МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 Задача продолжение

Всего будет

$72 + \overset{51}{\cancel{34}} + 40 + 44 + 24 = 241$

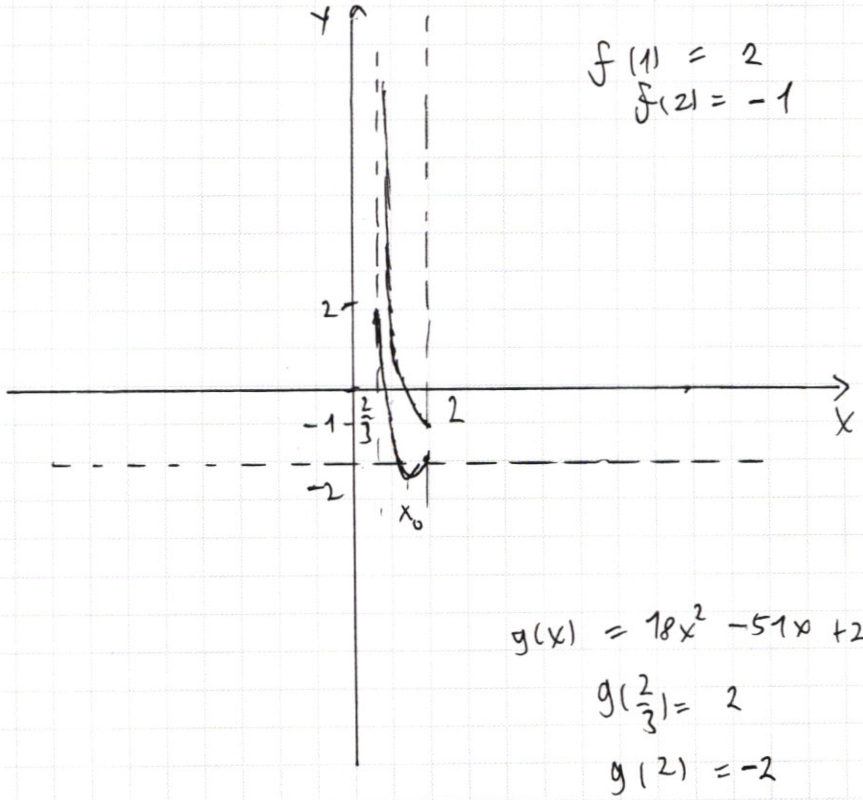
Ответ: 241

6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$f(x)\ \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4-6x}{3x-2} + \frac{4}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$$

Изобразим графики на координ.



$f(1) = 2$

$f(2) = -1$

$g(x) = 18x^2 - 51x + 28$

$g(\frac{2}{3}) = 2$

$g(2) = -2$

x_0 в $g(x)$ $\frac{2}{3} < \frac{51}{36} < 2$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

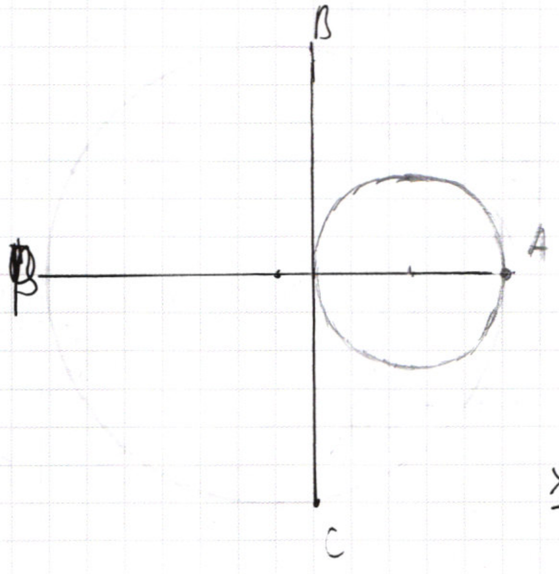
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13} \\ t \geq 0 \end{cases}$$

