МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 2\alpha + 2\beta \quad y = 2\beta \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{2}{5}$

№ 1

т.к. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x$
$= 2\sin x \cos y \Rightarrow 2\sin x \cos y = -\frac{2}{5}$, т.к. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin y = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ или $\sin y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

1) Из $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ следует, что $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

т.к $y = 2\beta$, $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

обозначим за $a - \sin\alpha$, $b - \cos\alpha \Rightarrow 3b^2 + 2ab - a^2 = 0$

$D = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2 \Rightarrow b_{1,2} = \frac{-2a \pm 4a}{6} \Rightarrow b_1 = \frac{a}{3}, b_2 = -a$

$3 = \frac{a}{b_1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

Случай когда $\sin y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$-1 = \frac{a}{b_2} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$

2) Если $\sin y = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} - \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$a = \sin\alpha,\ b = \cos\alpha$

$3a^2 + 2ab - b^2 = 0$

$D = 4b^2 + 12b^2 = 16b^2$

$a_{1,2} = \dfrac{-2b \pm 4b}{6} \Rightarrow a_1 = \dfrac{b}{3},\ a_2 = -b$

$\Downarrow$

$\dfrac{a_1}{b} = \dfrac{1}{3},\ \dfrac{a_2}{b} = -1$

В ОДЗ подставлять корни не нужно, т.к. корней по условию не меньше 3, а мы получили 3 корня

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = -1$

этот корень у нас уже был

Ответ: $tg\alpha = -1,\ tg\alpha = 3,\ tg\alpha = \dfrac{1}{3}$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x - 12y \geq 0 \\ 2xy - 12y - x + 6 \geq 0 \end{matrix}}$$

$\Leftrightarrow (x - 12y)^2 = 2y(x-6) - (x-6) = (x-6)(2y-1)$

$\Downarrow$

$a = x - 6,\ b = 2y - 1;$

$\Downarrow$

$x - 12y = a - 6b$

$\Downarrow$

$(a - 6b)^2 = ab$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$a^2 + 9b^2 = 90$

Теперь нам нужно решить систему

$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases},\ \text{где } a = x - 6,\ b = 2y - 1$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases}(a-6b)^2=ab \\ a^2+9b^2=90\end{cases}$ $\Rightarrow a^2+36b^2-12ab=ab \Rightarrow a^2-13ab+36b^2=0$

$ab\geq 0,\ a-6b\geq 0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a_{1,2}=\frac{13b\pm 5b}{2} \Rightarrow a_1=9b,\ a_2=4b$

1) $a=9b \Rightarrow 81b^2+9b^2=90$

$90b^2=90 \Rightarrow b=\pm 1$

1) $b=1,\ a=9$

$x-6=9,\ 2y-1=1$

$x=15,\ y=1$

подставив убедились, что один подходят по ОДЗ

2) $b=-1,\ a=-9$

$x-6=-9,\ 2y-1=-1$

$x=-3,\ y=0$

$x-12y<0$, посторонние корни

2) $a=4b \Rightarrow 16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90 \Rightarrow b_1=\frac{18}{5},\ b_2=-\frac{18}{5}$

1) $b=\frac{18}{5},\ a=\frac{72}{5}$

$a=14,4;\ b=3,6$

$x-6=\frac{72}{5},\ 2y-1=\frac{18}{5}$

$x=20,4 \quad y=2,3$

$a-6b<0$

посторонние корни

2) $b=-\frac{18}{5},\ a=-\frac{72}{5}$

$b=-3,6 \quad a=-14,4$

$x=-8,4 \quad 2y-1=-3,6$

$y=-1,3$

~~корни~~

$ab\geq 0$

$a-6b\geq 0$

Ответ $\{x=15,\ y=1\},\ \{x=-8,4,\ y=-1,3\}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 $f(ab)=f(a)+f(b)$, причем для каждого простого выполнено $f(p)=[p/4] \Rightarrow f(2)=0, f(3)=0, f(5)=1$...

Теперь нам бы хотелось представить остальные положительные целые числа, например $4=2\cdot 2 \Rightarrow$
$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$
$f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$
$f(8)=f(4\cdot 2)=f(4)+f(2)=0$
$f(9)=f(3\cdot 3)=f(3)+f(3)=0$...

