МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{17} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \to \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\left(\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{17} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow -\frac{\sqrt{17}}{\cancel{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{\cancel{17}}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{\cancel{17}} \pm \frac{\sqrt{17}}{\cancel{17}}\cos 2\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{\cancel{17}} \Rightarrow {}^{*}4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

** ~~$\cos 2\alpha = -1-4\sin 2\alpha$~~ $\quad 8\sin\alpha\cos\alpha \pm {}^{**}(\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha}) = -\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha}$

(I) „+"

$$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ — невозм. т.к. по условию } tg\alpha \text{ определен.} \\ 4\sin\alpha+\cos\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha \end{array}\right.$

** ~~$4tg\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$~~ $\quad 4tg\alpha + 1 = 0 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

(II) „−" : $8\cos\alpha\sin\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$

$$4\cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 4\cos\alpha+\sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \end{array}\right.$$

*: ~~заметим, что $\sin 2\alpha$ и $\sin\alpha\cos\alpha$ могут~~

Ответ: $tg\alpha = \{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$

№5.

Заметим, что если $a=1$, $b=p$, то $f(1\cdot p)=f(1)+f(p) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(p)=f(1)+f(p) \Rightarrow f(1)=0.$

Тогда, если $a=a$, $b=\frac{1}{a}$, то $f(a\cdot\frac{1}{a})=f(1)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(a)+f(\frac{1}{a})=0 \Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

Тогда, $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow \underline{f(x)<f(y)}$

Пусть $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$. Тогда, $f(x)=f(p_1^{\alpha_1})+f(p_2^{\alpha_2})+\ldots f(p_n^{\alpha_n})$.

Для $f(c)$, где $c=p^{\alpha}$, верно: $f(c)=\alpha f(p)=\alpha[\frac{p}{4}]$

$f(x)=\alpha_1[\frac{p_1}{4}]+\alpha_2[\frac{p_2}{4}]+\ldots+\alpha_n[\frac{p_n}{4}]$.

Простые числа, $\in[0;27]$: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, для каждого из них найдем max. степень входящего в x или y и $[\frac{p_n}{4}]$:

p_n	α_n	$[\frac{p_n}{4}]$
2	4	0
3	3	0
5	2	1
7	1	1
11	1	2
13	1	3
17	1	4
19	1	4
23	1	5

~~При этом,~~ При этом, если в x или y есть простое ≥ 17, это число будет равно данному простому, потому что иначе x или y ≥ 34.

В y содержится не менее 1 простого ≥ 5 (иначе $f(y)=0$, а $f(x)\geq 0$)

b	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$f(b)$	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5

b	24	25	26	27
$f(b)$	0	2	3	0

чисел для которых $f(b)=0$: 10 $\quad f(b)=4$: 2
$f(b)=1$: 7 $\quad f(b)=5$: 1
$f(b)=2$: 3
$f(b)=3$: 2

если $f(x)=0$, $f(y)=1/2/3/4/5$, вариантов $10\cdot 15$
$f(x)=1$, $f(y)=2/3/4/5$, вариантов $7\cdot 8$
$f(x)=2$, $f(y)=3/4/5$, вариантов $3\cdot 5$
$f(x)=3$, $f(y)=4/5$, вариантов $2\cdot 3$
$f(x)=4$, $f(y)=5$ вариантов $2\cdot 1$

$\Rightarrow$ суммарно $150+56+15+6+2=229$.

Ответ: выбрать (x,y) удовл. условию можно 229 способами.