4

$$4R_1^2 - 4R_2 \cdot R_1 = 169$$

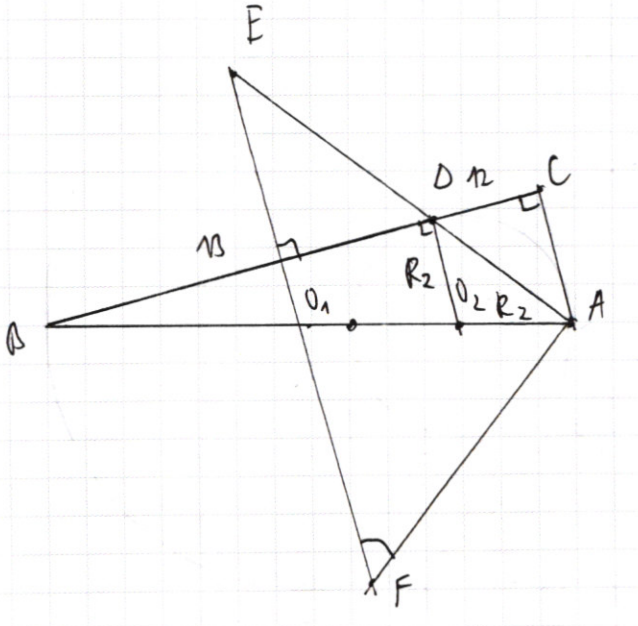
$$4R_1^2 - \frac{4 \cdot 24 \cdot R_1^2}{25} = 169$$



$13 \times 12 = 26$

$\times 13 = 156$

24×4



$CD = 12$

$BD = 13$

$$BD^2 = 2R_1 \cdot (2R_1 - 2R_2)$$

$$\cancel{BD^2 + R_2^2 = (2R_1 - R_2)^2}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$$

$$\frac{12}{25} = \frac{2R_1 - R_2}{2R_1}$$

$$\frac{BO_2}{BA} = \frac{13}{25} \qquad BO_2 \cdot BA = 13^2$$

$BA = \frac{25}{13} \cdot BO_2$

$BO_2 = \frac{13}{25} \cdot BA$

$BA^2 \cdot \frac{13}{25} = 13^2$

$BA^2 = 13 \cdot 25$

$BAF\ 5\sqrt{13} = 2R_1$

$\cancel{BA = \frac{13 \cdot 5}{\sqrt{12}} = \frac{65}{\sqrt{12}} = 2R_1}$

$R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{13}$

$\boxed{\cancel{R_1 = \frac{65}{4\sqrt{12}}}}$

$R_1 = \frac{5}{2}\sqrt{13}$

BO_2

$\cancel{BA = 2R_1}$

$\cancel{BO_2 = \frac{12}{25} \cdot \frac{65}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12} \cdot 13}{5} = 2R_1 - R_2}$

$BO_2 = \frac{13}{25} \cdot BA$

$2R_1 - R_2 = \frac{13}{25} \cdot 5\sqrt{13} = \frac{13\sqrt{13}}{5}$

$\cancel{R_2 = 2R_1 - \frac{13\sqrt{12}}{5} = \frac{12 \cdot 65}{2\sqrt{13}} - \frac{13\sqrt{12}}{5} =}$

$R_2 = 5\sqrt{13} - \frac{13}{5}\sqrt{13}$

$5 - \frac{13}{5} = \boxed{\frac{12}{5}\sqrt{13}} = R_2$

2) $\angle AFE - ?$

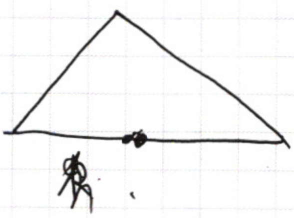
$$\begin{cases} ED \cdot DA = BD \cdot DC \\ 2R_1 = \frac{AE}{\sin\angle AFE} \end{cases}$$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$

$\frac{a}{\cancel{\ }} = 2R$

1) Найдем AD

$\frac{DO_2}{AC} = \frac{R_2}{AC} = \frac{13}{25}$



$AC = \frac{R_2 \cdot 25}{13} = \frac{12 \cdot \sqrt{13} \cdot 25}{13 \cdot 5} = \frac{12 \cdot 5}{\sqrt{13}} = \frac{60}{\sqrt{13}}$

$DA^2 = DC^2 + AC^2 = 12^2 + \frac{60^2}{13} = 12^2 + \frac{12^2 \cdot 5^2}{13} =$

$12^2 (1 + \frac{5^2}{13} = \left(\frac{13+25}{13}\right) \cdot 12^2 = \frac{38}{13} \cdot 12^2 \equiv DA^2$

