МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\sin\frac{4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{17}\end{cases}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cos 2\beta + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

заметим, что $1+tg^2\alpha > 0$

$\pm\frac{2}{\sqrt{17}} tg\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}(1-tg^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+tg^2\alpha)$

$\pm 2tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$\pm 2tg\alpha = 3tg^2\alpha - 5$

$3tg^2\alpha \pm 2tg\alpha - 5 = 0$

$\left[\begin{array}{l}3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 5 = 0\\ 3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0\end{array}\right.$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l}tg^2\alpha + \frac{2}{3}tg\alpha - \frac{5}{3} = 0\\ tg^2\alpha - \frac{2}{3}tg\alpha - \frac{5}{3} = 0\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2\alpha + \frac{2}{3}tg\alpha - \frac{5}{3} = 0 \\ tg^2\alpha - \frac{2}{3}tg\alpha - \frac{5}{3} = 0 \end{array}\right.$$

$$\cancel{(tg\alpha - 2)(tg\alpha -)}$$

$$tg\alpha = \frac{\pm\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{20}{3}}}{2} = \frac{\pm\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{64}{9}}}{2} = \frac{\pm 2 \pm 8}{6} = \frac{\pm 1 \pm 4}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{5}{3} \\ tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 1 \\ tg\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - \frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + 1$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3+12+4}{9} = \frac{19}{9}$$

$$\cancel{3\left(y-\frac{2}{3}\right) - 2(x-1) = 3y - 2x = \sqrt{3(x-1)\left(y-\frac{2}{3}\right) - (2(x-1) - 3(y-\frac{2}{3}) + 4}}$$

$$3\left(y-\frac{2}{3}\right) - 2(x-1) = \sqrt{3(x-1)\left(y-\frac{2}{3}\right) - 2(x-1) - 3\left(y-\frac{2}{3}\right) + 4}$$

$a = x - 1 \qquad b = y - \frac{2}{3}$

$$3ab = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{19}{9} \\ \cancel{3b - 2a = \sqrt{3ab - 2a - 3b + 4}} \\ 3b - 2a = \sqrt{3ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{19}{9} \\ (3b - 2a)^2 = 3ab \\ ab \geq 0 \\ 3b - 2a \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{19}{9} \\ 9b^2 - 12ab + 4a^2 = 3ab \\ ab \geq 0 \\ 3b - 2a \geq 0 \end{cases}$$

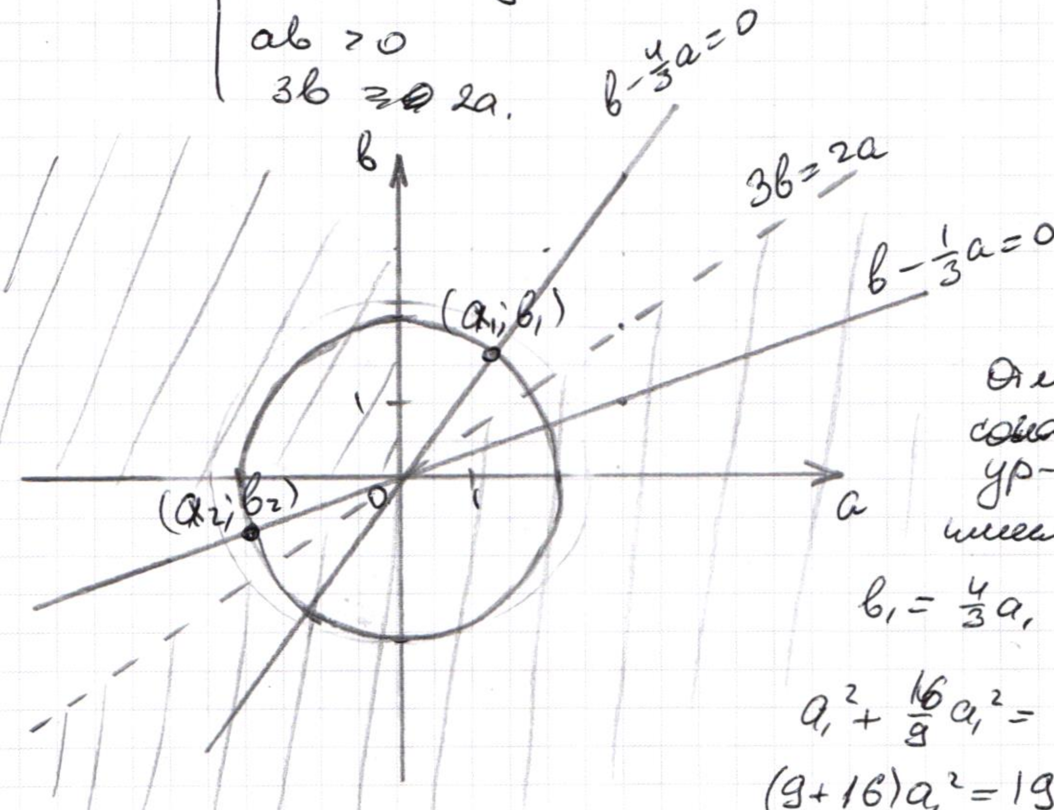
$$\begin{cases} a^2+b^2=\frac{19}{9} & ab\geq 0 \\ 9b^2-12ab+4a^2=3ab & 3b-2a\geq 0 \end{cases}$$