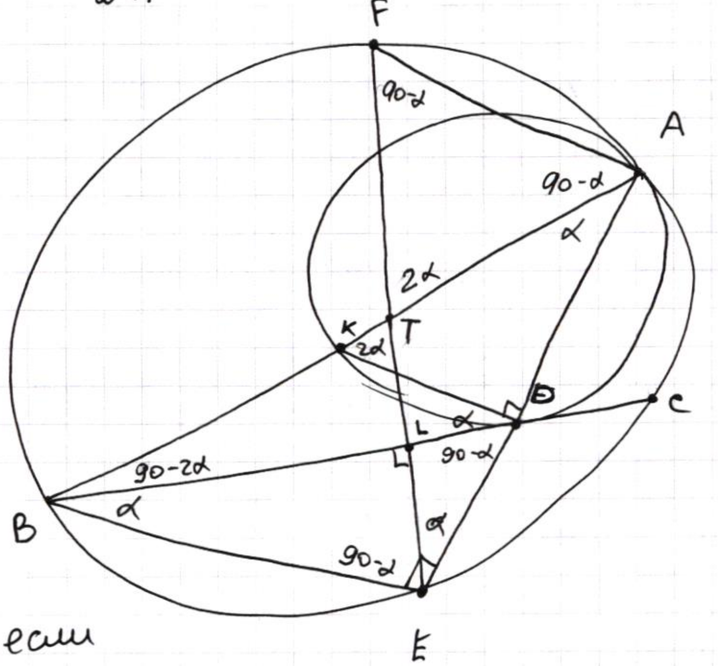
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

Дано: $\Omega \cap \omega = A$ (внутр.)
AB - диаметр Ω
$BC \cap \omega = D$ (кас.)
$AD \cap \Omega = E$
$EF \cap \Omega = F$ и $EF \perp BC$
$CD = 2{,}5$; $BD = 6{,}5$

Найти: R-? $\angle AFE$-?
r-? $S_{\triangle AEF}$-?



Решение:

Заметим, что т.к. AB-диаметр Ω, он так же диаметр ω, т.к. если провести через A кас. к Ω, она тоже будет кас. к ω и $\perp AB$ => => для ω это будет кас. $\perp$ хорде => эта хорда - диаметр.

~~Более того $FE \cap BA = O_1$ центр Ω, т.к. $O_2 \in BA$ ...~~,

$BA \cap \omega = K$ => степень точки B: $BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\frac{169}{4} = 4(R-r)R$ => $169 = 16(R-r)R$, $BK = \frac{BD^2}{BA}$

$\angle ADK = 90°$ (т.к. AK - диаметр) и $\angle AEB = 90°$ (AB-диаметр) => $KD \parallel BE$ =>

=> $\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{DE}$ => $DE = \frac{AD \cdot AB}{AK}$

Степень точки D: $BD \cdot DC = ED \cdot DA$ => $\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{AD^2 \cdot AB}{AK} = \frac{AD^2 \cdot R}{r}$

$\angle AFE = \angle ABE$ (опир. на одну дугу)

Введем обозначение углов как показано. $\angle KDB = \angle KAD$ (т.к. BD-кас.) $= \alpha$

Тогда, $\triangle BTE$ - р/б и $\triangle TFA$ - р/б. Тогда, $\angle FAE = 90°$ => FE - диаметр Ω =>

=> T - центр Ω. Более того, $\triangle BTE = \triangle FTA$. Отсюда, $BL = LC = 4{,}5$. =>

=> степень точки L: $EL \cdot LF = BL \cdot LC$ => $EL(2R - EL) = \frac{81}{4}$

№4.

Из степени точки D:

$$\frac{65}{4} = \frac{AD^2 R}{r} \Rightarrow AD^2 = \frac{65r}{4R}$$

~~С другой стороны,~~ $\cancel{\frac{DA}{DE} = \frac{r}{R} \Rightarrow ED + DA = \frac{R}{r} \cdot DA \Rightarrow ED = \frac{R-r}{r} DA}$

$$\cancel{BD \cdot DC = \frac{DA^2 (R-r)}{r} \Rightarrow DA^2 = \frac{BD \cdot DC\, r}{R-r} \Rightarrow \frac{65r}{4R} = \frac{65r}{4(R-r)} \Rightarrow R = R-r}$$

Тогда $AD = \sqrt{\frac{65r}{4R}} \Rightarrow$ из ΔKAD: $\cos\alpha = \frac{AD}{AK} = \sqrt{\frac{65r}{4R \cdot 4r^2}}$

