МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5}-\frac{\cos 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$t=\sin 2\alpha \quad |t|\le 1$

$t-2(1-t^2)=-1$

$t-2+2t^2=-1$

$2t^2+t-1=0$

$(t+1)(2t-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5}+\frac{\cos 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$t=\sin 2\alpha \quad |t|\le 1$ (*)

$t+2(1-t^2)=-1$

$t+2-2t^2=-1$

$2t^2-t-3=0$

$(2t-3)(t+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} t=\frac{3}{2} \text{ не уд. (*)} \\ t=-1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha=-1 \\ \sin 2\alpha=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z \\ 2\alpha=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z \\ 2\alpha=\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in Z \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi l, l \in Z. \end{array}\right. ; \quad \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \cancel{arctg}\left(\frac{\pi}{12}\right) \cancel{arctg}\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ tg\alpha = \cancel{arctg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cancel{arctg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) \end{array}\right.$$

$tg\frac{5\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$ $\quad tg\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

Ответ: -1; ~~$ar\frac{\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{12}$, $arctg\frac{\pi}{12}$; $arctg\frac{5\pi}{12}$~~

Ответ: -1; $2-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{3}$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (x-6)-6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$x-6=a$

$2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \quad ab \geq 0$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} ; \quad \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}.$$

$x = a+6$

$y = \frac{b+1}{2}$

1) $a=9b$

$90b^2=90$

$b^2=1$

2) $a=4b$

$25b^2=90$

$b^2=\frac{18}{5}$

а) $b=1$

$a=9$

$x=15$

$y=1$

б) $b=-1$

$a=-9$

$x=-3$

$y=0$

в) $b=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$x=\frac{12\sqrt{10}+30}{5}$

$y=\frac{3\sqrt{10}+5}{10}$

г) $b=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

$y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}$

Ответ: $(15;1)$; $(-3;0)$; $\left(\frac{12\sqrt{10}+30}{5}; \frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right)$; $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

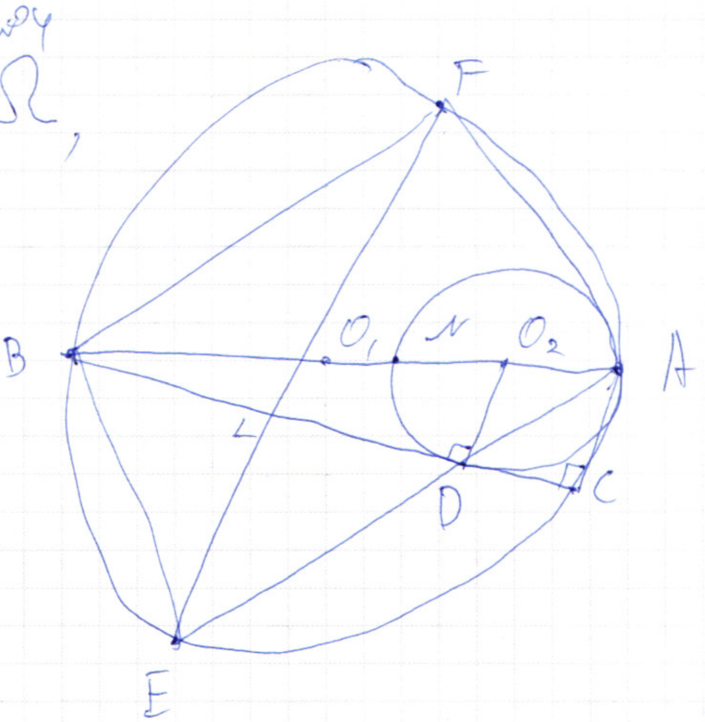
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

1) Пусть O_1 - центр Ω, R - её радиус

O_2 - центр ω, r - её радиус.



$AB \cap \omega = N$

По св. кас. и сек.

$BD^2 = BN \cdot BA$

$\frac{17^2}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R \quad (1)$

2) $\angle ACB = 90^0$ (опир. на диаметр), $\angle O_2DB = 90^0$ (BC-кас.), след-но по ТП $O_2D \parallel AC$, по т. Фалеса:

$\frac{BO_2}{BD} = \frac{O_2A}{DC} \qquad \frac{2R - r}{\frac{17}{2}} = \frac{r}{\frac{15}{2}}$

$30R - 15r = 17r \qquad R = \frac{16}{15}r$, подставим в (1) и получим:

$\left(\frac{16}{15}r - r\right) \cdot \frac{16}{15}r = \frac{17^2}{16}$

$\frac{r^2 \cdot 16}{15^2} = \frac{17^2}{16} \qquad r = \frac{17 \cdot 15}{16} = \frac{255}{16} \qquad R = \frac{16}{15} \cdot r = 17$

3) Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle DO_2A = 2\alpha$ (угол между хордой и кас), т.к. $O_2A = O_2D = r$, то $\angle O_2DA = \angle O_2AD = 90 - \alpha$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

п.4) Пусть $EF \cap BA = O'$, $EF \perp BC$, след-но $EF \parallel O_2D \parallel AC$.