$$9b^2-15ab+4a^2=0$$

$$a=\frac{15b\pm b\sqrt{15^2-4\cdot 36}}{2\cdot 4}=\frac{15b\pm b\sqrt{3\cdot 27}}{2\cdot 4}=$$

$$=\frac{(15\pm 9)}{8}b$$

$$\begin{cases} (a-3b)(a-\frac{3}{4}b)=0 \\ a^2+b^2=\frac{19}{9} \\ ab\geq 0 \\ 3b\geq 2a. \end{cases} \qquad (b-\frac{1}{3}a)(b-\frac{4}{3}a)=0$$



Отметим точки, согласно ур-ниям.

имеем.

$$b_1=\frac{4}{3}a_1$$

$$a_1^2+\frac{16}{9}a_1^2=\frac{19}{9}$$

$$(9+16)a_1^2=19$$

$$a_1^2=\frac{19}{27} \qquad a_1=\sqrt{\frac{19}{27}} \qquad b_1=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{19}{27}}$$

$$x_1=1+\sqrt{\frac{19}{27}} \qquad y_1=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{19}{27}}$$

$$b_2=\frac{1}{3}a_2 \qquad a_2^2+\frac{1}{9}a_2^2=\frac{19}{9} \qquad a_2^2\cdot(10)=19$$

$$a_2^2=\frac{19}{10} \qquad a_2=-\sqrt{\frac{19}{10}} \quad b_2=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{10}}$$

$$x_2=1-\sqrt{\frac{19}{10}} \qquad y_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{10}} \Rightarrow$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{19}{27}};\ \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{19}{27}}\right);\ \left(1-\sqrt{\frac{19}{10}};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{19}{10}}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\left(\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}\right) = 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$

$= 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{y}{2}+\dots\right) =$

$= 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}\right) = \sin x+\sin y$

$\sin 2\alpha = \cancel{\frac{\sin}{tg}}\ 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\,tg\alpha\cos^2\alpha =$

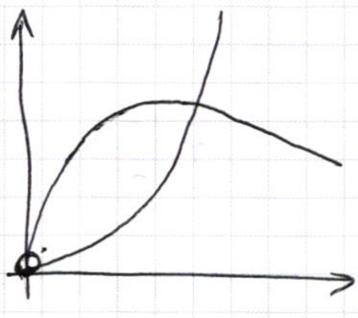
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad \sin 2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha-1 =$

$= \frac{2}{1+tg^2\alpha}-1 = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

сумма $\frac{2}{3}$, ра при $\qquad \cancel{3y}$ 2



$\frac{\pm\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{20}{3}}}{2}$

$y^{\log_4 3}+y \geq y^{\log_4 5}\qquad a^2+b^2=\frac{19}{9}\qquad 9+16\geq 25$

$9b^2-15ab+4a^2=0$

$18b^2-30ab+8a^2=0\qquad 30=2\cdot3\cdot5$

$y^{\log_4 3}+y\geq y^{\log_4 5}$

$(25-?)b^2-30ab+(9-1)a^2=0$

$y^{\log_4 5}-y\leq y^{\log_4 3}$

$9b^2-15ab+4a^2=0\qquad a=\frac{15b\pm\sqrt{15^2-4\cdot36}}{2\cdot4}=$

$y^{\log_4 5}-y^{\log}$

$=\frac{15b\pm|b|\sqrt{(15-12)(15+12)}}{2\cdot4}=$

$y^{\frac{1}{2}\log_4 5}$

$= 15b\pm b\sqrt{3\cdot 2?}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$x^2+6x > 0 \Rightarrow$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$y = x^2+6x > 0$

$$3^{\log_4 y} + y \geq y^{\log_4 5}$$

$$3^{\frac{\log_3 y}{\log_3 4}} + y \geq y^{\log_4 5}$$

$$y^{\log_4 3} + y \geq y^{\log_4 5}$$

$f(y) = y^{\log_4 5}$ $\quad g(y) = y^{\log_4 3} + y$

$f'(y) = y^{(\log_4 5 - 1)} \cdot \log_4 5$ $\quad g'(y) = 1 + y^{(\log_4 3-1)}\log_4 3$

заметим, что

$f(4) = g(4)$

при при этом

$$f'(y) - g'(y) = \log_4 5\, y^{(\log_4 5-1)} - 1 - y^{\log_4(3-1)}\log_4 3 =$$

$$= \log_4 5\, y^{(\log_4 5-1)} - \log_4 3\, y^{\log_4(3-1)} - 1$$

$f'(y) = \log_4 5\, y^{(\log_4(5)-1)}$ $\qquad$ $g'(y) = \log_4 3\, y^{(\log_4 3-1)}+1$