$\angle AFE = 90 - \alpha \Rightarrow \sin\angle AFE = \cos\alpha = \sqrt{\frac{65}{4R \cdot 4r}}$, ~~$\sin\alpha = \sqrt{1 - \dots}$~~

$S_{\Delta AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2} = \frac{AE \cdot BE}{2}$. ~~Более того,~~ $\cancel{S_{\Delta AFE} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot AB \cdot AE =}$

$$\cancel{= \frac{1}{2}} \quad S_{\Delta AFE} = \frac{1}{2} \cdot 2R\cos\alpha \cdot \sqrt{4R^2 - 4R^2\cos^2\alpha} = \frac{2R\cos\alpha \cdot 2R\sin\alpha}{2}$$

$$S_{\Delta AFE} = 2R^2 \cdot \sqrt{\frac{65}{16Rr}} \cdot \sqrt{1 - \frac{65}{16Rr}} = 2R^2 \sqrt{\frac{65 \cdot (16Rr - 65)}{(16Rr)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AFE} = \frac{2R^2}{16Rr} \sqrt{65(16Rr - 65)} = \frac{R}{8r} \sqrt{65(16Rr - 65)}$$

$$\cancel{BE = 2R\sin\alpha}$$

$$\cancel{BE = \sqrt{2R^2 - 2R^2\cos 2\alpha} \Rightarrow 2R^2\sin^2\alpha = 2R^2(1 - \cos 2\alpha)}$$

Далее, подставив полученные в пункте 1 значения R и r найдем $\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{65}{16Rr}}$

$$S_{\Delta AFE} = \frac{R}{8r} \sqrt{65(16Rr - 65)}$$

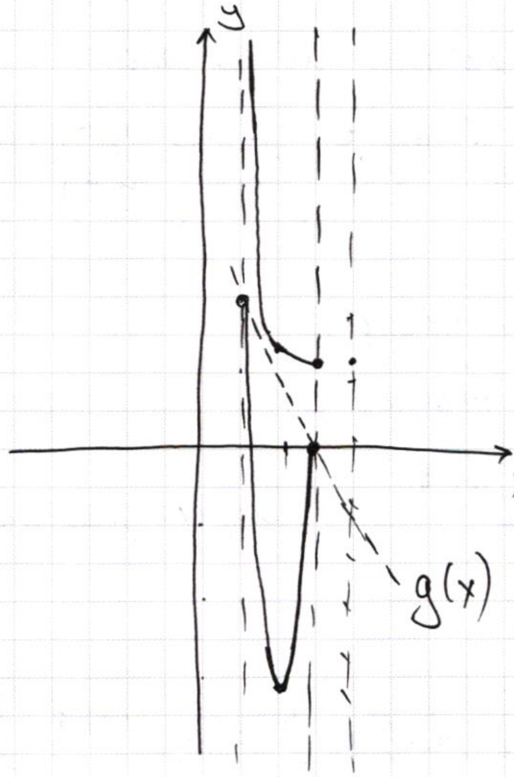
Ответ: R, r, $\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{65}{16Rr}}$, $S_{\Delta AFE} = \frac{R}{8r}\sqrt{65(16Rr - 65)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\frac{4x^2-3}{2x-2} \geq \underbrace{ax+b}_{} \geq 8x^2-34x+30$

уравнение прямой



Построим графики данных функций:

на промежутке [1;3]

для $\frac{4x-3}{2x-2}$ $x=1$ – асимптота

$\frac{4x-3}{2x-2}$ при $x=3 = \frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$

для $8x^2-34x+30$ $x=3$ – корень

коорд. вершины $\left(\frac{17}{8}; -\frac{49}{8}\right)$

$8x^2-34x+30$ при $x=1$: $8-34+30=4$

$g(x)=kx+n$, и $g(x)$ проходит через $(1;4)$ и $(3;0)$.