$12^2 \ (\cdot 13 + 5^2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin(2\beta)$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$

$2\left(\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}\right) =$

$= \cancel{2} \sin\alpha \cos^2\frac{\beta}{2} + \sin\beta \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\beta \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha \cdot \sin^2\frac{\beta}{2}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (2) \end{cases}$$

$2(\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot (\sin 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cancel{\sin 2\beta} =$

$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \overset{\sin 2\beta}{V} = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$12^2 - 13^2 + 25 \geq 0$

$-25 + 25 \geq 0$

$\cancel{6^{\log_5 12}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$6^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq 6^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$\cancel{6^{\log_5 \frac{12}{5}}}$ $6^{\log_5 12} + 6 \geq 6^{\log_5 13}$

$t = 25$

2
$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$y-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} =$$

$$y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+9+y^2-2\cdot y\cdot 6+36=45$$

$$(3x-3)^2+(y-6)^2=0$$

$$\begin{cases} \cancel{(y-6x)} = \\ \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} y=6 \\ x=1 \end{matrix}}$$

3
$$|6^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

1
14
×14
56
+14
196

$\cancel{x^2-26x}$

$$x^2-26x=t$$

$$|t|^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(-t)}$$

5425 | 25
50 | 217
42
-25
175

217 | 7
21 | 31
7

1710 | 9
-9 | 190
81
-81

$\cancel{-t<0}$

$t<0$

$$(-t)^{\cancel{\log_5 12}} \geq t+13^{\log_5(-t)}$$

$$n^2+h^2+2h^2+8h^2-8mn=90$$

$$9m^2+3h^2-8mn=90$$

$t \geq 0$

$$|-t|^{\log_5 12} \cancel{+} +t \geq 13^{\log_5 t}$$

90
×25
450
180
2250

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$y-6-6x+6$$

×90
8
540

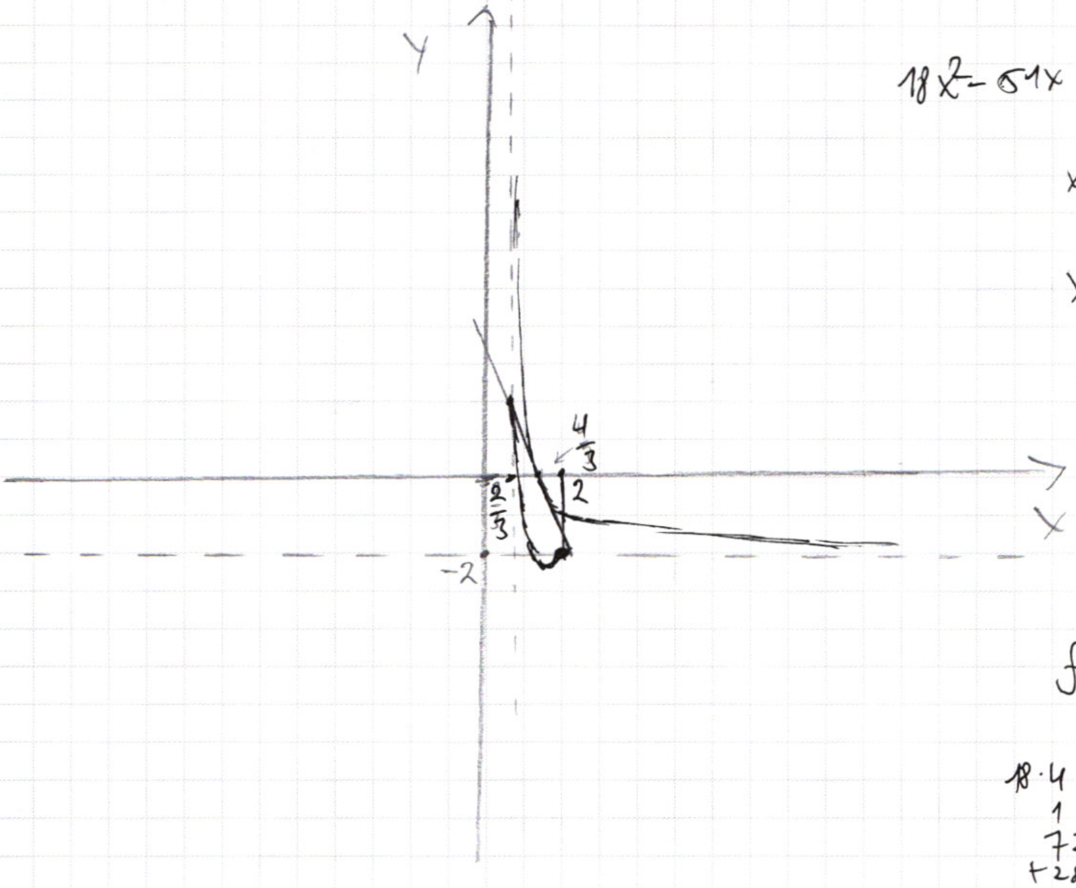
2250
540
1710

$$\begin{cases} t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13} \\ t\geq 0 \end{cases}$$

$$t(1+t^{\log_5 12-1}) \geq t^{\log_5 13} \qquad 1+t^{\log_5 \frac{12}{5}} \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$18x^2 - 51x + 28$

$x = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$x\left(\frac{2}{3}\right) =$

$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 =$

$8 - 34 + 28$

2

$f(2) =$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28$

$72 + 28 = 100 - 102$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $f(y)=2$ $\quad f(x)=0\ ,\ 1$

$9+8$

3 $\quad 3\cdot 17 = 51$

3) $f(y)=3)$ $\quad 9+8+3= \quad 2\cdot 20 = 40$

2

4) $f(y)=4$ $\quad 9+8+3+2= \quad 2\cdot 22 = 44$

2

5) $f(y)=5$ $\quad 28-4=24+1=25$