$\cancel{f''(y) = \log_4 5(\log_4 5-1)\, y^{(\log_4 5-2)}}$

$\cancel{g''(y) = \log_4 3(\log_4 3-1)\, y}$

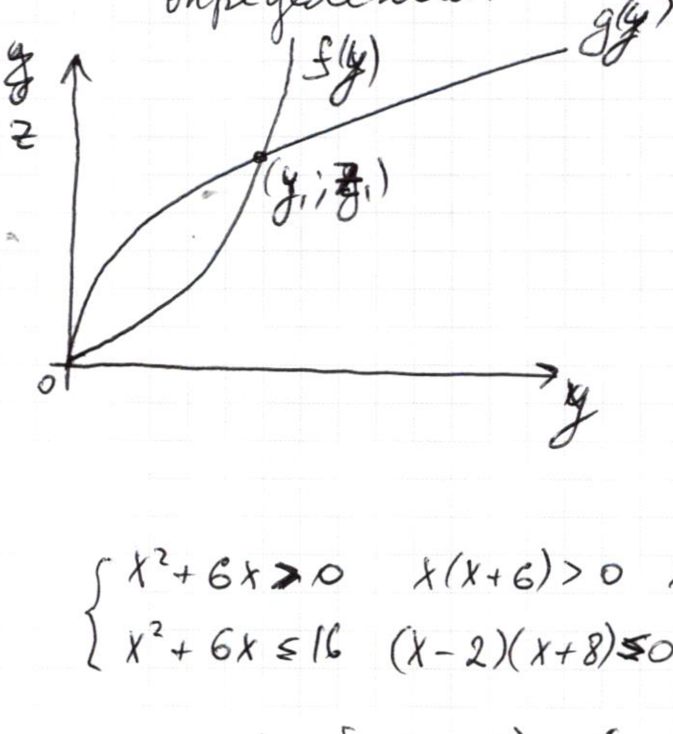
~~$\Rightarrow$ $f'(y)$ - возр~~

~~$g'(y)$ - убыв. при $y>0$ $\Rightarrow$~~

~~Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют общие пресечени точки, то их не более 2х~~

$f'(y)$ - возр $\uparrow$

$g'(y)$ - убыв. $\Rightarrow$ у функций не более 2х общих точек, одна из, которых $(0;0)$ - не входит в область определения.



заметим, что

$f(16) = 25$

$g(16) = 9+16 = 25 \Rightarrow$

при условии, что

$g(y) \le f(y)$

$y \in [0; 16]$

$$\begin{cases} x^2+6x>0 & x(x+6)>0 \quad x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x^2+6x\le 16 & (x-2)(x+8)\le 0 \quad x\in[-8;2] \end{cases}$$

$x \in [-8;-6)\cup(0;2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(1)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f(ab)=f(a)+f(b)\Rightarrow$$

$$f(a^n)=n\,f(a)\Rightarrow f(1)=0$$

~~рассмотрим $x=x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\dots$ $y=y_1^{\beta_1}y_2^{\beta_2}\dots$~~
~~где $x_1; x_2\dots$ - простые множители.~~

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

в промежутке от 1 до 27 есть 8 простых чисел.
$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 23\}$
которые могут входить в числа.
причем при 17 и 23 никакие другие числа не входят.

N	p	f(p)
1	2	0
2	3	0
3	5	1
4	7	1
5	11	2
6	13	3
7	17	4
8	23	5

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)=}$ $x=\prod_1^8 p_i^{x_i}$ $y=\prod_1^8 p_i^{y_i}$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=f\left(\prod_1^8 p_i^{x_i}\right)-f\left(\prod_1^8 p_i^{y_i}\right)$$

где x_i и y_i - степени вхождения простых сомножителей

$$=\sum_1^8 x_i f(p_i)-\sum_1^8 y_i f(p_i)$$

Заметим, что если $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$, то $f\left(\frac{y}{x}\right)<0$
т.е подходят все пары такие, что

$$f\left(\frac{x}{y}\right)\neq 0\Rightarrow x\neq y$$

Заметим, что 5 не может быть умножено более чем на 5, а 7 не более чем на 3, 13 не более чем на 2.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~=> среди не равных чисел только 7 и 5 и 14 и 10 и 12 и 24 дают 9~~

n	разложение	f(n)
3	3	0
4	2·2	0
5	5	1
6	2·3	0
7	7	1
8	2·2·2	0
9	3·3	0
10	2·5	1
11	11	2
12	2·2·3	0
13	13	3
14	2·7	1
15	3·5	1
16	2·2·2·2	0
17	17	4
18	3·3·2	0
19	19	4
20	2·2·5	1
21	3·7	1
22	11·2	2
23	23	5
24	2·2·2·3	0
25	5·5	2
26	2·13	3
27	3·3·3	0

