \frac{32}{17}r = \frac{15\cdot 17}{64r}}$ $ctg\,\delta = \frac{64r}{15\cdot 17}$

$tg(90-2\delta) = r : \frac{17}{2} = \frac{2r}{17} = ctg(2\delta)$

$x = \frac{15\cdot 17}{64r}$

$ctg\,2\delta = \frac{1}{tg\,2\delta} = \frac{1 - tg^2\delta}{2\,tg\,\delta}$

$\frac{1-x^2}{2x} =$ $\cancel{\frac{64r}{15\cdot 17} = 1 - \frac{15\cdot 17}{}}$ $\frac{2r}{17} = \frac{1 - \frac{(15\cdot 17)^2}{64^2 r^2}}{2\cdot\frac{15\cdot 17}{64r}}$

$4\cdot\frac{15\cdot \cancel{17}}{64r} = 17\cdot\frac{64^2r^2 - (15\cdot 17)^2}{64^2 r^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

$\cancel{f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) < 0}$

$\cancel{f(x) + f(y)}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = \alpha_1 f\left(\frac{1}{p_1}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{1}{p_2}\right) + \ldots + \alpha_n f\left(\frac{1}{p_n}\right) =$

$= -\alpha_1 f(p_1) - \alpha_2 f(p_2) - \ldots - \alpha_n f(p_n)$

$f(2) = [2/4] = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$ 4

$f(17) = 4$ $23 - 2 + 3 + 24$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5.$

Найти числа x, y что $f(x) < f(y)$

$f(4) = 2f(2)$

$f(6) = f(2) + f(3)$

$f(8)$

$f(x) < f(y) \Rightarrow$

11 + 6 - 19

$f(2) = 0$ | $f(8) = 0$ | $f(13) = 3$
$f(3) = 0$ | $f(9) = 0$ | $f(14) = 1$
$f(4) = 0$ | $f(10) = 1$ | $f(15) = 1$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$ | $f(11) = 2$ | $f(16) = 0$
$f(7) = 1$ | $f(12) = 0$ | $f(17) = 4$
$f(18) = 0$ | $f(21) = 1$ | $f(24) = 0$
$f(19) = 4$ | $f(22) = 2$ | $f(25) = 2$
$f(20) = 1$ | $f(23) = 5$

кол-во 0 10

17 + 9 = 40

22 + 9 = 44

кол-во 1 8

кол-во 2 3

7

кол-во 3 1

кол-во 4 2

кол-во 5 1

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 45 + 45$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x-12y)=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0\end{cases}$$

ОДЗ $x-12y\geq 0;\ 2xy-12y-x+6\geq 0$

$144-36=108$

404

$36\cdot 13=468$

$6\cdot 24\cdot 8=192$

$108\cdot 4=432$, $432-192=240$

$$\begin{cases}x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6\\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0\end{cases}$$

$48=6\cdot 8$

$108y^2+12x+36y+45-24xy=2xy-12y-x+6$

$108y^2+13x+48y-26xy+39=0$

$108y^2+2y(13x+24)+13(x+3)=0$

$108:2=54:2$ $\quad 6\cdot 9\cdot 2=$

$\frac{240}{2}=120.$ $\quad 12\cdot 9$

$D=4(169x^2+2\cdot 24\cdot 13x+24^2)-108\cdot 13\cdot 4(x+3)=$

$48=6\cdot 6\cdot 8\cdot 1$

$108=6\cdot 9\cdot 2\cdot 13\cdot 6\cdot 2.$

$=26^2x^2+8\cdot 24\cdot 13x+48^2-108\cdot 13\cdot 4x-108\cdot 13\cdot 12=$

$=26^2x^2+13(8\cdot 24-108\cdot 4)x+6^2(64-9\cdot 2\cdot 13\cdot 2)=$

$=26^2x^2+13\cdot 240x+36\cdot 404=0.$

$404=2\cdot 202=4\cdot 101=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$(x-12y)^2 = x(2y-1) - 6(2y-1)$

$$\begin{cases} (x-12y)^2 = (x-6)(2y-1) \\ (x-6)^2+(6y-3)^2-90=0 \end{cases}$$

$(x-12y)^2=(x-6)(2y-1)$ $\quad u=2y-1$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$ $\quad v=x-6$

$36=4\cdot 9$ $\quad x-12y=v-6u$

$$\begin{cases} (v-6u)^2=vu \\ v^2+9u^2=90 \end{cases}$$

$v^2-13uv+36u^2=0$

$(v-9u)(v-4u)=0$

$$\begin{cases} v^2-\cancel{12}uv+36u^2=uv \\ v^2+9u^2-90=0 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{90}{25}}=\sqrt{\frac{18}{5}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$-32\cdot\frac{1}{4}=-8+18-3$

$16\cdot\frac{1}{2}=8-16=\frac{8}{3}=2$

12^{24}

$24^{9}=12^{16}$

$-2+9-3=4$

$4\cdot\frac{1}{2}=2$

$77+36+60+23=$

$\frac{4-16}{-4}=$

$=100+96=196$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le -32x^2+36x-3$

$x=1:\quad 0\le a+b\le 1$

$x=\frac{1}{4}\quad 3\le \frac{1}{4}a+b\le 4$

$\frac{16x-16}{4x-5}+1=-32x^2+36x-3$

$\frac{20x-21}{4x-5}=-32x^2+36x-3$

$20x-21=$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6.

