МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

+++−

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ 3(x^2-2x+1)+3(y^2-\frac{4}{3}+\frac{4}{9})=4+3+\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cancel{3y-2x} \Rightarrow 3(y-\frac{2}{3})-2(x-1)=\sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

Пусть $(y-\frac{2}{3})=a$

$(x-1)=b$, тогда

$$\begin{cases} 3a-2b=\sqrt{3ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2-15ab+4b^2=0 \quad (1) \\ 3a-2b\geq 0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

Решим (1):

$\cancel{9a^2}$ $4b^2-15ab+9b^2=0$ (относ b)

$D=225a^2-9\cdot4\cdot4a^2=(225-144)a^2=81a^2$

$\Downarrow$

$$b=\frac{15\pm9}{8}a \begin{matrix} =3a \\ =\frac{3}{4}a \end{matrix}$$

1 случ) $b=3a$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 3a-6a\geq 0 \\ a^2+9a^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\leq 0 \\ 10a^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow a=-\sqrt{\frac{5}{18}}=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow b=3a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Обратная замена

$a = y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b = x - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

2 случ.) $b = \frac{3}{4}a$

$\Downarrow$

$\begin{cases} 3a - \frac{3}{2}a \geq 0 \\ a^2 + \frac{9}{4}a^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ \frac{13}{4}a^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \frac{3}{4}a = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Обратн. замена:

$a = y - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{13}} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + \frac{10}{3}\sqrt{\frac{1}{13}}$

$b = x - 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{13}}$

Ответ: $\left(1 - \sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \cup \left(1 + \frac{5}{2\sqrt{13}}, \frac{2}{3} + \frac{10}{3\sqrt{13}}\right)$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow \underline{f(1) = 0}$

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(a) = f(ab) - f(b)$

$\Downarrow$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\cdot y\right) - f(y) = f(1) - f(y) = -f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Найдем чему равно $f(t)$ при $t \in [3; 27]$

☐ черновик ☒ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2)=f(3)=0$ (из-за $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$)

- $f(3)=0$
- $f(4)=2f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

- $f(6)=f(3)+f(2)=0$

$f(7)=1$

- $f(8)=0$
- $f(9)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

- $f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

- $f(16)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

- $f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=f(10)+f(2)=2$

$f(23)=5$

- $f(24)=0$

$f(25)=2f(5)=2$

$f(26)=f(13)+f(2)=3$

- $f(27)=0$

1) при $f(x)=0$

$f(y)$ должно быть >0

(возможных x : $N_{1x}=10$)

возможных y : $N_{1y}=15$)

$\Downarrow$

$N_1=N_{1x}\cdot N_{1y}=150$

2) при $f(x)=1 \Rightarrow f(y)>1$

$\Downarrow$

(возможных x : $N_{2x}=7$

возможных y : $N_{2y}=8$)

$\Downarrow$

$N_2=N_{2x}\cdot N_{2y}=56$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

3) при $f(x)=2$ (~~возможн~~ $x: N_{3x}=3$

$\Downarrow$ возможн $y: N_{3y}=5$)

$f(y)>2$

$\Downarrow$

$N_3 = N_{3y}\cdot N_{3x} = 15$

4) при $f(x)=3$

$N_4 = 2\cdot 3 = 5$

5) при $f(x)=4$

$N_5 = 2\cdot 1 = 2$

$\Downarrow$

$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 150+56+15+5+2 = 150+78 =$

$= 228$

Ответ: 228

№ 6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

Рассмотрим 2ое нер-во:

$ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\Downarrow$

$f(x)=8x^2-\cancel{34}(34+a)x+30-b \leq 0$

парабола ветвями вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ чтобы выполнялось на промежутке:

$f(1)\leq 0 \Rightarrow 8+34+a+30-b\leq 0 \quad 72+a-b\leq 0 \quad (1)$

$f(3)\leq 0 \Rightarrow 216+102+3a+30-b\leq 0 \Rightarrow 348+3a-b\leq 0 \quad (2)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим первое н-во

$$\frac{4x-3}{3x-2} \geq ax+b$$

т. к. нас интересует промежуток $x \in [1;3]$, то

$x > 1 \Rightarrow 2x-2>0$

$\Downarrow$

$$4x-3 \geq (2x-2)(ax+b)$$

$$4x-3 \geq 2ax^2+2xb-2ax-2b$$

$$g(x)=2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0$$

1) $a>0$

$\Downarrow$

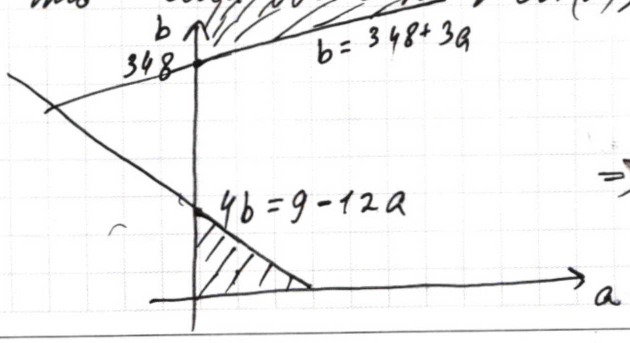
~~это~~ $g(x)$ - парабола ветв вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $g(1) \leq 0 \Rightarrow 2a+2b-2a-4-2b+3 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0 \Rightarrow$ всегда выполняется

$g(3) \leq 0$ $\quad 18a+6b-6a-12-2b+3 \leq 0$

$$12a+4b-9 \leq 0 \ (3)$$

при $a>0$, очевидно что если выполняется (2), то выполняется и (1)



$\Rightarrow$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

$\Rightarrow$ из графика видно, что точек, которые удовлетворяют (1) и (3) - нет

2) $a = 0$

$\Downarrow$

$b \geqslant 348$

$m(x) = (\underset{\overset{\vee}{0}}{2b - 4})x - 2b + 3 \leqslant 0$

прямая с коэф. наклона > 0

$\Downarrow$

$m(3) \leqslant 0 \Rightarrow 6b - 12 - 2b + 3 \leqslant 0$

$4b \leqslant 9$

$\Downarrow$

таких b - нет

3) $a < 0$, тогда $g(x)$ - парабола ветвями вниз

$\Downarrow$

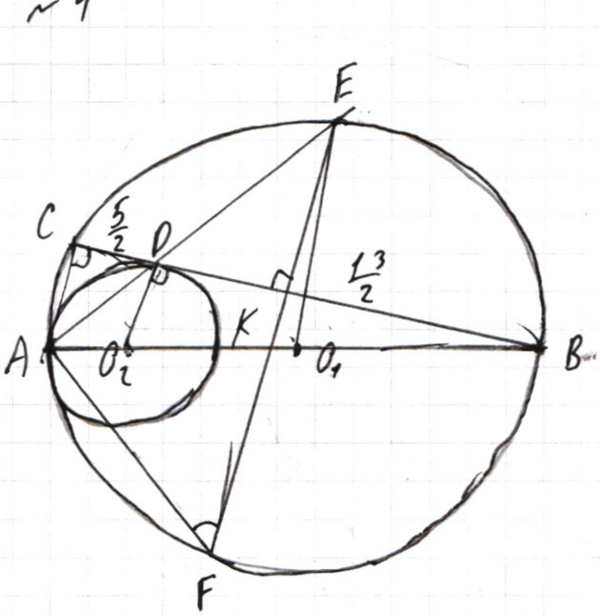
2 подслучая:

1') $\begin{cases} x_в < 1 \\ g(1) \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a + 4 - 2b}{4a} < 1 \\ 12a + 4b \leqslant 9 \end{cases} \Rightarrow$ т.к. $a<0$ $\begin{cases} 2a + 4 - 2b > 4a \\ 12a + 4b \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b + a < 2 \\ 12a + 4b \leqslant 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b < 2 - a \\ b \leqslant \frac{9}{4} - 3a \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано: Ω-окр; ω-окр
Ω-кас (внутр) ω = A
AB-диаметр Ω; BC-хорда Ω;
BC-кас ω = D; $AD \cap \Omega = E$;
прямая $\ell \perp BC$; $E \in \ell$; $\ell \cap \Omega = F$;
$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$
Найти: $R_\Omega = R$; $R_\omega = r$; $\angle AFE$
S_{AEF}