f(x)	кол-во x
0	10
1	7
2	3
3	2
4	1
5	1

т.е кол-во пар

$$7\cdot 10 + 3\cdot(10+7) + 2\cdot(3+7+10) + (2+3+7+10) + (1+2+3+7+10)$$

$$= 70 + 51 + 40 + 22 + 23 =$$

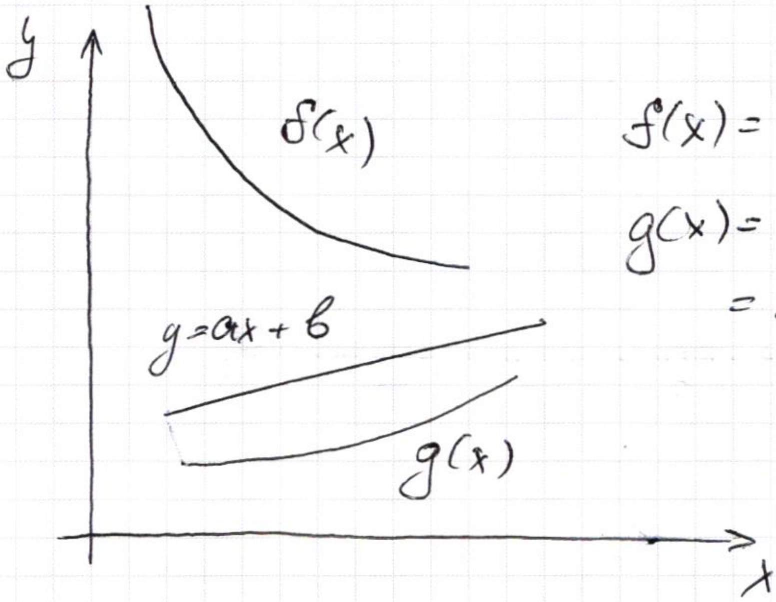
$$= 110 + 51 + 45 = 110 + 96 =$$

$= 206$ - пар. существует.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30 = g(x)$



$f(x) = \frac{(4x-3)}{2x-2}$

$g(x) = 8(x-3)(x-\frac{5}{4}) =$

$= 2(x-3)(4x-5)$

рассмотрим ур-ние

$f(x) = g(x)$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

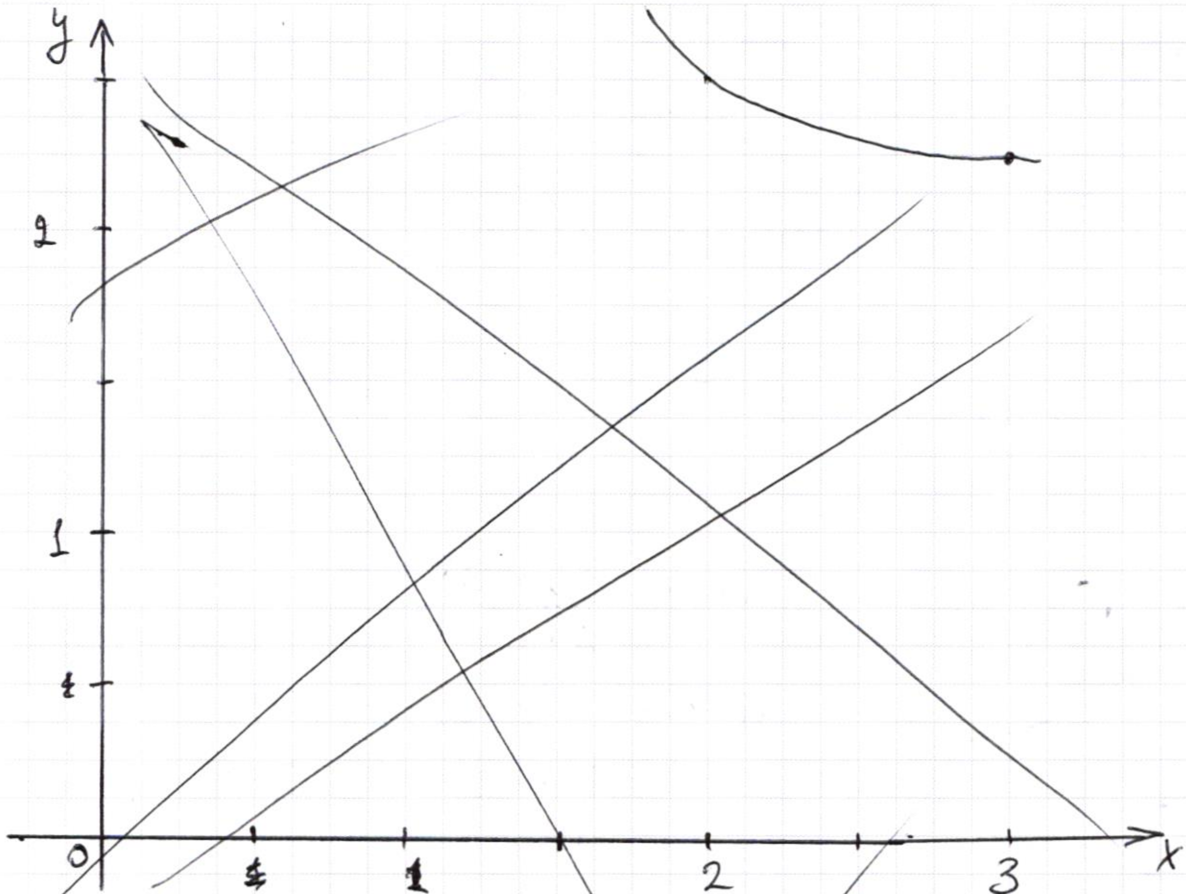
$4x - 3 = (2x-2)(8x^2 - 34x + 30) = 16x^3 - 68x^2 + 60x -$