Теперь нам бы хотелось научиться представлять функцию от чисел $f(\frac{1}{x})$, ведь $f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})$

Заметим, что $f(4)+f(\frac{1}{2})=f(2)$, т.к. $f(4\cdot\frac{1}{2})=f(4)+f(\frac{1}{2})$

$$\Downarrow$$

$$f(\tfrac{1}{2})=f(2)-f(4)=0$$

Таким образом, чтобы узнать значение функции $f(x)$ от какого-то натурального числа x, нам необходимо разложить его на простые множители $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}$..., а после сложить $\alpha_1\cdot f(p_1)+\alpha_2\cdot f(p_2)+\ldots$
$\ldots \alpha_n\cdot f(p_n)$

Чтобы узнать значение функции от числа $f(\frac{1}{x})$, где x - натуральное, мы говорим что $f(2\cdot x)+f(\frac{1}{x})=f(2)$, т.к. $f(2)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(2\cdot x)$, а это мы находить уже умеем, ведь $f(2\cdot x)=f(2)+f(x)=0+f(x)=f(x) \Rightarrow$
$-f(x)=f(1/x)$, следовательно, наша задача пре-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ратилась в следующую: $f(x/y) < 0 \Rightarrow$
$f(x) + f(1/y) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) < f(y)$

Осталось лишь для всех x (натуральных) от 2 до 25 найти количество y ($y \in [2, 25]$) таких, что $f(x) < f(y)$

2-0	Для нахождения значения функции мы берём
3-0	
4-0	наименьший делитель числа x (пусть будет d), и записываем
5-1	
6-0	~~f(x)~~ $f(x/d) + f(d) = f(x)$, значения $f(d)$ и $f(x/d)$
7-1	
8-0	были посчитаны ранее
9-0	
10-1	если же x - простое, то $f(x) = [x/4]$ по
11-2	
12-0	условию
13-3	
14-1	0 - 10, 1 - 7, 2 - 3, 3 - 1, 4 - 2, 5 - 1
15-1	
16-0	
17-4	Для $f(x) = 0$ $10 \cdot (7+3+1+2+1) = 140$
18-0	
19-4	Для $f(x) = 1$ $7 \cdot (3+1+2+1) = 49$
20-1	
21-1	Для $f(x) = 2$ $3 \cdot (1+2+1) = 12$
22-2	
23-5	Для $f(x) = 3$ $1 \cdot (2+1) = 3$ $189 + 17 = 206$
24-0	
25-2	Для $f(x) = 4$ $2 \cdot (1) = 2$
	Для $f(x) = 5$ $1 \cdot 0 = 0$

$140 + 49 + 12 + 3 + 2 + 0 = 206$

Ответ: 206 пар

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 \geq 0 \Rightarrow$ модуль можно раскрыть

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$a = 10x - x^2 \Rightarrow a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}, \ a > 0$

замена

$3^x = a$

замена, $x = \log_3 a$

$\Downarrow$

$3^x + 3^{x \cdot \log_3 4} \geq 5^x$

(Слева функция константа, а справа возрастает)

$\Downarrow$

$3^x + 4^x \geq 5^x$ (т.к.

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x$

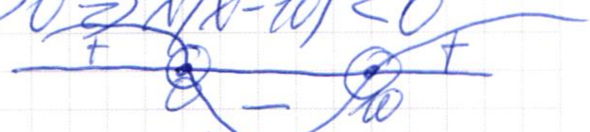
$1 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x$, при 2 - равенство, а т.к. дальше растёт $\Rightarrow$ разность будет > 1)

Равенство достигается при $x = 2$, а дальше функция 5^x будет расти быстрее чем функция $3^x + 4^x \Rightarrow x \in (-\infty, 2] \Rightarrow a \in (0, 9]$

Осталось решить два неравенства и взять их пересечение

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \ (\Leftrightarrow) \ x(10 - x) > 0 \Rightarrow x(x - 10) < 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$$



$x \in (0, 10)$

$\Downarrow$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$x_1 = 1, \ x_2 = 9$

$(x - 1)(x - 9) \geq 0$

$\Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [9, +\infty)$

Берём пересечение и получается $x \in (0, 1] \cup [9, 10)$

Ответ: $x \in (0, 1] \cup [9, 10)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\frac{16x^2-16}{4x-8} \le ax+b \le -32x^2+3b-3}$

$x^2+144y^2-24xy+12y+x=2xy+6$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$ $\qquad (x+12y+\frac{1}{2})^2=50xy+\frac{25}{4}$

$(x+6y-6)^2=81+36y-12xy=81+12y(3-x)$

$(x-6)^2+36y(y-1)=81$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$(x-12y)^2=(x-6)(2y-1)$ $\qquad f(4)=0 \quad f(6)=0$