Решение:

1) $\angle ACB$ - прямой (опир на диаметр)
$\angle O_2DB$ - прямой (радиус в т кас) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_2DB$ $\left(\begin{matrix} \angle ACB = \angle O_2DB = 90 \\ \angle CBA = \angle DBO_2 \text{ (общ)} \end{matrix}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_2B}{AB} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{DB}{CB} = \frac{13}{13+5} = \frac{13}{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \frac{13}{18} = \frac{5}{18} = \frac{r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{9}{5}r \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$

2) по т о сек и кас $\Rightarrow AB \cdot BK = BD^2$ $(AB \cap \omega = K)$
$\| \quad AK = 2r = \frac{10}{9}R \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{A} \in O_1B$

$(2R-2r)2R = BD^2$

$4\left(R-\frac{5}{9}R\right)R = BD^2$

$16R^2 = 9BD^2$

$R^2 = \frac{9}{16}BD^2 \Rightarrow R = \frac{3}{4}BD = \frac{3}{4}\cdot\frac{13}{2} = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{5}{9}R = \frac{65}{24}$

3) $2\angle DAK = \angle DO_1K$ (впис и центр в окр w)

$\angle EO_1B = 2\angle EAB = 2\angle DAK = \angle DO_1K$ (впис и центр в Ω)

$\Downarrow$

$\triangle AEO_1 \sim APO_2$ $\left(\begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \angle AO_2D = 180 - \angle DO_2K = 180 - \angle EO_1B = \angle AO_1E \end{array} \right)$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} \Rightarrow AD = \frac{r}{R}AE \Rightarrow ED = \frac{R-r}{R}AE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{r}{R-r} = \frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{5}{9}} = \frac{5}{4}$

4) т.к. CB и AE - две ∩ хорды, то

$AD\cdot DE = CD\cdot DB = \frac{65}{4}$

$\Downarrow$

$\frac{5}{4}DE^2 = \frac{65}{4} \Rightarrow DE^2 = 13 \Rightarrow DE\sqrt{13}$

$\Downarrow$

$AE = \frac{R}{R-r}DE = \frac{1}{1-\frac{5}{9}}DE = \frac{9}{4}DE =$

$= \frac{9}{4}\sqrt{13} \Rightarrow$

5) по т. синусов для AEF:

$2R = \frac{AE}{\sin\angle AFE} \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{2\cdot\frac{39}{8}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

пусть $t=x^2+6x$, $t\geq 0$, тогда

$$3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5}$$ при $t=1$:

$3^0+1\geq 1$

$2\geq 1$ - выполн

$$t^{(\log_t 3)\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$t\neq 1$ $$t^{\frac{\log_t 3}{\log_t 4}}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$$\underset{\vee\atop 0}{t^{\log_4 3}}\left(1+t^{1-\log_4 3}-t^{\log_4 5-\log_4 3}\right)\geq 0$$

при $t>0$ $\Rightarrow$ $$1+t^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq \cancel{\log}\, t^{\log_4 \frac{5}{3}}$$

Заметим, что т.к. $\log_4 \frac{5}{3} > \log_4 \frac{4}{3}$, то правая часть всегда растет быстрее левой $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ один корень. Заметим, что $t=16$ - корень

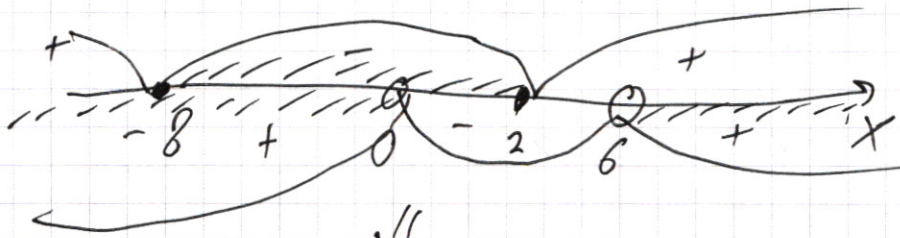
$\left(1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}\right) \Rightarrow$ при $t>16$ - нер-во не выполн