$\angle EO'O_2 = \angle DO_2A = 2\alpha$ (~~как соо~~ $= \angle BNF$ (как верт.)
(в силу параллельности)

$\angle BFA = 90^0$ (опир. на диаметр), $\angle BFE = \angle BAE = 90 - \alpha$ (опир. на одну дугу).

след-но $\angle EFA = 90^0 - \angle BFE = \alpha$.

5) По т. Пиф. в $\triangle ABC$. $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 34^2 - 16^2 = 30^2$ $AC = 30$. Из $\triangle ADC$: $tg\alpha = \frac{AC}{DC} = 4$.

$\alpha = arctg\, 4 = \angle EFA$.

6) Также из п. 4 следует, что $\angle FO'A = 180^0 - \angle EO'O_2 = 180^0 - 2\alpha$ (как смежные), след-но по сумме углов $\triangle BEO'$ и $O'FA$ $\angle FBO' = 90^0 - \alpha$, $\angle FAO' = \alpha = \angle O'FA$, т.е. $\triangle BO'F$ и $O'FA$ равноб., $BO' = O'F = O'A$, след-но $O'F$ - медиана, т.е. O' - середина BA, но BA - диаметр, т.е. $O' = O$, $\angle EFA = 90^0 - \alpha + \alpha = 90^0$

7) т.к. $tg\alpha = 4$ и $0 < \alpha < 90^0$, то $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

В $\triangle AFE$, $EF = 34 = 2R$,

$AE = EF \cdot \sin\alpha = \frac{34 \cdot 4}{\sqrt{17}} = 8\sqrt{17}$, тогда,

$AF = \frac{8\sqrt{17}}{tg\alpha} = 2\sqrt{17}$ $S_{AFE} = AF \cdot AE = 8\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17} = 17 \cdot 16 = 272$

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = arctg\, 4$, $S_{\triangle AFE} = 272$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$, т.е. $x^2-10x<0$

$x^2-10x<0$, след-но $|x^2-10x| = 10x-x^2$

$t = 10x-x^2$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$.

$f(t) = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$ скорость возрастания $f(t)$ > скорости возрастания t, обе функции монотонны, ~~а~~ исходя из этих 2 фактов они ~~имеют~~ могут иметь лишь 1 точку пересечения. При $t=9$

$\cancel{t=9}$, $f(t) = 9^{\log_3 5} - 9^{\log_3 4} = 5^2 - 4^2 = 9 = t$

Значит при $t>9$ $t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} > t$, т.е. неравенство выполняется при $t \leq 9$.

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-9)(x-1) \geq 0$. С учётом ОДЗ: $(0;1] \cup \cancel{[1;9]}\ [9;10)$

Ответ: $\cancel{[1;9]}$

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$

№25.

Найдём все ненулевые значения $f(x)$ при $2\le x\le 25$

$f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(10)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$
$f(14)=1$ $f(15)=1$ $f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(20)=1$
$f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=5$ $f(25)=2$

Заметим что,

$0=f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x})$ т.е. для всех данных значений $f(\frac{1}{x})$ - отрицательно и равно по модулю $f(x)$

Также

$0=f(1)=f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x})$ $f(\frac{y}{x})=-f(\frac{x}{y})$. Т.е. из пар $(x;y)$ лишь 1 дробь может дать отрицательное число.

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$ Чтобы данное значение было отрицательным достаточно наложить условие $f(x)<f(y)\neq 0$

т.к. $f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$, т.е. для всех $f(x)=0$ это значения $f(y)>0$ для $f(x)=1$ $f(y)>1$, это делано чтобы не учесть одно и то же значение дважды.

кол-во $f(x)=0$: 10 $f(x)=1$: 7 $f(x)=2$: 3
$f(x)=3$: 1 $f(x)=4$: 2 $f(x)=5$: 1

Итоговое кол-во пар: $10\cdot 14+7\cdot 7+3\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1=140+49+12+3+2=206$

Ответ: 206

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

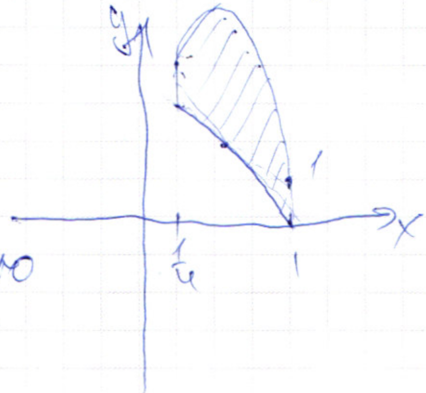
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

