МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha$ -

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin4\beta\cdot$
$\cdot\cos2\alpha + \sin2\alpha = \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) +$
$+ \sin4\beta\cos2\alpha = 2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + \sin4\beta\cdot\cos2\alpha =$
$= 2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\cdot\cos2\beta\sin2\beta\cdot\cos2\alpha =$
$= 2\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta + \cos2\alpha\sin2\beta) =$
$= 2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$

$$\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos2\beta = \frac{-\frac{2}{5}}{\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{-\frac{2}{5}}{-\frac{1}{\sqrt5}} = \frac{2\cdot\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$$

если $\sin2\beta>0$ $\sin2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\overset{\sin}{\cancel{\cos}}2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big|\cdot\sqrt5$$

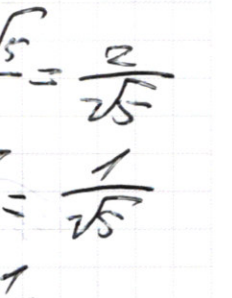
$2\overset{\sin}{\cancel{\cos}}2\alpha + \cos2\alpha = -1$ т.к. $tg\alpha$ сущ.

$2\cdot2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$ $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$

$$2\cdot2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad \Big|:\cos\alpha$$

$$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad \Big|:\cos\alpha$$



$$\frac{2\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = 0 \quad \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2} \quad tg\alpha = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

если $\sin 2\beta < 0$

$$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| \cdot \sqrt{5}$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin 2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$$

$$2\sin 2\alpha \cancel{-1} + 2\sin^2\alpha = \cancel{-1}$$

$$\sin 2\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$$

$$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$$
$$= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha -$$
$$- \sin^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

$\sin\alpha = 0$

$\Downarrow$

$tg\alpha = \boxed{0}$

$2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad \Big| : \cos\alpha \neq 0$

$$2 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2$$

$$tg\alpha = \boxed{-2}$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & ① \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & ② \end{cases}$

$18/2$
$9/3$
3

$+\begin{array}{r}12\\9\\\hline 21\end{array}$ $+\begin{array}{r}21\\4\\\hline 25\end{array}$

②

$x^2-4x+4\ \ +9y^2-18y+\overset{9}{\cancel{81}}-4-\overset{9}{\cancel{81}}-12=0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2-\cancel{25}=0$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

① ~~$x-2y=$~~ ~~$(x-2y)^2=x^2$~~ $x-2y\geq 0$ т.к. равно корню

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$D=(1-5y)^2-4(4y^2+2y-2)=$

$=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x=\dfrac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$

$x=\dfrac{5y-1+3y-3}{2}=\dfrac{8y-4}{2}=4y-2$

$x=\dfrac{5y-1-3y+3}{2}=\dfrac{2y+2}{2}=y+1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

Подставим $x=4y-2$ в ②

$$\begin{array}{r} \overset{1}{32} \\ +\,18 \\ \hline 50 \end{array}$$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(4y-2-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(4y-4)^2+(3y-3)^2=25$

$16y^2-32y+16+9y^2-18y+9-25=0$

$25y^2-50y+\cancel{25}-\cancel{25}=0$

$25y^2-50y=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

$y=0 \quad y=2$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x=4y-2=-2 \quad x=4y-2=$

$=8-2=6$

①$(-2;0)$

②$(6;2)$

Подставим $x=y+1$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(y+1-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(y-1)^2+(3y-3)^2=25$

$y^2-2y+1+9y^2-18y+9-25=0$

$10y^2-20y+10-25=0$

$10y^2-20y-15=0 \quad |:5$

$2y^2-4y-3=0$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{24} \\ +\,16 \\ \hline 40 \end{array}$$

$D=16-4\cdot(-3)\cdot 2=$

$=16+12\cdot 2=16+24=$

$=40$

$y=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{4}$

$y=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \qquad y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x=y+1=$

$=1+\frac{\sqrt{10}}{2}+1=$

$=2+\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x=y+1=$

$=1-\frac{\sqrt{10}}{2}+1=$

$=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

③$\left(2+\frac{\sqrt{10}}{2};1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

④$\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Т.к. $x-2y\geq 0$ по о.д.з.

проверка:

① $-2-2\cdot 0 \not\geq 0$ не подходит

② $6-2\cdot 2=2>$ подходит

③ $\cancel{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}-\cancel{2}-2\frac{\sqrt{10}}{2}=-\frac{\sqrt{10}}{2}<0$ не подходит.

④ $\cancel{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}-\cancel{2}+2\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}>0$ подходит.