$\begin{cases} 0=3k+n \\ 4=k+n \end{cases} \Rightarrow 4=-2k \Rightarrow k=-2$

$n=6$

$g(x)=-2x+6.$

$-2x+n' = \frac{4x-3}{2x-2} \Rightarrow (2x-2)(-2x+n')=4x-3 \Rightarrow -4x^2+2xn'+\cancel{4x}-2n'=\cancel{4x}-3$

$4x^2-2xn'+2n'-3=0$, $D=0$, т.к. касание $\Rightarrow 4n'^2-16(2n'-3)=0$

$4n'^2-32n'+48=0 \Rightarrow n'^2-8n'+12=0 \Rightarrow n'_{12}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm4}{2}$

$\left[\begin{array}{l} n'_1=2 \\ n'_2=6 \end{array}\right.$ $x_{12}=\frac{2n'}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{12}{8} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=\frac{3}{2} \end{array}\right.$ $x_1 \notin [1;3]$ – не подх.

Откуда, $g(x)$ – это касательная к $\frac{4x-3}{2x-2}$. Если менять коэф. n, то прямая будет пересекать $\frac{4x-3}{2x-2}$ или левую ветвь параболы. Если

Менять коэф. k, то прямая будет менять угол наклона и также пересечет либо параболу либо гиперболу. В данном контексте „пересечь" подразумевает пересечение в 2х местах, т.е. не касание. Отсюда, пары (a, b) при которых выполняется это неравенство одна и равна (-7; 6)

Ответ: (-7; 6)

3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

Т.к. x^2+6x есть в $\log_4(x^2+6x)$, то из определения логарифма $x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$. Пусть $x^2+6x=t$, $t>0$, $x\notin[-6;0]$

$$3^{\log_4 t}+t \ge t^{\log_4 5} \Rightarrow t^{\log_4 3}+t \ge t^{\log_4 5} \quad (\text{т.к. } a^{\log_b c}=c^{\log_b a})$$

$3^{\log_4 t}+t$ - возрастающая монотонно функция

$t^{\log_4 5}$ - возрастающая монотонно функция.

$\cancel{3^{\log_4 t} \ge t\left(t^{\log_4 5-1}-1\right) \Rightarrow 3^{\log_4 t} \ge t\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}}-1\right)}$ ~~Логарифмируем по осн. 4~~

$\cancel{\log_4 t \cdot \log_4 3 \ge \log_4 t + \log_4\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}}-1\right)}$

$\cancel{\log_4 t\left(\log_4 3-1\right) \ge \log_4\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}}-1\right) \Rightarrow \log_4 t \cdot \log_4 \frac{3}{4} \ge \log_4\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}}-1\right)}$

$$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4} \ge t^{\log_4 5}$$

При $t\in(0;16)$ неравенство выполнено =>

$$x^2+6x-16\le 0,\quad x_{12}=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-6+10}{2} \\ x_2=\frac{-6-10}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=-8\end{array}\right.$$

и $x\notin[-6;0]$ (из ОДЗ) => ответом будет $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: ~~$x\notin(-6;0)$~~ $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$$

$$\cancel{12y^2-15xy+7x^2-4x-2y-6=0}$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0 \qquad f\left(\frac{1}{4}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=$$

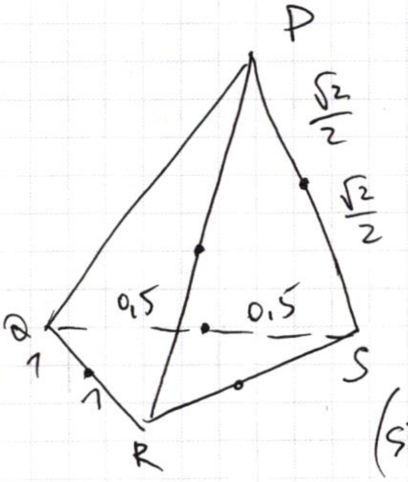
$$f(4)=f(2)+f(2)$$

$$f\left(\frac{27}{9}\right)=f(3)=0$$

$$\left[\frac{2}{4}\right] \quad \left[\frac{2}{4}\right]$$

$0 \quad 0$

$$f\left(\frac{4}{5}\right)=$$



$$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\beta\frac{2}{2}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+$$