$(x-6)^2+9(6y-3)^2=90$ $\qquad a=x-6 \quad f(7)=1$

$b=2y-1 \quad f(8)=0$

$(a-6b)^2=ab \quad f(2)=0 \qquad f(9)=0$

$f(3)=0 \qquad x-12y=a-6b \quad f(10)=1$

$a^2+9b^2=90 \quad f(5)=1 \qquad f(11)=2$

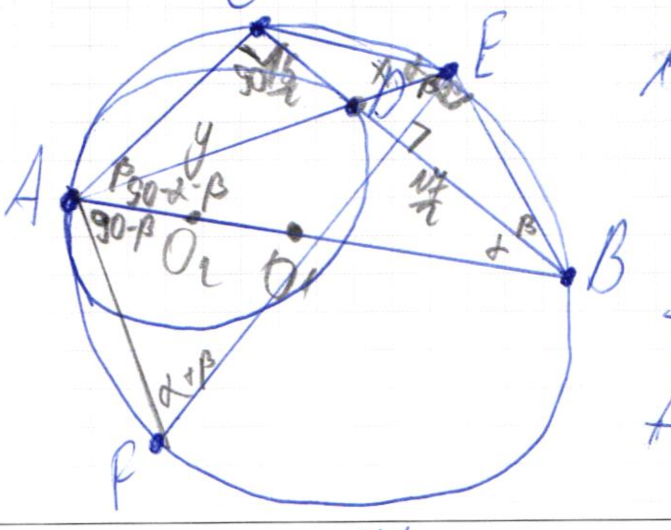
$f(12)=0$

$a^2+36b^2-12ab=ab \qquad f(13)=3$

$a^2-13ab+36b^2=0 \Rightarrow D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a_{1,2}=\frac{13b\pm5b}{2} \Rightarrow a_1=9b,\ a_2=4b$

1)



$x(x+y)$ $\qquad f(4)+f(\frac{1}{2})=f(2)$

$f(x\cdot\frac{1}{y})<0$

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(10)+f(\frac{1}{5})=f(2)=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

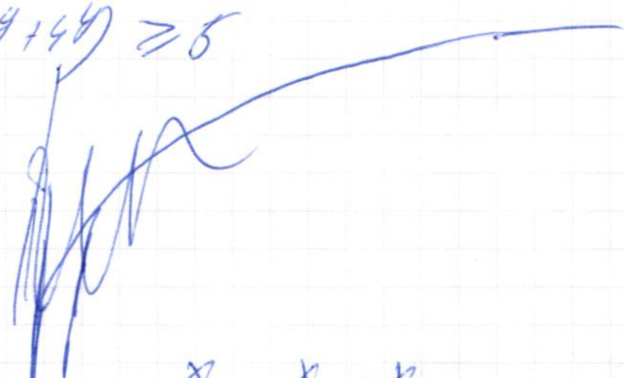
$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}, \ a > 0$

$3^y = a$

$3^y + 3^{y \cdot \log_3 4} \geq 5^y$

$3^y + 4^y \geq 5^y$ $\qquad$ $27 + 64 \quad 125$

$\log_y(3^y + 4^y) \geq 5$



$3^x + 4^x \geq 5^x$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^x \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x$

$1 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{4}{3}\right)^x$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$3a^2 + 2ab - b^2 = 0$

$D = 4b^2 + 12b^2 = 16b^2$

$a_{1,2} = \frac{-2b \pm 4b}{6} \Rightarrow a_1 = \frac{2b}{6},\ a_2 = -b$

$a_1 = \frac{b}{3},\ a_2 = -b$

$\cancel{\frac{b^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - b^2}$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{3},\ \cos\alpha = -\sin\alpha$

$3 = tg\alpha,\ -1 = tg\alpha$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\cancel{f(f(1) + f(a)) = f(1)}$

$x^2 + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$\cancel{4x^2 + 144y^2 = 48x}$

$x^2 + 144y^2 - 2xy + 12y + x = 6$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$(x + 12y + \frac{1}{2})^2 = x^2 + 144y^2 + \frac{1}{4} + x + 12y + 24xy$

$(x + 6y - 6)^2 = x^2$

$(x + 12y + \frac{1}{2})^2 - 26xy - \frac{1}{4} = 6$

$(x + 6y - 6)$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 - 24xy + 144y^2 + 12y + x = 2xy + 6$

$\cancel{x - 12y + \frac{1}{2}}$

-12

$12y -$

$(x + 6y - 12)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(4\beta) = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$ $\cos(60) = \frac{\sqrt{3}^2}{4} - \frac{1}{4}$

$\cancel{\sin}$ $\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cancel{\cos} \; 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha +$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(x+y)+\sin(x-y) = -\frac{2}{5}$ $x = 2\alpha+2\beta$

$\sin 60$ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ $y = 2\beta$

$\sin x\cos y + \cancel{\sin y\cos x} + \sin x\cos y - \cancel{\sin y\cos x} = -\frac{2}{5}$

$2\sin x\cos y = -\frac{2}{5}$ $\cancel{\sin(60)} =$ $\sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}$

$60-30$ $5^{3,1}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos y = -\frac{2}{5}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 1$ $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$\cancel{\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} +}$

$\cancel{\cos^2\alpha + 1}$

$1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$ $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)