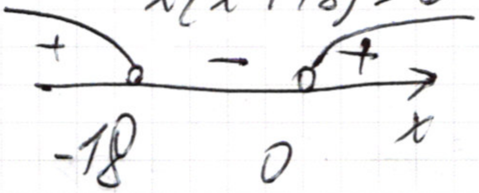
Ответ: $(6;2)$;

$\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

О.д.з. $x^2+18x > 0$

$x(x+18) > 0$



$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Замена $x^2+18x = y$, $y > 0$ по одз $\log_{12} y$

$$5^{\log_{12} y} \geqslant y^{\log_{12} 13} - y$$

$$5^{\log_{12} y} \geqslant \underline{y(y^{\boxed{\boxed{\log_{12} 13} - 1}} - 1)}$$

чуть-чуть больше 1

становится чуть больше 0

$y > 0$ $\cancel{0}$ > 0

по свойству степенной (показательной) функции

$$5^{\log_{12} y} \geqslant 0$$

~~$\log_{12}(5^{\log_{12} y}) \neq \log_{12} 0$~~

истинно при всех $y > 0$

~~$\log_{12} y \neq 1$~~ ~~$\log_{12} y \cdot \log_{12} 5 \neq 1$~~

⇓

$y > 0$

~~$y \neq 12$~~

$x^2+18x > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

~~$x^2+18x-12 \neq 0$~~

~~$D = 18^2 + 4\cdot 12 = 324+48 = 372$~~

~~$y^{\log_{12} 5} \geqslant y^{\log_{12} 13} - y$~~

~~$y^{\log_{12} 5}\left(1 - y^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5}\right) \geqslant -y$~~

Ответ: $(-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x = y$, $y>0$ по о.д.з логарифма

$$5^{\log_{12}y}+y \geq y^{\log_{12}13}$$

$16^{\log_4 1} = 1$

~~$1^{\log_4 16} =$~~

~~$5^{\log_{12}y}+y-y^{\log_{12}13} \geq 0$~~

~~$\log_{12}(5^{\log_{12}y}+y) \geq \log$~~

~~$5^{\log_{12}y} \geq y^{\log_{12}13}-y$~~

~~$y^{\log_{12}5}-y^{\log_{12}13} \geq y$~~

$$~~5\log~~\ 5^{\log_{12}y} \geq \underset{0}{\overset{\vee}{y}}(y^{\log_{12}13-1}-1)$$

$\wedge 0$ по свойству монотонной (показ.) функции

$[0;1]$

5

$5^{\log_{12}y} \geq 0$

$\log_{12}(5^{\log_{12}y}) \geq \log_{12}0$

$\log_{12}y \cdot \log_{12}5 \geq 1$

$$\begin{array}{r} \overset{6}{18} \\ \times\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \\ +\ 48 \\ \hline 372 \end{array}$$

№ 4 Дано:

$EF \perp BC$

$BD = 17$

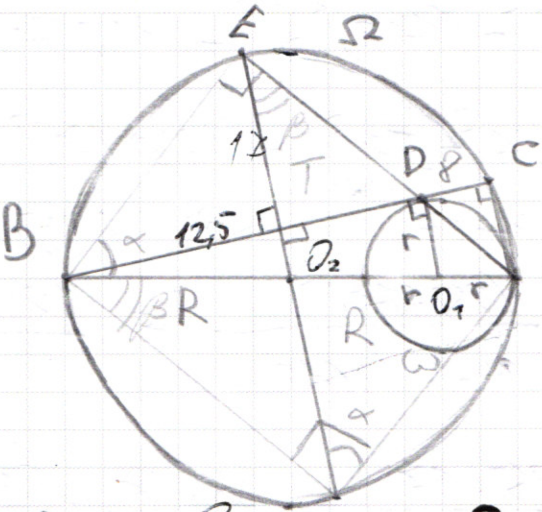
$DC = 8$

$r - ?$

$R - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AFE} - ?$



Решение:

1) O_1 - центр ω, O_2 - центр Ω

2) $\angle BCA = 90°$ т.к. вписанный опирается на диаметр

3) $\angle BDO_1 = 90°$ т.к. BC - касательная к ω, O_1D - радиус к точке касания

4) $\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$ (по двум углам т.к. $\angle CBA$ - общий, а $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90°$)

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BO_1} \quad BC = 25,\ BD = 17,\ AB = 2R,\ BO_1 = 2R - r$$

$80R - 25r - 34R = 0$

$16R - 25r = 0$

$R = \frac{25r}{16}$

$r = \frac{16R}{25}$

5) $\triangle ACB \sim \triangle O_2TB$ (по двум углам т.к. $\angle CBO_1$ - общий, а $\angle BTO_2 = \angle BCA = 90°$)

$$\frac{AB}{BO_2} = \frac{BC}{BT} \quad AB = 2R,\ BO_2 = R,\ BC = 25$$

$BT = 12,5$

$CA = \sqrt{4R^2 - 25^2}$ по т. Пифагора

$TO_2 = \frac{1}{2} CA = \frac{\sqrt{4R^2 - 25^2}}{2}$

6) $\triangle BTO_2 \sim \triangle BDO_1$ (по двум углам т.к. $\angle TBO_2$ - общий, $\angle BTO_2 = \angle BDO_1$)