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\beta=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}+$$

$$+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{\cdot 16}{6}\ \frac{4}{4}\ 2$$

$$\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}}($$

$$9^{\log_6 c}=c^{\log_6 9}$$

$$5^{\log_3 9}=9^{\log_3 5}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)+$$

$$+\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}($$

$$x+x^n \cancel{6} \quad x(x+6) \quad x^2 \quad x^2 \ 6 \ 6$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}\\ \sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{8}{17}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{17}}{17}\\ 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)=-\frac{8}{17}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{17}}{34}\\ \sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)=-\frac{4}{17}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{17}}{34}\\ (\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta)(\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\end{cases}$$

$$-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta)=-\frac{4}{17} \quad (1)$$

$$(1): \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos^2(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\beta-\sin^2(\alpha+\beta)$$

№5.

Заметим, если $a=1,\ b=p$, то $\begin{cases}f(1\cdot p)=f(1)+f(p)\\ f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]\end{cases} \Rightarrow f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]=$

$=f(1)+\left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=0.$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta=$$

$$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=$$

$$=2(\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta+\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta\cos\alpha\sin\alpha)$$

$$2(\sin\alpha\cos\alpha(\underbrace{\cos^2\beta+\sin^2\beta}_{1})+\sin\beta\cos\beta(\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}_{1}))$$

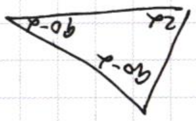
$$2(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta)=\sin 2\alpha+\sin 2\beta$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

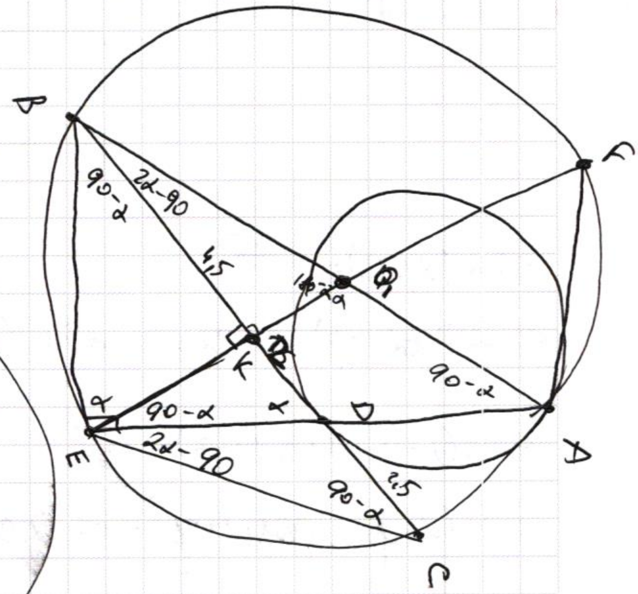
Страница №__

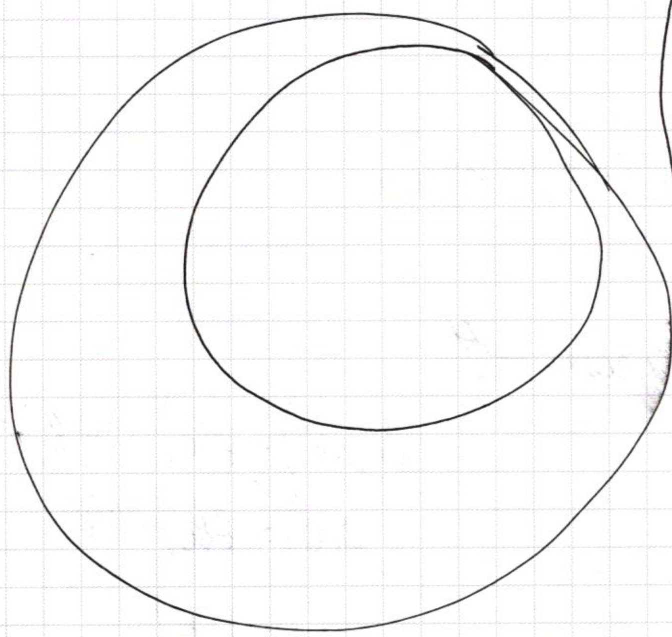
(Нумеровать только чистовики)