~~Пус~~ $\frac{16x-16}{4x-5}$ задаёт на плоскости Oxy гиперболу $4+\frac{4}{4x-5}=f(x)$

$g(x)=32x^2-36x-3$ — параболу с ветвями вверх. ~~вер~~ вся парабола лежит выше гиперболы на промежутке $[\frac{1}{4};1]$ т.к ~~в точк~~ $g(\frac{1}{4})=4$ $g(1)=1$, а $f(\frac{1}{4})=3$ $f(1)=0$

~~Но~~ $ax+b$ задаёт прямую



Нам нужно найти все прямые, которые на промежутке $[\frac{1}{4};1]$ полностью лежат в заштрихованной области

Для этого необходимо, чтобы в точке $x=\frac{1}{4}$ прямые принимали значения от 3 до 4, в $x=1$ от 0 до 1 и в точке касания прямой, проходящей через $(1;0)$ и гиперболы принимали значение больше значения в т. касания

Пусть прямая: $cx+d$, т.к. $(1;0)$ лежит на ней, то $c+d=0$ $d=-c$ $cx-c$ — вид прямой.

Чтобы задать касание, ~~f~~ $f'(x)$ должен быть равен $cx-c$ и прямые должны иметь 1 точку касания.

$cx-c = \frac{-16}{(4x-5)^2}$

$(cx-c)(4x-5)^2 = -16.$

при $c=16$ касание достигается, т.к.

$(16x-16)(4x-5)^2 = -16$

$256x^3 - 896x^2 + 1040x - 384 = 0$

$(64x^2 - 176x + 128)(4x-3) = 0.$

$64x^2 - 176x + 128 = 0$

$4x^2 - 11x + 8 = 0$

$D = 121 - 128 < 0$, т.е. единств. решение $x = \frac{3}{4}$ — т. касания.

$f(\frac{3}{4}) = 2$. Т.е. решения $(a;b)$ должны быть такими:

$\begin{cases} 1 \geq a+b \geq 0 \\ 4 \geq \frac{a}{4}+b \geq 3 \\ 2 \leq \frac{3a}{4}+b \end{cases}$; $\begin{cases} 0 \leq a+b \leq 1 \\ 12 \leq a+4b \leq 16 \\ 8 \leq 3a+4b \end{cases}$; $\begin{cases} a+b \leq 1 \\ a+2b \geq 5 \\ a+4b \leq 16 \end{cases}$; $5-2b \leq a \leq 1-b$

$5-2b \leq 1-b \quad b \geq 4 \quad a+4 \leq a+b \leq 1 \quad a \leq -3$

Для любого $k \leq -3$ $a=k$, ~~$b \leq 1-k$ — решения нашего задания, т.е. или них~~ $\frac{5-k}{2} \leq b \leq 1-k$

$k \in \mathbb{R}$ — подходят т.к. при них выполнены все условия и неравенство выполнено для всех $x \in [\frac{1}{4};1]$.

Ответ: пары вида $a=k$

$\frac{5-k}{2} \leq b \leq 1-k$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

CX—C

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\left(\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}\right.$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = \frac{-1}{\sqrt5}$

$\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k$

$2\alpha + \arccos\frac{1}{\sqrt5} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$2\alpha = -\pi + 2\pi k$

$2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = t$

$t + 2 - 2t^2 = -1$

$2t^2 - t - 3 = 0$

$1 + 24 = 25$ $t_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$

$\frac{1\pm5}{4}$ $\frac{3}{2}$ -1

$\sin 2\alpha = -1$

$\sin^2 2\alpha = \frac{1-2\sqrt{13}+13}{4} = \frac{14-2\sqrt{13}}{4}$

$1 - \quad = \frac{4-14+2\sqrt{10}}{4} = \frac{2\sqrt{10}-10}{4}$

$CX - C = \frac{4+4}{4x-5}$

2) $-\frac{2}{\sqrt5}$

$t - (2-2t^2) = -1$

$t + 2 + 2t^2 = 1$

$2t^2 + t + 3 = 0$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$t - (2 - 2t^2) = -1$

$t - 2 + 2t^2 = -1$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$1 - \frac{1-2\sqrt{10}+10}{4}$ $\frac{-1\pm3}{4}$ -1

$= \frac{4-1+2\sqrt{10}-10}{4} = \frac{2\sqrt{10}-7}{4}$ $\frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$ $\sin 2\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2\sqrt{10}-9}{\sqrt{4}}}}{2}$