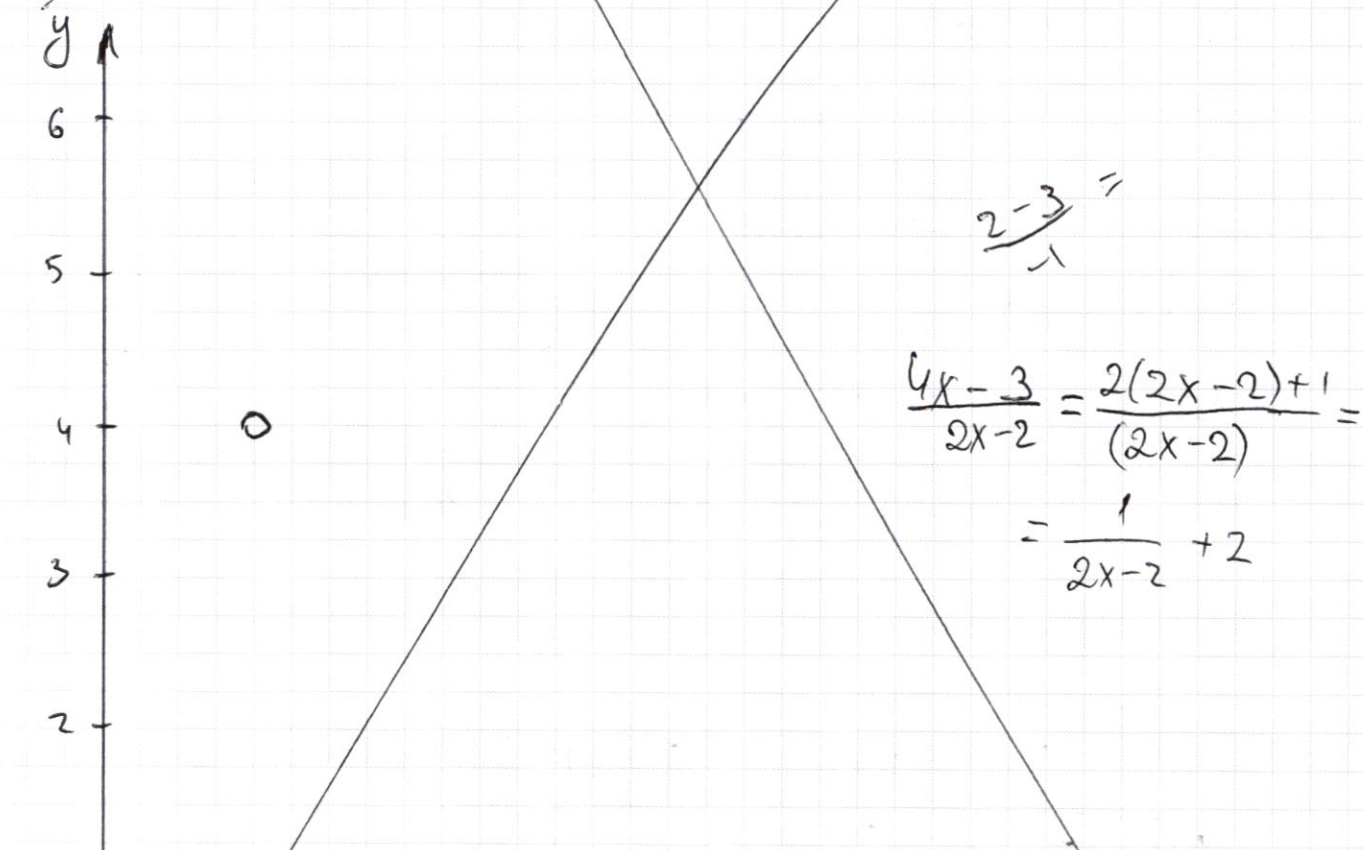
$- 16x^2 + 68x - 60$

$4x - 3 = 16x^3 - 84x^2 + 128x - 60$

$0 = 16x^3 - 84x^2 + 124x - 57$

x	f(x)	g(x)	f'(x)	
1	—	4		
2	2,5	-3		
3	$\frac{9}{4}$	0		
$\frac{3}{2}$	3			

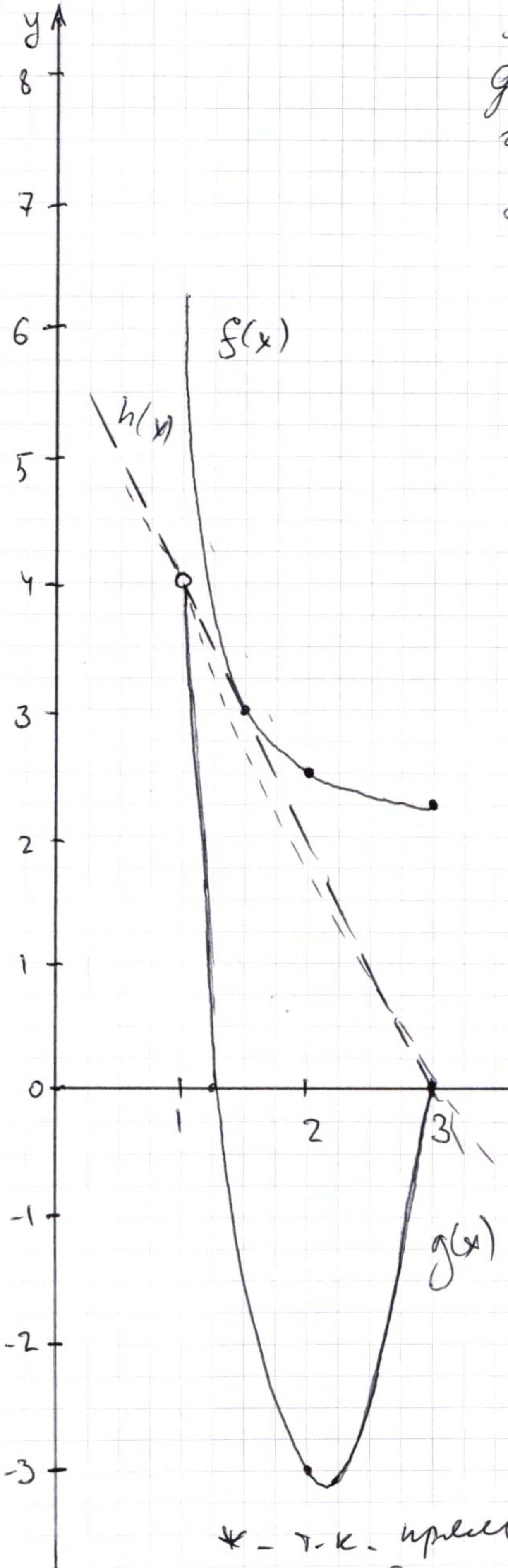




$\frac{2-3}{-1}=$

$\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{2(2x-2)+1}{(2x-2)}=$

$=\frac{1}{2x-2}+2$



Таким образом прямая $ax+b$ должна быть ниже гиперболы, но выше параболы.

$$f'(x) = \frac{4(2x-2) - 2(4x-3)}{2(2x-2)^2} = \frac{8x-8-8x+6}{2(2x-2)^2} = -\frac{2}{(2x-2)^2}$$

заметим, что если прямая выше параболы $\Rightarrow$ выше $h(x)$

$$h(x) = -\frac{(4-0)}{(3-1)}(x-1)+4 = -2x+2+4 = -2x+6$$

заметим, что данная прямая касается $f(x)$ в точке $x = \frac{3}{2}$

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{\left(2\cdot\frac{3}{2}-2\right)^2} = -2$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

$\Rightarrow$ прямая $y = -2x+6$ – единственная*

$\Rightarrow$

$(a;b) = (-2;6)$