1 · 24 $\quad$ 24

$72+51+40+44+24 = 123+84+24$

$$\begin{array}{r} 123 \\ +\ 84 \\ \hline 217 \\ +\ 24 \\ \hline 241 \end{array}$$

Ответ: 241

6 $\quad x=2 \quad -\frac{4}{4}$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4-6x+4}{3x-2} \quad \frac{}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 = \frac{4}{3(x-\frac{2}{3})} = \frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}} - 2$$

$4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$x \geq y$ $\qquad \frac{x}{y} \geq 1$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f(y) = f(1) - f(y)$

$f(2) = f(2) + f(1) = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$f(1)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) +$

$f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) =$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + 0 - f(y) > f(x) - f(y) < 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $\qquad f(5) = 1$ $\qquad f(6) = f(2) + f(3) = 0 + 0$

$f(y) > f(x)$

$f(7) = 1$

4 = 0	25 = 2	$f(4) + f(2) = 0$
5 = 1	26 = 3	$x = 2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{\gamma} \ldots$
6 = 0	27 = 0	
7 = 1	28 = 1	$f(x) = \alpha \cdot \left[\frac{2}{4}\right] + \beta$
8 = 0		
9 = 0		
10 = 1		
11 = 2		
12 = 0		
13 = 3		
14 = 1		
15 = 1		
16 = 0		
17 = 4		
18 = 0		
19 = 4		
20 = 1		
21 = 1		
22 = 2		
23 = 5		
24 = 0		

$f\,f(4) + f(7)$ $\qquad f(2) + f(9) = f(2) + 2 \cdot f(3) = 0$

$\frac{17}{4} > 4$

$f(y) > f(x)$

1) $f(y) = 1 \Rightarrow f(x) = 0$

8 $\qquad$ 9 $\qquad$ 72

$f(4) + f(6)$

$0 + f(2) + f(3)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$DA = \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{13}} \cdot 12$$

D

$$ED \cdot DA = 12 \cdot 13$$

$$ED = \frac{12 \cdot 13}{DA} = \frac{12 \cdot 13 \cdot \sqrt{13}}{12 \cdot \sqrt{38}} = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{38}}$$

$$EA = ED + DA = \frac{13\sqrt{13}}{\sqrt{38}} + \frac{\sqrt{38}}{\sqrt{13}} \cdot 12 = \frac{13^2 + 38 \cdot 12}{\sqrt{38 \cdot 13}}$$

$$\sin \angle AFE = \frac{AE}{2R_1} = \frac{13^2 + 38 \cdot 12}{5\sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{38}} = \cancel{169 + 458} \quad \frac{825}{5 \cdot 13 \cdot \sqrt{38}} =$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 12 \\ \hline 76 \\ +38 \\ \hline 458 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 458 \\ +169 \\ \hline 625 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 625 \\ -50 \\ \hline 125 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 25 \\ 25 \end{array}$$

$$\frac{5^4}{5 \cdot 13 \cdot \sqrt{38}} = \frac{5^3}{13\sqrt{38}}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 8 \\ \hline 78 \end{array} \qquad 125 \,\Big|\, \begin{array}{l} 13 \\ 7 \end{array}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{4}{\cancel{\sin 90}}$$