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

, а при $t \le 16$ - выполн

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2+6x \le 16 \\ x^2+6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+8) \le 16 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$$



$\Downarrow$

$x \in [-8;0)$

Ответ: $x \in [-8;0)$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\Downarrow$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $(tg 2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg 2\alpha = 0 \Rightarrow$ $2\alpha = \pi k$ $\Downarrow$ $\alpha = \frac{\pi k}{2} \Rightarrow (\alpha \ne \frac{\pi}{2}+\pi k)$

$\Rightarrow tg\alpha = 0$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $(tg\,2\alpha)\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\frac{1}{2}$

$4tg^2\alpha - 4tg\alpha - 1 = 0$

$D = 16+16 = 32$

$\Downarrow$

$tg\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\{0;\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

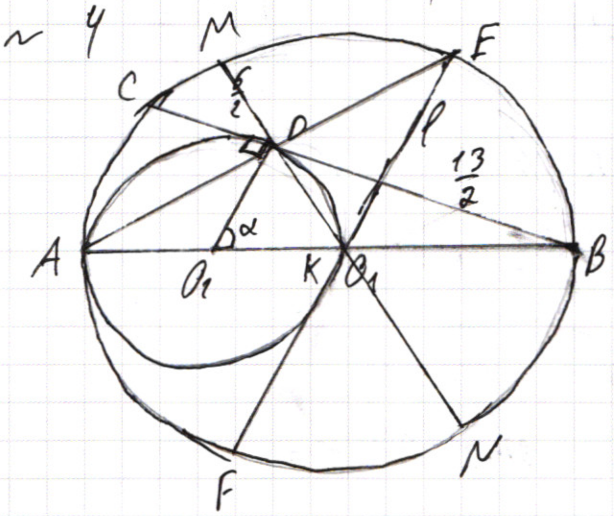
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано: Ω - окр; w - окр.

Ω кас w (внутр) в т. A

AB - диаметр Ω;

BC - хорда Ω; BC кас w = D

$AD \cap \Omega = E$; $l \perp CB$;

$E \in l$; $l \cap \Omega = F$; $CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

Найти: R_Ω; R_w; S_{AEF}

$\overset{\parallel}{R}$ $\overset{\parallel}{r}$

Решение:

1) т. о касат и секущ для w:

$$BD^2 = AB \cdot BK$$ (~~где K - т пересеч~~ где $AB \cap w = K$)

2) $$BD^2 = 2R(2R-2r)$$

$\triangle BDO_1$ - прямоуг $\Rightarrow \angle BO_1D = \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{O_1D}{O_1B} = \frac{r}{2R-r}$$

3) $\triangle O_1DK$ - равноб $\Rightarrow DO_1 = 2 \cdot O_1D \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DO_1 = 2r\sqrt{\frac{1-\left(\frac{r}{2R-r}\right)}{2}} = 2r\sqrt{\frac{R-r}{2R-r}}$$

4) [illegible] проведем D

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cos\alpha = \frac{r}{2R-r}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18}$

$DO_1^2 = r^2 + (R-r)^2 - 2r(R-r)\frac{r}{2R-r}$

$\frac{5}{18} = \frac{r}{2R}$

$r = \frac{13}{18}\sqrt{4R^2 - 81}$ (1)

$\frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

$81r^2 = \frac{169}{4} = 2R(2R-2r)$

$4R^2 = \frac{169}{4} - 4Rr$

$81r^2 = \frac{169}{4}(4R^2 - 81)$

$\sin\gamma + \sin\varphi =$

$\sin\gamma+\varphi + \sin\gamma-\varphi =$

$= 2\sin\gamma \cdot \cos\varphi$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_t 3 \cdot \log_4 t} = t^{\frac{\log_t 3}{\log_t 4}} = t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}(1 + t^{1-\log_4 3} - t^{\log_4 5 - \log_4 3}) \geq 0$