CX—C

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin\frac{\pi}{12} =$

$\cos\frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12}$

$\sin 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

$tg\frac{5\pi}{12} = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) =$

$= \frac{\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}(2-\sqrt{3})}$

$2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$\alpha = \frac{\pi}{12} + \pi n$ $\frac{2}{1 - 2\sqrt{3} + 3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin^2 = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$

$\sin^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$2\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi f$

$\alpha = \frac{5\pi}{12} + \pi f$

$\frac{2}{4 + 2\sqrt{3}}$ $= 1$ $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6}$ $\frac{\pi}{2}$ $arctg\frac{\pi}{12}$

$2+\sqrt{3}$

$arctg\frac{5\pi}{12}$

$tg(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}(\sqrt{3}+2)} = \frac{2\sqrt{3}+2}{1 - 3 - 2\sqrt{3}}$

$(x-6)^2 + 36(y^2 - y - 1) = 45$

$a = 9b$ или $a = 4b$ $\frac{2\sqrt{3}+2}{-2-2\sqrt{3}}$

$b^2 = 1$

$b = 1$ $b = -1$

$a = 9$ $a = -9$

$25b^2 = 90$ -1

$b^2 = \frac{90}{25}$

$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = 3\sqrt{}$

$\sin^2 \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$x - 12y = \sqrt{\frac{2y(x-6) - (x-6)}{(x-6)(2y-1)}}$

$\sin = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

$(x-6)^2 + 36y^2 - 36y - 36 - 45 = 0$

$\cos = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

$(6y-3)^2$

$tg =$

$\frac{2-\sqrt{3}}{1}$

$2-\sqrt{3}$

$\begin{cases} (x-6)^2 + (6y-3)^2 - 36 - 9 = 45 = 90 \\ (x - 12y) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \end{cases}$

$tg\frac{\pi}{12} = x$

$tg\frac{\pi}{6} = \frac{x^2 + x^2}{1 - x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$

$2\sqrt{3}x = 1 - x^2$

$x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 4$

$\sqrt{3} \pm 2$

$x = \sqrt{3} + 2$

$x = \sqrt{3} - 2$

$tg\frac{\pi}{12} = x$

$\frac{x - 6 + 12y - 6}{2} \geq \sqrt{(x-6)(2y-1)\cdot 6}$

$tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$ $x+$

$tg(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})$

$-tg(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\sqrt{3} - 2$

$\frac{6}{\sqrt{3}}$ $3\sqrt{3} - 6$

6 $2\sqrt{3}$

$x - 12y - 6 + 6 = (x-6) + 6(2y-1)$

$(x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$x - 6 = a$

$2y - 1 = b$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$(a - 9b)(a - 4b) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

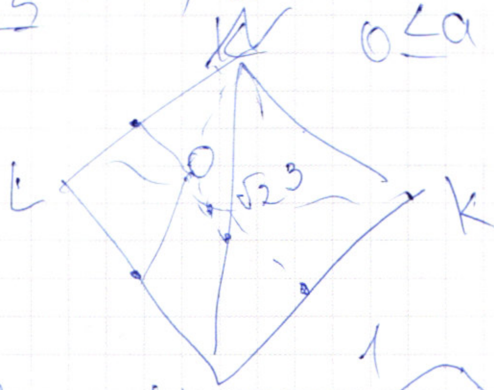
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$12 \le a+4b \le 16$

$0 \le a+b \le 1$



$ax+b-\frac{16x-16}{4x-5} \ge 0$

$f' = a - \frac{0-16}{(4x-5)^2}$

$ax+b-4-\frac{4}{4x-5} \ge 0$

$a+4b \ge 12$

$a+b \ge 0$

$4ax^2-5ax+4bx-5b$

$\frac{a(4x-5)^2+16}{(4x-5)^2} \ge 0$ $a+b \le 1$

$\frac{-16x-16}{4x-5} \ge 0$

$b \ge \frac{13}{3}$

$a(4x-5)^2+16 \ge 0$ $a+4b+1 \ge 12+a+b$

$3b \ge 13$

$a+4\cdot\frac{13}{3} \le a+4b \le 16$

$\frac{4ax^2+x(4b-5a-16)-5b-16}{4x-5} \ge 0$

$a \ge -16$

$a \le \frac{16\cdot 3-4\cdot 13}{3} \le -\frac{4}{3}$

$1;0$

$c+d=0$ $d=-c$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4+\frac{4}{4x-5}$