$\alpha = 90 - \alpha - \beta$

$2\alpha = 90 - \beta$



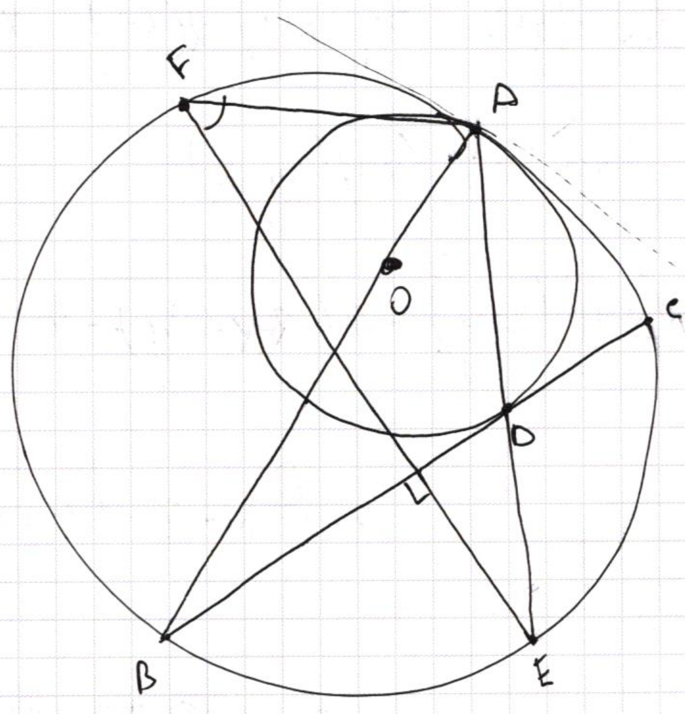


$\frac{4{,}5}{AE} = \frac{BE}{2R}$

$90 - 180 + 2\alpha$

$2\alpha - 90 + 90 - \alpha = \alpha$

$\frac{18}{2} = 9$ $\quad 4{,}5 = \frac{9}{2}$



МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{34}$

$\cancel{\sin(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha} = \sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha\cos$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{34}$

$\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{17}$

$f(0\cdot b) = f(0) + f(b)$

$\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(b)$

$0 = f(b)$

$f(1) + f(p) = [p/4]$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{f(x)\cdot} f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$3xy - 2x - 3y + 2 = 3y(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(3y-2)$