* – т.к. прямые выше нее пересекают гиперболу (~~ограничение под~~), а ниже пересекают параболу.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16x^3-84x^2+124x-57$

$2(2x)^3-21(2x)^2+62(2x)-57=0$

$\frac{8-3}{2}=\frac{5}{2}$

	2	-21	+62	-57
-1	2	-23		
3	2	-15	17	
5	2	-11		

$2x=$ $\frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$

$72-102+30=0$

$57=9$

x	f(x)	g(x)
1	$+\infty$	$2\cdot(-2)\cdot(-1)=4$
2		$2(-1)(3=-6$
3	9/	

$8x^2-34x+30=0$

$2(2x)^2-17(2x)+30=0$

$(2x)^2-\frac{17}{2}(2x)+15=0$

~~$x_1x_2=15$~~

$\cancel{2x=\frac{\frac{17}{2}\pm\sqrt{\ }}{2}}$

~~$17^2=100$~~

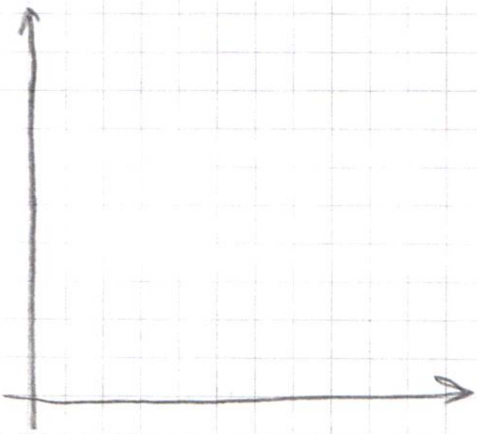
$17\cdot17$: 119, 17, 289

288-

$2x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-30\cdot4\cdot2}}{4}$

$\cancel{2x}\Rightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{49}}{8}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{17+7}{8}=3 \\ x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4} \end{array}\right.$