5

$$4 \le x \le 28$$

$$4 \le y \le 28$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot \sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot \cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$$

$$= -\frac{2}{17}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17} \end{cases} \downarrow$$

$$\cos 2\beta = \frac{-\frac{2}{17}}{-2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{\frac{17-1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cdot\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$9x^2-18x+9+y^2-12y+36-45=45$$

$$\begin{cases} (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \\ y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \end{cases}$$

Пусть $y-6=n$, $3x-3=m$

$$\begin{cases} m^2+n^2=90 \\ n-2m=\sqrt{mn} \end{cases}$$

$\cancel{m, n \geq 0}$

$mn \geq 0$ и $n \geq 2m$

$$\begin{cases} m^2+n^2=90 \\ n\geq 2m \\ (n-2m)^2=mn \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2+n^2=90 \\ n^2-4mn+4m^2=mn \\ n\geq 2m \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2+n^2=90 \\ 4m^2+n^2=5mn \\ n\geq 2m \end{cases} \Rightarrow 3m^2=5mn-90$$

$$n=\frac{3m^2+90}{5m}$$

$$3m^2-5mn+90=0$$

$$\cancel{m=\frac{5n\pm\sqrt{25n^2-4\cdot 2\cdot 90}}{6}}$$

$$\begin{cases} m^2+n^2=90 \\ n=\frac{3m^2+90}{5m} \\ n\geq 2m \end{cases}$$

$$m^2+\frac{(3m^2+90)^2}{25m^2}=90$$

$$25m^4+9m^4+540m^2+8100=90\cdot 25m^2$$

$m\neq 0$

$$36m^4-1710m^2+8100=0$$

$$9(4m^4-190m^2+900)=0$$

$$18(2m^4-95m^2+450)=0$$

$m^2 = t \qquad t > 0$

$$t = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 - 8 \cdot 450}}{4} =$$

$(100-5)^2 =$

$10000 - 1000 + 25 =$

$450 \cdot 8 = 3600$

$9025 - 3600 = 5425$

$$t = \frac{95 \pm 5\sqrt{217}}{4} = m^2$$

$$\begin{cases} \cancel{m^2} = \frac{95 \pm 5\sqrt{217}}{4} \\ \cancel{y=61} \end{cases}$$

3

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$$

Пусть

$\cancel{x^2 - 26x}$ $\quad 26x - x^2 = t$

$$|-t|^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 (\cancel{26}\, t)}$$

по смыслу задачи $t \geq 0$ то

по св-ву log $\quad t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$$

$$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geq 0$$

$$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} \geq -t$$

$$t \geq t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12}$$

$$1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}} - t^{\log_5 \frac{12}{5}}$$

при $t = 25$

$$25^{\log_5 \frac{13}{5}} - 25^{\log_5 \frac{12}{5}} = 1$$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 1$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 задача продолжение

$f(t) = t^{\log_5 \frac{13}{5}} - t^{\log_5 \frac{12}{5}}$ — возрастающая функция