$cx+d \quad cx+d=4+\frac{4}{4x-5}$

$7^{\log_3 5}-7^{\log_3 4}$

$7^{\log_3 5}\cdot(4^{\log_3 5}-7^{\log_3 4}\cdot 4^{\log_3 4}$

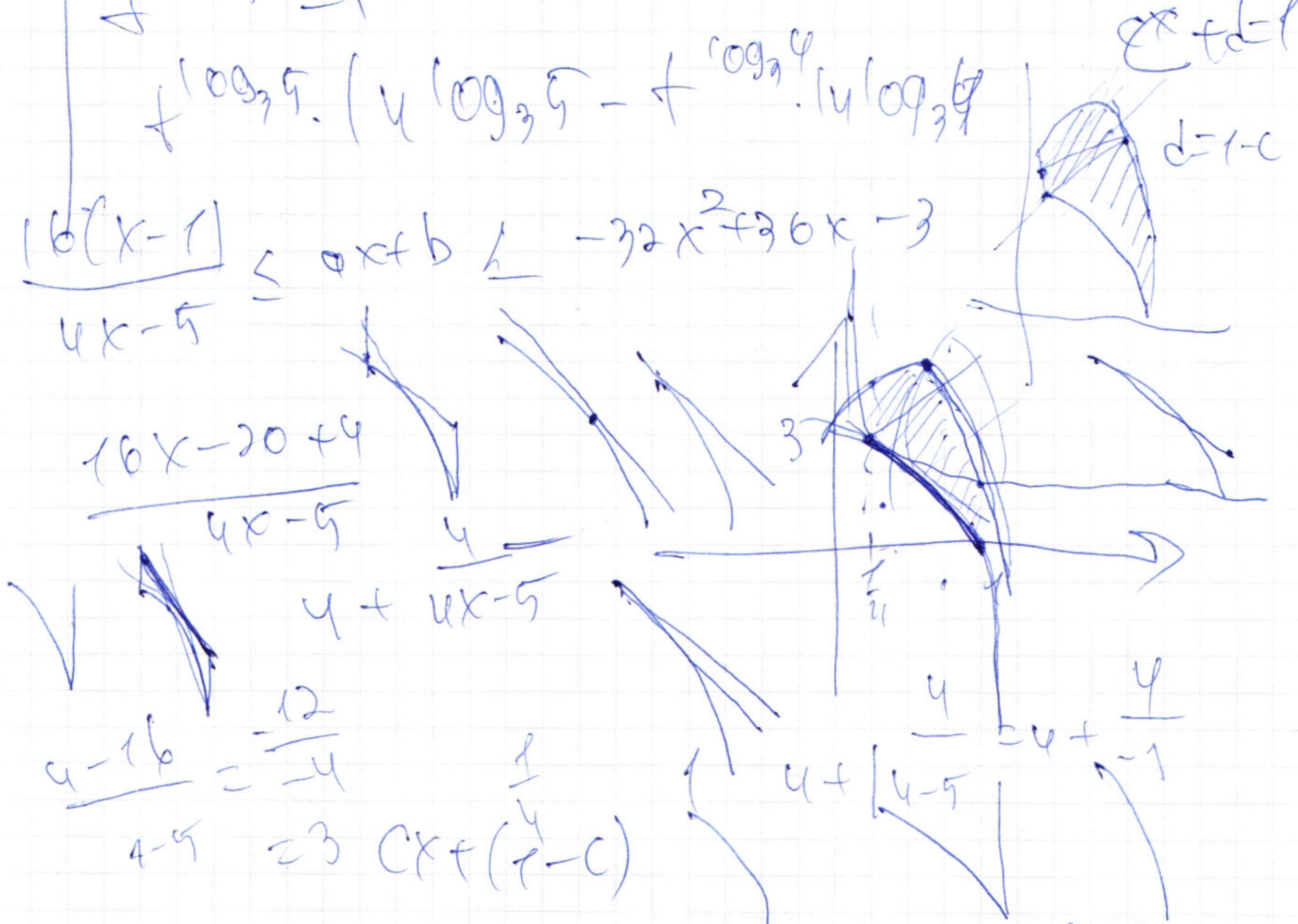
$cx+d=1$

$d=1-c$

$\frac{16(x-1)}{4x-5}\le ax+b<-32x^2+36x-3$

$\frac{16x-20+4}{4x-5}$

$4+\frac{4}{4x-5}$



$\frac{4-16}{4-5}=\frac{-12}{-4}=3 \quad cx+(1-c)$

$4+\frac{4}{4-5}=4+\frac{4}{-1}$

$-2+9-3=4$

$-32x^2+36x-3$

$\frac{+36}{2\cdot 32}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$

$\frac{D}{4}=324-96=228$

$162-$
$276=$
114

$-32\cdot 9^2+48\cdot 92$

$\frac{-2+9-3}{4} \quad -\frac{32\cdot 9^2}{16^2}+\frac{36\cdot 9}{16}-3 \quad 16(2\cdot 81-3\cdot 92)$