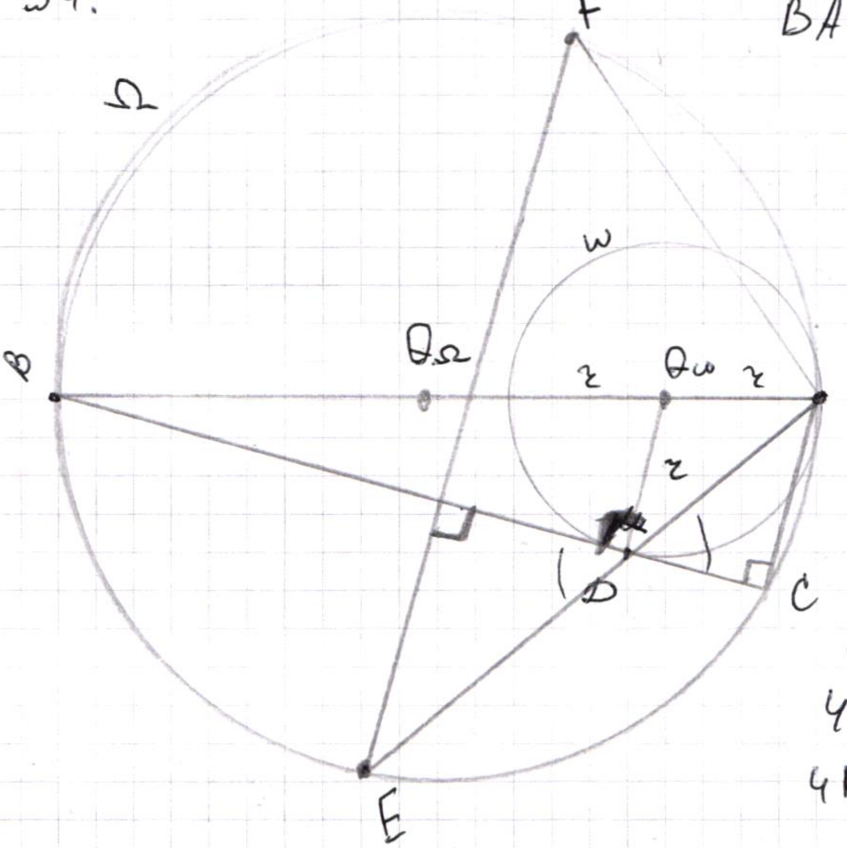


☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



BA - диаметр.

R - ?
r - ?
$\angle AFE$
S_{AFE}

$CD = \frac{5}{2}$
$BD = \frac{13}{2}$

$ED \cdot AD = BD \cdot DC$

$(2R - r)^2 = r^2 + BD^2$

$4R^2 - 4Rr = BD^2$

$4R^2 - \frac{20}{9}R^2 = 4R^2\left(1 - \frac{5}{9}\right) =$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^2 R^2 = BD^2$

$\frac{2}{3}R = BD = \frac{13}{2}$

$$\boxed{R = \frac{39}{4} \quad r = \frac{65}{12}}$$

$(BO_\omega + r)(BO_\omega - r) = BD^2 = \varphi_{B\omega}$

для $\triangle BO_\omega D$ теорема Пифагора.

$-r^2 + BO_\omega^2 = BD^2 = BO_\omega^2 - r^2$

$AC \perp BC$ т.к BA - диаметр. $\Rightarrow$

$\triangle BO_\omega D$ и $\triangle BAC$ подобны $\Rightarrow$

$\frac{2R}{BD + DC} = \frac{2R - r}{BD}$

$\frac{2R}{9} = 2 \cdot \frac{2R - r}{13} \qquad \frac{13R}{9} = 2R - r \qquad \frac{5}{9}R = r$

$AC = \sqrt{}$ $\quad AC^2 = AB^2 - (CB)^2$

$AC^2 = (2R)^2 - (CD + BD)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 9^2$

$AD^2 = AC^2 + DC^2 = \frac{81 \cdot 169}{64} - 81 + \frac{25}{4} =$

$= 81\left(\frac{169-64}{64}\right) + \frac{25}{4} = \frac{105}{64} \cdot 81 + \frac{25}{4} =$