$1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} - t^{\log_4 \frac{5}{3}} \geq 0$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + 4\sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \cdot \frac{1+tg^2\beta}{1-tg^2\beta} + \frac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} \cdot \frac{tg^2\alpha+1}{1-tg^2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$x\geq 1$

$y\geq\frac{2}{3}$

$x<1$

$y<\frac{2}{3}$

$$3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}=4+3+\frac{4}{3}$$

$$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2=\frac{25}{3}$$

$$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3}$$

$$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$$

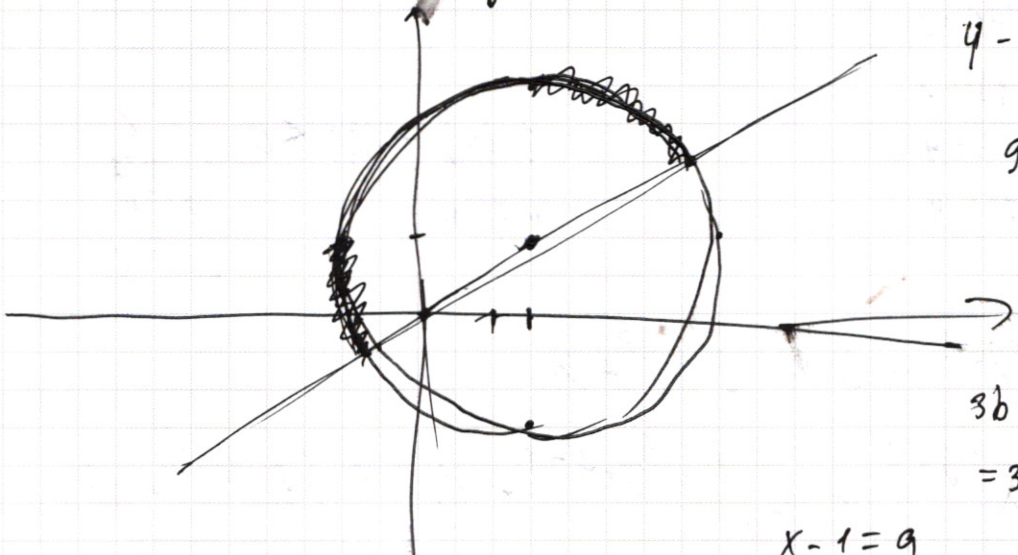
$3y-2x\geq 0$

$y\geq\frac{2}{3}x$

$$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$4-\frac{9}{4}=\frac{16-9}{4}=\frac{7}{4}$

$9-\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$



$3b-2a=$

$=3y-2.$

$$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$$

$x-1=a$

$y-\frac{2}{3}=b$

$a^2+b^2=\frac{25}{9}$

$3b-2a=\sqrt{3ab}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3a-2b=\sqrt{3ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a^2-15ab+4b^2=0 \\ 3a-2b\geq 0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$D=225-9\cdot 16=225-144=$

$$\begin{array}{r} 225 \\ -144 \\ \hline 81 \end{array}$$

$b=\frac{15a\pm 9a}{4}=$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{\sqrt{17}}$

$f(1)=2f(1)$

$\Downarrow$

$f(1)=0$

$f(2)=f(2)+f(1)=f(2)$

$f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(3)=0$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)+f(y)+f\left(\frac{1}{y^2}\right)$

$f(a)=f(ab)-f(b)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=\cancel{f(y^2)-f(y^2)}=f(1)-f(y)=$

$=-f(y)$

$f(x)-f(y)<0$

$x\neq 0$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 8 \\ \hline 216 \end{array}$$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}\geq t\left(t^{\log_4 5-1}-1\right)=t\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}}-1\right)$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$ 8.

~~$3^{\log}$~~

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)