и $f(t) \le 1$ $\quad (f(t) = 1$ при $t = 25)$

значит

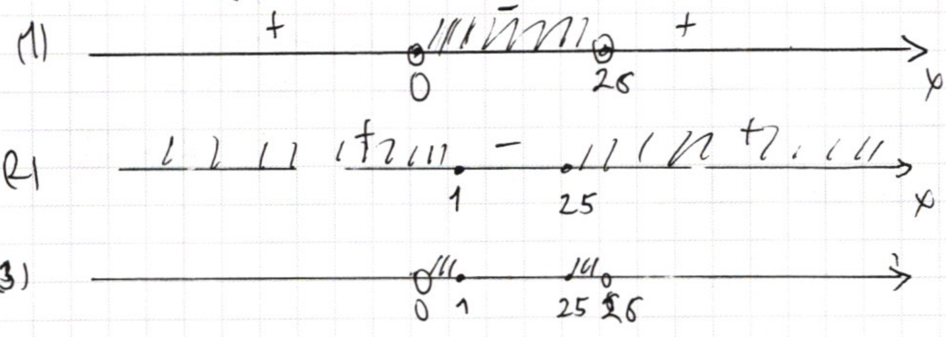
$t \le 25$

также по смыслу задачи $t > 0$

$0 < 26x - x^2 \le 25$

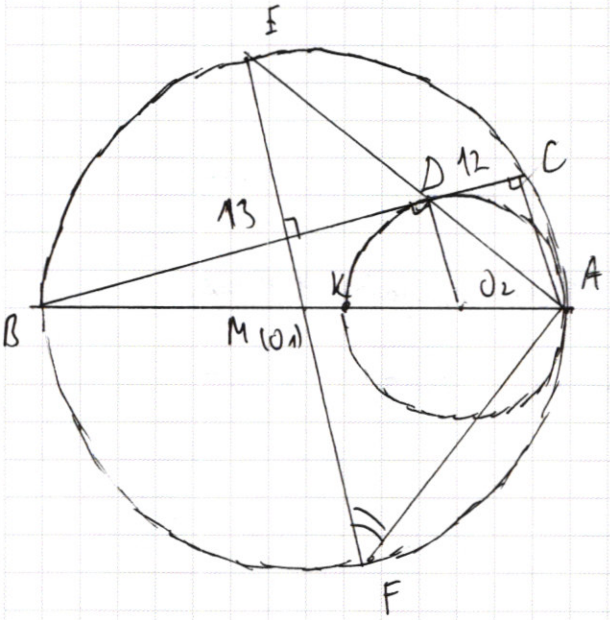
$$\begin{cases} x(26-x) > 0 \\ x^2 - 26x + 25 \ge 0 \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x(x-26) < 0 & (1) \\ (x-1)(x-25) \ge 0 & (2) \end{cases}$$



Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

4 Задача



$BD=13$

$CD=12$

1) по св-ву секущих и касательных для w

$BD^2 = BK \cdot BA$

$BK = BA - KA$

$BA = 2R_1$ (радиус Ω) $KA = 2R_2$ (радиус w)

2) $\angle BCA = 90$ т.к опирается на диаметр

тогда

$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BO_2}{BA}$ (подобие ΔBDO_2 и BCA)

$\dfrac{13}{25} = \dfrac{BO_2}{BA}$ $BO_2 = \dfrac{13}{25} \cdot BA$ $BO_2 = 2R_1 - R_2$, $BA = 2R_1$

$BD^2 =$

$26R_1 = 25(2R_1 - R_2)$

$26R_1 = 50R_1 - 25R_2$

$BK = 2R_1 - 2R_2$ $24R_1 = 25R_2$

$R_2 = \dfrac{24R_1}{25}$

$13^2 = BK \cdot BA$

$169 = (2R_1 - 2R_2) \cdot 2R_1$

$4R_1^2 - 4R_2 \cdot R_1 = 169$

$4R_1^2 - \dfrac{24 \cdot 4 \cdot R_1^2}{25} = 169$

$\dfrac{100R_1^2 - 96R_1^2}{25} = 169$ $4R_1^2 = 169 \cdot 25$

$R_1 = \dfrac{13 \cdot 5}{2} = \dfrac{65}{2}$

$R_2 = \dfrac{24 \cdot 65}{2 \cdot 25} = \dfrac{12 \cdot 13 \cdot 5}{25} = \dfrac{12 \cdot 13}{5} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 Задача

$R_1 = \frac{65}{2}$ $R_2 = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

б) $\angle AFE - ?$

1) $DO_2 \perp BC$ (т.к D - точка касания)
$EF \perp BC$ (по условию) $\Rightarrow EF \parallel DO_2$