$\frac{16x+16}{4x-5} \le ax+6 \le -32x^2+36x-3$ $x \in \left[\frac{1}{4}; 3\right]$

$32 = 4 \cdot 8$

$-32x^2+36x-3=y$

$-(32x^2-36x+3)=$

$=-($

$6^4-4\cdot3\cdot2^5$

$x_1=$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+6$

$=6(6^3-2^6)$

$x_2=$ $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$

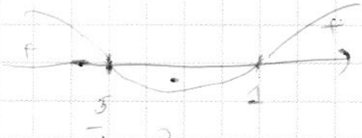
$=6(2^3\cdot3^3-2^6)$

$=6\cdot8(3^3-8)$

$=48(19)=$

$=2^4\cdot3\cdot19$

$\frac{16(x-1)}{4x-5}$



при $x=1$ вид:

$\boxed{0 \le a+6}$

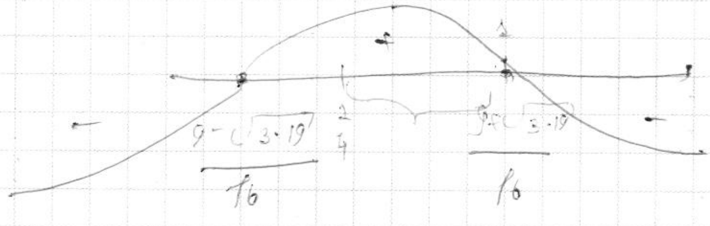
$x_1 = \frac{36+4\sqrt{3\cdot19}}{2\cdot32} = \frac{9+\sqrt{3\cdot19}}{16}$

$x_2 = \frac{36-4\sqrt{3\cdot19}}{2\cdot32} = \frac{9-\sqrt{3\cdot19}}{16}$

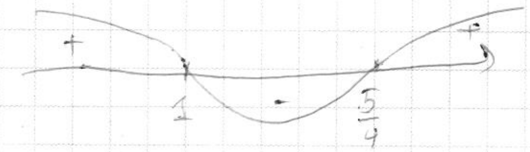
$7<\sqrt{57}<8$

$4+\frac{4}{4x-5}$

$9+8\sqrt{3\cdot19}$



$x \in \left(\frac{1}{4},\right.$



$16x-16 \mid 5-4x$

$\frac{16-16x}{5-4x} \le ax+6$

$0 \le 4\left(1-\frac{1}{5-4x}\right) \le 3$

$\frac{r}{AC} = \frac{AC}{r} =$

$16-16x \le 5ax$

$\frac{64}{4}=16$

$64 \cdot 4 = 256$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

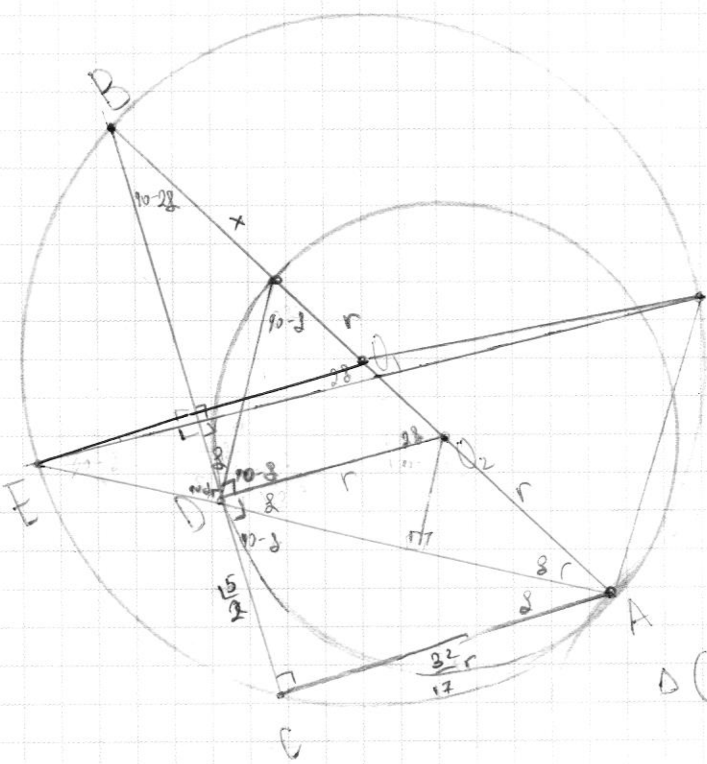
$R, r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S(\triangle AEF) - ?$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$



1) O_2, O_1 лежат на AB

2) $\angle ACB = 90°$, тока опирается на диаметр.