$= \frac{8100 + 405 + 16 \cdot 25}{64} = \frac{8100 + 405 + 400}{64} =$

$= \frac{8905}{64}$

$AD \cdot DE = \frac{5 \cdot 13}{4}$

$AC^2 = AB^2 - CB^2 = 4R^2 - (CD + BD)^2 =$

$= 4 \cdot \left(\frac{39}{4}\right)^2 - 9^2 = \frac{9^2 \cdot 13^2}{4} - 9^2 =$

$= 9^2\left(\frac{169 - 4}{4}\right) = 81 \cdot \frac{165}{4}$

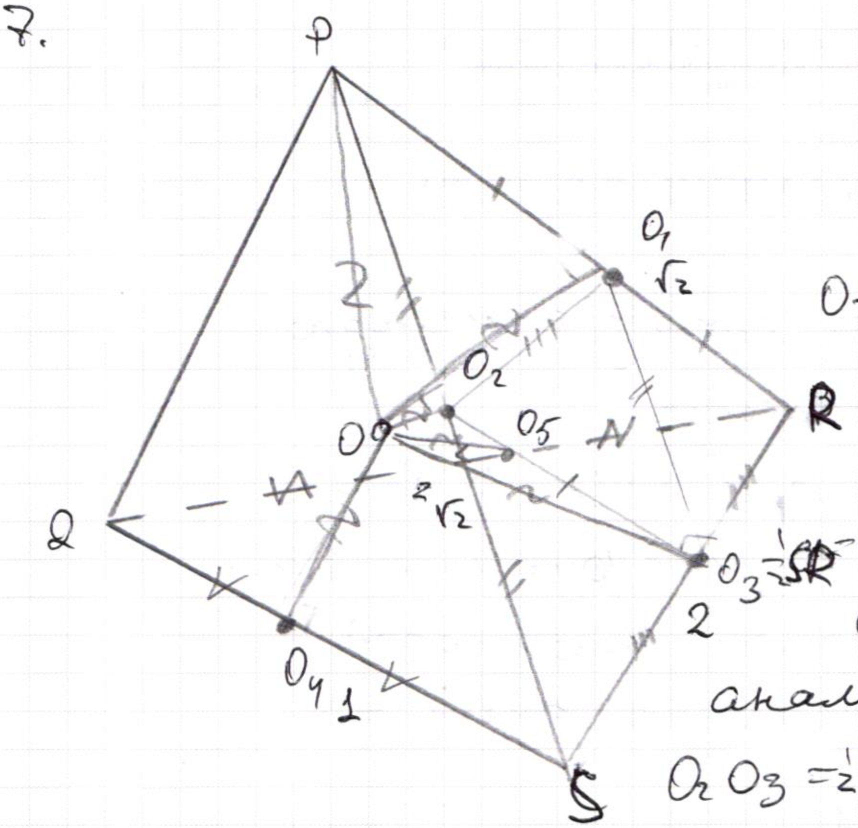
$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 81 \cdot \frac{165}{4} + \frac{25}{4} =$

$= \frac{165 \cdot 81 + 1}{4} = \frac{13366}{4}$

$$\begin{array}{r} 165 \\ \times\ 81 \\ \hline 165 \\ 1320 \\ \hline 13365 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 13366 \mid 4 \\ 12 \qquad 33 \\ 13 \\ 12 \\ 46 \end{array}$$

7.



$QR = 2$
$QS = 1$
$PS = \sqrt2$

O – центр сферы $\Rightarrow$
$OO_1 = OO_2 = OO_3 =$
$= OO_4 = OO_5 = OP$

$SO_3 = O_1O_2$ – т.к
O_1O_2 – ср. линия.
аналогично
$O_2O_3 = \frac{1}{2}PR =$
$O_1O_3 = \frac{1}{2}PS = \frac{\sqrt2}{2}$

Заметим, что

$PO_1O_3O_2$ – параллелограмм $\Rightarrow$
(т.к противолеж. стороны попарно равны)
т.к O равноудалена от $P; O_1; O_3; O_2$
$\Rightarrow$ проекция O равноудалена от
$P, O_1; O_3; O_2 \Rightarrow PO_1O_3O_2$ – вписан $\Rightarrow$
$PO_1O_3O_2$ – квадрат $\Rightarrow$
$\cancel{PR = PS = 2 = 2\sqrt{\frac{2}{2}}}$
$\Rightarrow SR = \sqrt2\, PS = \sqrt2\, PR$ –
из теор. Пифагора для $O_1O_2O_3$
$\Rightarrow RS = 2.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

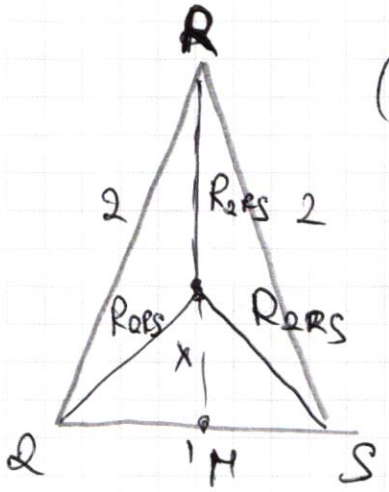
рассмотрим сферу, описаную вокруг пирамиды

Заметим, что для точек P; R и S существует свой круг (т.к они лежат в одной плоскости)

Т.к $\triangle PRS$ - прямоугольный $\Rightarrow$

$R_{PRS} = \frac{1}{2} RS = 1$

аналогично найдем для $\triangle QRS$



$(R_{QRS}+x)^2 + 0{,}5^2 = 2^2$

$x^2 + 0{,}5^2 = R^2_{QRS}$

$R^2_{QRS} + 2R_{QRS}x + x^2 + 0{,}5^2 = 2^2$

$2R^2_{QRS} + 2R_{QRS}x = 4$

$x = \sqrt{R^2_{QRS} - \frac{1}{4}}$

$\cancel{2R^2_{QRS} + 2R_{QRS}\sqrt{}}$

$RH = \sqrt{2^2 - 0{,}5^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} = R_{QRS} + x$

$-x = R_{QRS} - \frac{\sqrt{15}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(R_{QRS} - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = R_{QRS}^2$$

$$R_{QRS}^2 - \sqrt{15}\,R_{QRS} + \frac{15}{4} + \frac{1}{4} = R_{QRS}^2$$

$$4 = \sqrt{15}\,R_{QRS}$$

$$\frac{4\sqrt{15}}{15} = R_{QRS} \qquad R_{QRS} = \frac{4}{\sqrt{15}} \Rightarrow$$

т.к. $R \geqslant R_{QRS}$ и $R \geqslant R_{PRS} \Rightarrow$

$$R_{min} = R_{QRS} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$$