$\frac{114\cdot 16}{16^2}$

$-32\cdot 9^2+36\cdot 9\cdot 16-3\cdot 16^2$

$16(36\cdot 9-3\cdot 16)$

$\frac{114}{16}$

$3\le a\frac{1}{4}+b<4$

$12\le a+4b\le 16$

$0\le a+b\le 1 \quad 63 \quad a+b\le 1$

$-b\le a\le 1-b$

$=48(12\cdot 9-16)$

$108-16=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(16x-16)(16x^2-40x+25)$ $256x^3-640x^2+400x-384x^2+640x$

$\cancel{10x+}$ $\frac{16\cdot 3}{4}-16=-4$ $10x-x^2>0$ $x(x-10)<0$ $-384x^2+16$

$x^2-10x<0$ $(0;10)$ $256x^3-672x^2$

$\cancel{\log_3 10x}$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ $256x^3-296x^2+1040x-400=0$

$10x+4^{\log_3(10x-x^2)}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)+4^{\log_3(10x-x^2)}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$ $256x^3$

$t+4^{\log_3 t}\geq 5^{\log_3 t}$

$(10x-x^2)\geq 5^{\log_3 t}-4^{\log_3 t}$

25 $256(4x-3)x^2$

$\frac{4}{3}\cdot 256$ $\frac{1024}{3}$

$296-\frac{1024}{3}$ 192

$t+4^{\log_3 t}-5^{\log_3 t}$

$2688-1024-704x^2$

$=1664$ 176

$f(t)\ t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}$

$f(x)=(10x-x^2)+(\ )^{\log_3 4}-(\ )^{\log_3 5}$ $-176x(4x-3)$

$f'=$

$4+\frac{4}{4x-5}=cx+c$ $f'=-2x+10+(-2x+10)\cdot(\ )^{\log_3 4}\cdot\log_3 4$

$cx+c-\frac{16x-16}{4x-5}=0$ $(-2x+10)(1+(\ )^{\log_3 4}\ldots)$

$10-2x$ $(\ )^{\log_3 5}$

$16x-16$ $-\frac{16}{(4x-5)^2}$ $\frac{3}{4}$ $176\cdot 3=528$ $1040-528=512$

$c=-4$ $c=16$ $(cx+c)(4x-5)^2=-16$

$\frac{3c}{4}-c=-4$ $c=16$ $+912x$ $128(4x-3)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(3\cdot 5)=1$

$f(15)=1$

$f(3)=0$ $f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(15)=1$

$f(10)=1$

$f(4)=0$

$f(6)=0$

$f(8)$

$f(1)=f(\frac{5}{7})+f(\frac{7}{5})$

$f(\frac{7}{5})=-f(\frac{5}{7})$

$f(1)=0$			
$f(2)=0$			
$f(3)=0$			
$f(4)=0$			
$f(5)=1$		-1	7
$f(6)=0$			
$f(7)=1$		-1	7
$f(8)=0$			
9	0		
10	1	-1	7
11	2	-2	
12	0		
13	3	-3	
14	1	-1	
15	1	-1	
16	0		
17	4	-4	
18	0		
19	4	-4	
20	1	-1	
21	1	-1	
22	2	-2	
23	5	-5	
24	0		
25	2	-2	