$(3y-2x) = (x-1)(3y-2)$

$\cancel{3(x-y)(x+y) - 2(3x+2y) - 4}$

$9y^2 + x^2 + 8x + 7y + 2 - 15xy = 0$

$3y^2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

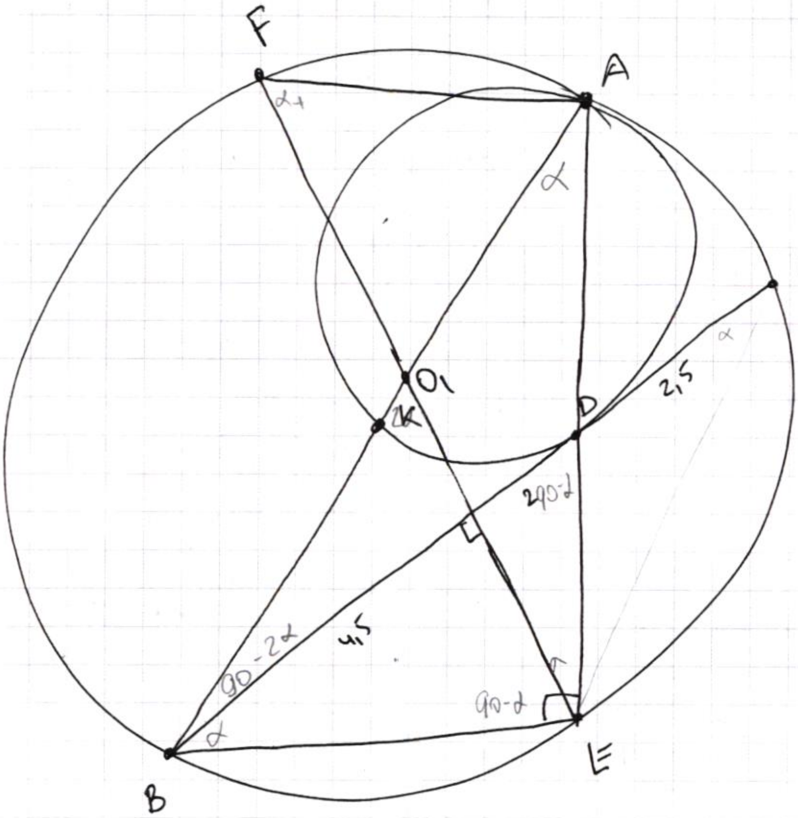
$3\ 2^{\log_5 25} =$

$x^2+6x=0$

$3^{\log_4 t} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$

$x=0$ $\boxed{x\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)}$

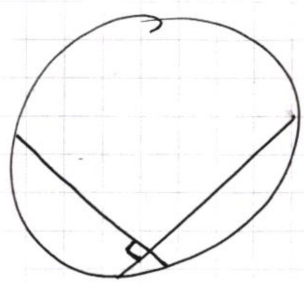
$x=-6$



$BD^2=(2R-d)\cdot 2R$

$\frac{169}{4}=2(R-r)\cdot 2R$

$\boxed{169=16(R-r)R}$



$3+\frac{1}{4} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 5}$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \geq \frac{1}{5}$

$3^1+4 \geq 5$

$3^{-1}+\frac{1}{4} \geq 4\ \frac{1}{5}$

$3^2+16 \geq 25$

$[16]$

$\frac{1}{9}$

$2 \geq 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3y-2x\geq 0$ $\quad 3y\geq 2x$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$3y(x-1)-2(x-1)\geq 0$

$(x-1)(3y-2)\geq 0$

$3(x^2-2x+1)+\cancel{3y^2}=3y^2-4y-7$

$3(x-1)^2$

$\cancel{\begin{cases}x>1\\ y>\frac{2}{3}\end{cases}}$ $\begin{cases}x<1\\ y<\frac{2}{3}\end{cases}$

$BE=2R\cdot\sin\alpha$

$BE=2R^2-2R^2\cos(2\alpha)$

$\cos^2\alpha=\frac{2R}{AE}$

$\begin{cases}x\geq 1\\ 3y>2\end{cases}\vee\begin{cases}x<1\\ 3y<2\end{cases}$

$\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$

$\cos\alpha=\frac{DA}{2R}=\frac{\sqrt{rBC\cdot DC}}{(R-r)\cdot 4r^2}$ $\quad 2x<3y<2$

$f\left(\frac{1}{a}\right)=$

$DA=\sqrt{\frac{rBC\cdot DC}{R-r}}$

$f(a^n)=nf(a)$

$DA^2=\frac{rBD\cdot DC}{R-r}$

$f(a^{-1})=$

$\frac{DA^2(R-r)}{r}=BD\cdot DC$

$\frac{BD}{DC}=\frac{4R(R-r)r}{DA^2\cdot(R-r)}$

$DA=\cos\alpha 2r$

$ED=DA\cdot\frac{r}{R-r}$

$ED+DA=\frac{R}{r}DA$

$EL(2R-EL)$

$AE=\frac{R}{r}DA$

$\frac{ED}{DA}\frac{AE}{DA}=\frac{R}{r}$

$2R(2R-2r)=BD^2$

$ED\cdot DA=\hat{B}D\cdot\hat{D}C$

$8x^2-34x+30=0$ $\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$ $x_{12}=\frac{34\pm\sqrt{34^2-120\cdot 8}}{16}$