Пусть $EF \cap BA = M$ тогда

$\triangle DO_2A$ - равнобедренные $DO_2 = O_2A$

$EM \parallel DO_2 \Rightarrow \triangle EMA \sim \triangle DO_2A \Rightarrow$

$\triangle EMA$ - равнобедр $ME = MA$

А т.к т. M находится на диаметре и $MA = ME$

значит M это и есть центр окружности т.е

$M = O_1$

2) $\cancel{\frac{AD}{AE} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\frac{12\cdot 13}{5}}{\frac{65}{2}} = \frac{24 \cdot 13}{65 \cdot 5}}$ по св-ву пересек хорд

$BD \cdot CD = ED \cdot DA$

$AD^2 = DC^2 + AC^2$ ($\angle BCA = 90°$)

3) $\frac{DO_2}{CA} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{25}$ $DO_2 = R_2$

$CA = R_2 \cdot \frac{25}{13} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{5 \cdot 13} = 12 \cdot 5 = 60$

$DA = \sqrt{12^2 + 60^2} = \cancel{\sqrt{144 + 3600}} = \cancel{\sqrt{3744}}$ $\sqrt{12^2(1+25)} = 12\sqrt{26}$

4 Задача

$BD \cdot CD = ED \cdot DA$ (из (2))

$$ED = \frac{BD \cdot CD}{DA} = \frac{12 \cdot 13}{12\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$EA = ED + DA = \frac{\sqrt{26}}{2} + 12\sqrt{26} = \frac{25\sqrt{26}}{2}$$

по теореме синусов

$$\frac{EA}{\sin\angle AFE} = 2R_1$$

$$\sin\angle AFE = \frac{EA}{2R_1} = \frac{\frac{25\sqrt{26}}{2}}{2 \cdot \frac{65}{2}} = \frac{25 \cdot \sqrt{26}}{5 \cdot 13 \cdot 2} =$$

$$\sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{25}$$

в) 1) EF – диаметр т.к. EF проходит через O_1 (д-но из б) в (1))

$$S_{\Delta AFE} = \frac{EA \cdot AF}{2}$$

$$\angle EAF = 90$$

$$1 + tg^2\angle AFE = \frac{1}{\cos^2 AFE} \qquad \cos^2 AFE = 1 - \sin^2 AFE = \frac{26-25}{25} = \frac{1}{25}$$

$$1 + tg^2\angle AFE = 25 \quad tg\angle AFE = \sqrt{24}$$

$$tg AFE = \frac{EA}{FA} \qquad FA = \frac{EA}{tg\angle AFE} = \frac{\frac{25 \cdot \sqrt{26}}{2}}{\sqrt{24}} = \frac{25\sqrt{13}}{2\sqrt{12}}$$

$$S_{\Delta AFE} = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{\frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot \frac{25 \cdot \sqrt{13}}{2\sqrt{12}}}{2} = \frac{25^2 \cdot 13 \cdot \sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{12}} = \frac{25^2 \cdot 13}{8\sqrt{6}}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/4]$

$4 \le X \le 28$

$4 \le Y \le 28$

$f\left(\frac{X}{Y}\right) < 0$

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \\ f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \end{cases}$$

Найдем $f(1)$

$f(2) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$0 = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

По условию $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

Найдем значения функции от 4 до 28

$f(4) = f(2) + f(2)$ $\quad f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$ $\quad f(2) + f(2) + f(2)$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

$f(28) = \cancel{2}\ 1$

по условию

$f(y) > f(x)$

1) Пусть $f(y) = 1 \Rightarrow f(x) = 0$

значений $f(y) = 1$ ~~может~~ бы 8 $\quad f(x) = 0$ – 9 значений

$8 \cdot 9 = 72$

2) $f(y) = 2$ $\quad$ таких значений 3

$f(x) = 0$ или $f(x) = 1$

$9 \qquad 8$

$\cancel{2} \cdot (9+8) = \cancel{34}\ 51$

3) $f(y) = 3$ $\quad f(x) = \{0; 1; 2\}$

2 значения

$9 + 8 + 3 = 20$

$\cancel{2} \cdot (9+8+3) = 40$

4) $f(y) = 4$ $\quad f(x) = \{0; 1; 2; 3\}$ $\quad 9+8+3+2 = 22$

$2 \cdot$

$2 \cdot 22 = 44$

5) $f(y) = 5$ $\quad f(x) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ $\quad 9+8+3+2+2 = 24$

1

$24 \cdot 1 = 24$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)