$f(\frac{5}{7})=f(5)+f(\frac{1}{7})$

$1 \quad -1$

0

$140+5+1=146$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(50)=1+f(a)$

$f(\frac{2}{5})=f(2)+f(\frac{1}{5})$ $f(\frac{1}{5})=$

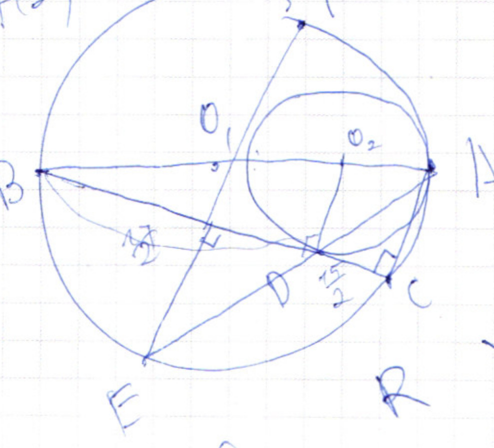
$=f(2)-$

$f(1)=2+f(\frac{1}{11})$

$f(\frac{1}{11})=-2$

$f(\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})+f(3)$

$f(\frac{1}{17})=f(17)+f(\frac{1}{17})$



R r

$(R+R-2r)\cdot(2R=\frac{17}{2}$

$(2R-2r)\,2R=\frac{17}{2}$

$(R-r)\;R=\frac{17}{8}$

$\dfrac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}}=\dfrac{2R-r}{2R}$

$2R-r\cdot\frac{32}{2}=2R\,\frac{17}{2}$

$(2R-r)\,16=17R$

$32R-16r=17R$

$16r=15R$

$R=\frac{16}{15}r$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

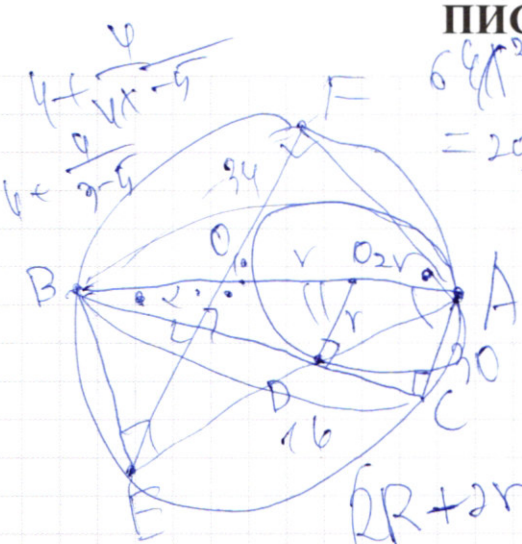
$4+\frac{4}{4x-5}$

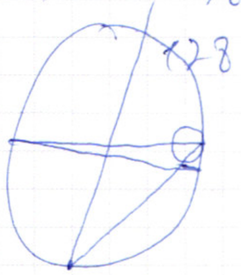
$4+\frac{4}{x-4}$

$64x^2(4x-3)+176x(4x-3)$

$=256x^3-192x^2-704x^2+528x+512x-384$

$34^2-16^2=50\cdot 18$



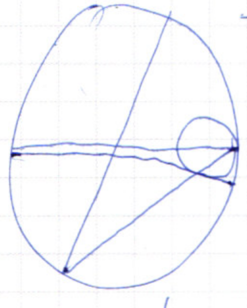


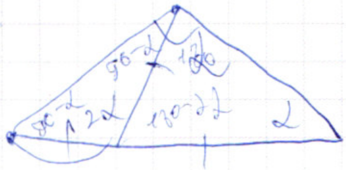
R, r $\frac{176}{528}$ $5^2\cdot 2^2\cdot 3^2$

$(2R+2r)\cdot 2R=\frac{17^2}{4}$

$=\frac{BD}{BC}$ $\frac{2R-r}{2R}$ $\frac{2R-r}{r}=\frac{\frac{17}{2}}{\frac{15}{2}}$ $\frac{2R-r}{r}=\frac{17}{15}$