$AD^2 = r^2 + r^2 - 2$

$D(x+r, r, \frac{15}{2})$

$\frac{r}{AC} = \frac{15}{2} : \frac{17}{2} = \frac{15}{17}$

O_2

$AC = \frac{17}{15} r$

$AD^2 = \frac{225}{4} + \frac{289}{225} r^2$

$\frac{AD^2}{4} = \cos\beta \cdot r$

$\cos\beta = \frac{15^4 + 17^2 \cdot 4r}{4 \cdot 225 r}$

$BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$AB = 2R$

$\frac{180-2\beta}{2} = 90-\beta$

$AC^2 = 4R^2 - 16$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = x(x+2r)$

$R = \frac{x+2r}{2}$

$\cancel{BD^2 = r^2 + (x+r)^2}$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = x \cdot (x+2r)$

$\cancel{r^2 + x^2 + 2rx + r^2 = x^2 + 2rx}$

$\cancel{x+r = R}$ $R = \frac{x+2r}{2}$

$\frac{AC}{r} = 16 : \frac{17}{2} = \frac{32}{17} r$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Черновик

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$\begin{cases} a+b\geq 0 \\ a+b\leq 1 \\ 0{,}25a+b\geq 3 \\ 0{,}25a+b\leq 4 \end{cases}$$

$a+b=1$

$b=1-a$

$\frac{1}{4}a+b=3$

$b=3-\frac{1}{4}a$

$\underline{0\leq a+b\leq 1}$

$$10x+|a|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(-a)}$$

$x(10-x)$

ОДЗ: $-a>0$; $-a\neq 1$

$x\in$

$$|a|^{\log_3 4} \geq a+5^{\log_3(-a)}$$

$x^2-10x+1=0$

$D=100-4=96$

$x\in(0,10)$

$x\in(0,4\sqrt6-5)\cup(4\sqrt6-5,10)$ ОДЗ

$a=10x-x^2$

$2\cdot3\cdot2^4$

$x_1=\frac{-10+4\sqrt6}{2}=-5+4\sqrt6$

$x_2=\frac{-10-4\sqrt6}{2}=-5-4\sqrt6$ нет

$\underline{3\leq\frac{1}{4}a+b\leq4}$

$$a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}$$

$$3^a\cdot(3^a)^{\log_3 4}\geq(3^5)^{\log_3 a}$$

$a\in[0,25]$ $(10x-x^2)'$

$10-2x=0$

$$3^a\cdot\left(3^{\log_3 4}\right)^a\geq\left(3^{\log_3 a}\right)^5$$

$a\in(0,1)\cup(1,25$

$\boxed{x=5}$

$50-25=25$

$3^a\cdot4^a\geq a^5$

$12^a\geq a^5$

$2^7x^3-2^4\cdot19x^2+2^4\cdot13x-31$

$$16-16x\leq(-32x^2+36x-3)(5-4x)$$

$$16-16x\leq-160x^2+128x^3-144x^2+180x-15+12x$$

$$128x^3-304x^2+208x-31\geq0$$

$\lg(28)=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

№1

$$\begin{cases} \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2a+4b) + \sin(2a) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$tg\, a - ?$

$2\sin(a+b)\cos(a+b) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(a+2b)\cos(a+2b)$ $\boxed{+2\sin a\cos a} = -\frac{2}{5}$

$\sin(a+b)\cos(a+b) = -\frac{1}{2\sqrt5}$

$\sin(a+2b)\cos(a+2b) =$

$\sin(2a+4b) = \sin(2a+2b)\cos 2b + \cos(2a+2b)\sin 2b + \sin 2a = -\frac{2}{5}$

$-\frac{\cos 2b}{\sqrt5} + \cos(2a+2b)\sin 2b + \sin 2a = -\frac{2}{5}$

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5}$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 4.5 \end{cases}$$

$36 : 2 = 18$

$36 + 9 = 45$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 0 \ (1) \\ x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \ (2) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$x = 6$

$y = \frac{1}{2}$ — из 1-го — проверим подходят ли под 2-е системы

$6 - 6 = \sqrt{6 - 6 - 6 + 6}$

$0 = \sqrt0$ — верно.

$\Rightarrow$ Ответ: $\left(6, \frac{1}{2}\right)$

$60 = \frac{64r^2 - (15\cdot17)^2}{64r^2}$

$64r^2($

№3

$$\begin{cases} \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$tg\, a - ?$ $x = 2a,\ y = 2b$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(x+2y) + \sin(x) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\frac{\sin(y)}{\sqrt5} + \frac{\cos(y)}{\sqrt5} + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos(x+y) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos(x+y) = \frac{2}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)