$8-34+30=4$

$8\cdot 9-34\cdot 3+30=102-102$

$\frac{34\pm 14}{16}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4}$

$\frac{48}{16}=3$

$34 \cdot 3 = 102$

$34 \cdot 34$: 136 $+102$ $=1156$ -960 $=196$

$120 \cdot 8 = 960$

$17 \cdot 17$: 119 $+17$ $=289$

$\frac{-b}{2a}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

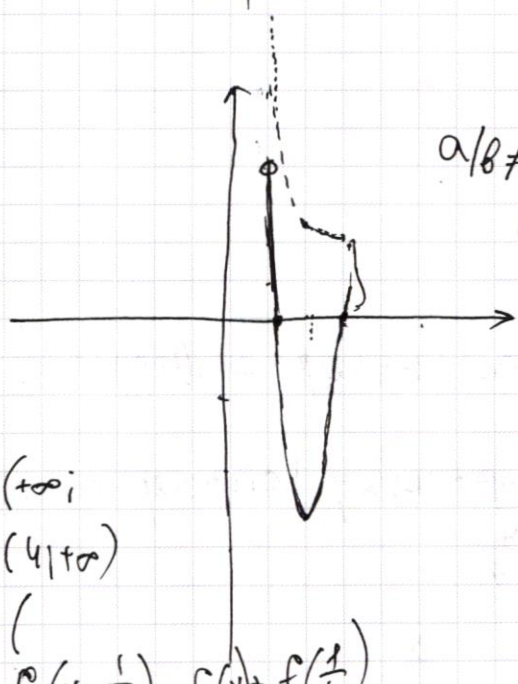
$\frac{17^2}{8}-\frac{34\cdot 17}{8}+30=y$

$\frac{-D}{4a}=\frac{-196}{32}=$

$17^2-2\cdot 17^2+30\cdot 8=8y$

$-17^2+240=8y$

$-49=8y$ $y=-\frac{49}{8}$



$a/b\neq p$

$a\neq b\cdot p$

$196 : 4 = 49$

$A\in(+\infty;$

$A\in(4;+\infty)$

$B\in($

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$\frac{4-3}{}$ $\frac{8-3}{4-2}=\frac{5}{2}$

$\frac{12-3}{6-2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$

$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$x=p_1p_2\ldots$

$4x=3$

$x=\frac{3}{4}$

$64-48=16$

если

$f(\frac{5}{6})=f(5)+f(\frac{1}{6})$ $[\frac{p}{4}]\geq 0$, т.к. $p>0$ $\frac{24-3}{10}=\frac{21}{10}$ ~~20-3~~

$f(\frac{1}{a})=$ $x^2+6x>0$ =>

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y-2x \geq 0$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

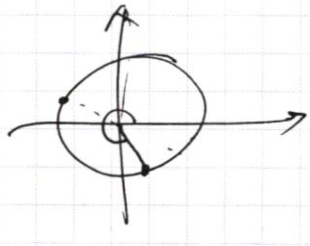
$9x^2-6x+1-6x^2+4y^2-4y+1-y^2=6$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{34} \\ \sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{4}{17} \end{cases}$$

$(\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta)(\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta) = -\frac{4}{17}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)\cos\beta\sin\beta+\cos^2(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\sin^2\beta$

$-\frac{\sqrt{17}}{34}\cos^2\beta+\frac{\sqrt{17}}{34}\sin^2\beta+\sin\beta\cos\beta = -\frac{4}{17}$



$~~(7-5^{\log_5 7})^{\log_4 3} \geq 3^{\log_4 7}\cdot 7^{\log_4 3}~~$

$3^{\log_4 7} \geq 7^{\log_4 3}\cdot 5^{\log_5 7} - 7$

$x^2+6x \geq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_5 3}-x^2$

$x^2+6x=7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)