$(64x^2-176x+128)(4x-3)$





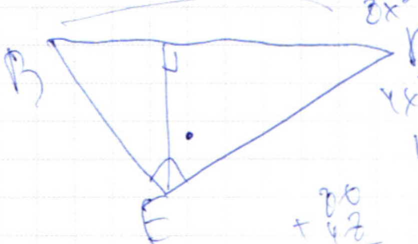
$30R-15r=17r$

$R=\frac{16r}{15}$

$32x^2-88x+64$

$16x^2-44x+32$

$8x^2-22x+16$



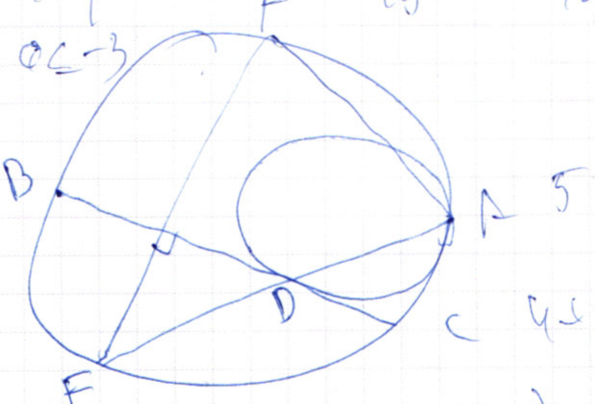
$4x^2-11x+8$

$121-16\cdot 8$

$(R+r)R=\frac{17^2}{16}$

$a+8\le a+b\le 1$ $\frac{31}{15}r\cdot\frac{16r}{15}=\frac{17^2}{16}$

$a\le -3$



$r^2=\frac{17^2\cdot 15^2}{16^2\cdot 31}$ $\le a+b\le 1$

$a+2a+2b\ge 5$

$R=17$ $a\ge -3$

$r=\frac{17\cdot 15}{16}$

$4+\frac{4}{4x-5}$ $a\ge -b$

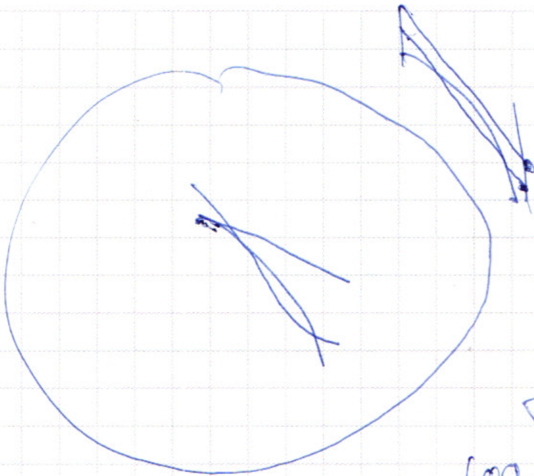
$b\ge 4$

$a\ge -b$ $a\ge 5-2b$ $4a+8b\ge 20$

$a+2b\ge 5$

$f'=\frac{-16}{(4x-5)^2}$ $1-b\ge 5-2b$ $5-2b\le a\le 1-b$ $a+b\le 1$

$10x-x^2 = t \cdot 4 + t^{\log_3 4}(1-t^{\log_3 \frac{5}{4}}) \geq 0$



$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$10-t$

$t=9$

$9+16-25$

$34^2 - 4 \cdot 17^2$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}} \geq 0$

$t + t^{\log_3 4}(1-t^{\log_3 \frac{5}{4}})$

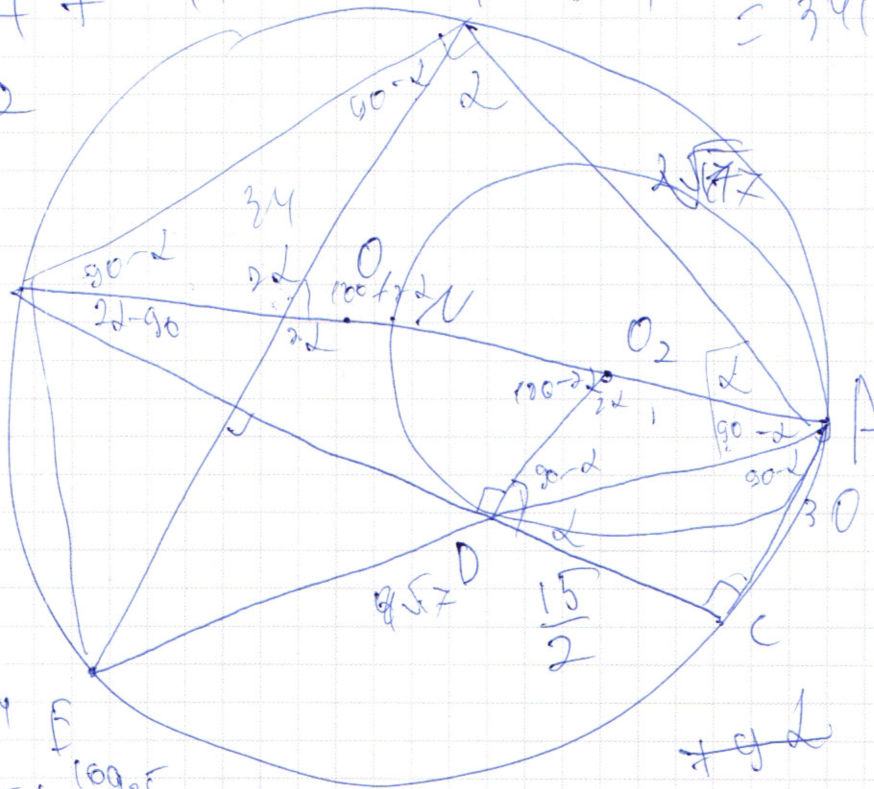
$3^x = \frac{5}{4}$

$= 34(34-2)$

$10x-x^2$

$(0; 25)$

9



32

$27+4^3-5^3<0$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 4$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{30}{\frac{15}{2}} = 4$

$5t-4t$

$+t^{\log_3 4}$

$17 - t^{\log_3 5}$

~~$\mathrm{tg}\,\alpha$~~

$\sin 2\alpha = \frac{\frac{15}{2}}{34}$ $\frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

$256+16$

$\sin(2\alpha - \frac{\pi}{2})$

$= -\cos 2\alpha$

$5t - t^{\log_3 5} \geq 4t - t^{\log_3 4}$

$17 \times 15 = 255$

$\cos\alpha = \frac{AF}{34}$ $\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{AF}{34}$

$AF = 2\sqrt{17}$

$68 \cdot 17 = 34 \cdot 34$

$5t - 5^{\log_3 t} \geq 4t - 4^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$t \geq$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)