$$\frac{TO_2}{DO_1} = \frac{BT}{BD} = \frac{BO_2}{BO_1} \quad TO_2 = \frac{\sqrt{4R^2-25^2}}{2},\ DO_1 = r,\ BT = 12,5,\ BD = 17,\ BO_2 = R,\ BO_1 = 2R - r$$

$$\frac{17\sqrt{4R^2 - 25^2}}{2} = 12,5r \qquad 17\sqrt{4R^2 - 25^2} = 25r$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \times 17 \\ \hline 113 \\ +12 \\ \hline 283 \end{array}$$

$$289\cdot(4R^2-25^2)=25^2r^2$$

$$289\cdot4R^2-25^2\cdot289-25^2\cdot r^2=0$$

$$289\cdot4\cdot R^2-25^2\cdot289-\cancel{25^2}\cdot\frac{16^2\cdot R^2}{\cancel{25^2}}=0$$

$$16^2R^2-(17\cdot2)^2R^2+(25\cdot17)^2=0$$

$$R^2(16^2-34^2)+(25\cdot17)^2=0$$

$$R^2(34+16)(16-34)+(25\cdot17)^2=0$$

$$R^2=\frac{(25\cdot17)^2}{(34-16)(34+16)}=\frac{(25\cdot17)^2}{18\cdot50}$$

$$R=\frac{25\cdot17}{2\cdot5\cdot3}=\frac{5\cdot17}{2\cdot3}=\frac{85}{6}=\boxed{14\frac{1}{6}}$$

$$r=\frac{16}{25}R=\frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{5}{\cancel{25}}}\cdot\frac{\cancel{5}\cdot17}{\cancel{2}\cdot3}=\frac{8\cdot17}{15}=\boxed{9\frac{1}{15}}$$

$$O_2T=\frac{\sqrt{4R^2-25^2}}{2}=\frac{\sqrt{4\cdot\frac{5^2\cdot17^2}{\cancel{2^2}\cdot3^2}-25^2}}{2}=$$

$$=\frac{5\sqrt{\frac{17^2}{9}-25}}{2}=\frac{5\sqrt{17^2-(3\cdot5)^2}}{3\cdot2}=$$

$$=\frac{5\sqrt{(17-15)(17+15)}}{2\cdot3}=\frac{5\cdot\sqrt{2\cdot32}}{2\cdot3}=$$

$$=\frac{5\cdot\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}\cdot3}=\frac{20}{3}\Rightarrow ET=O_2E-O_2T=$$

$$=R-\frac{20}{3}=\frac{85-40}{6}=$$

$$DA=\sqrt{2r^2}=9\frac{1}{15}\cdot\sqrt{2}\quad=\frac{85}{6}$$

$\triangle EAF$ вписан в Ω $\Rightarrow$ по т. sin $\frac{EA}{\sin\angle AFE}=2R$

$\sin\angle AFE=\frac{EA}{2R}$

Ответ: радиус $\Omega=14\frac{7}{6}$

радиус $\omega=9\frac{1}{15}$

$$\begin{array}{r|l}50&2\\25&5\\5&5\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}18&2\\9&3\\3&3\\1&\end{array}$$

$$\begin{array}{r}34\\-16\\\hline18\end{array}\qquad\begin{array}{r}34\\+16\\\hline50\end{array}$$

$$\begin{array}{r}17\\\times5\\\hline85\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}-85&6\\6&14\\25&\end{array}$$

$$\begin{array}{r}17\\\times8\\\hline136\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}-136&15\\135&9\\1&\end{array}$$

$$\begin{array}{r}15\\\times8\\\hline120\end{array}\qquad\begin{array}{r}15\\\times9\\\hline135\end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq -8x^2-30x-17$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} + 8x^2+30x+17 \leq 0$$

$$\frac{12x+11+8x^2(4x+3)+30x(4x+3)+17(4x+3)}{4x+3} \leq 0$$

$$\frac{12x+11+32x^3+24x^2+120x^2+90x+68x+51}{4x+3} \leq 0$$

$$\frac{32x^3+144x^2+170+62}{4x+3} \leq 0 \qquad \frac{16x^3+72x^2+85x+31}{4x+3} \leq 0$$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{17} \\ \times\ 4 \\ \hline 268 \end{array} \quad \begin{array}{r} +12 \\ 90 \\ \hline +102 \\ 68 \\ \hline 170 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 17 \\ 3 \\ \hline 51 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} -170 & 2 \\ 16 & 85 \\ 10 & \end{array}$$

$12x+11-4x-3 = 8x+8$

$$\frac{8x+8}{4x+3} \leq -(8x^2+30x+18)$$

$$\begin{array}{r|l} 8x^2+30x+18 & 4x+3 \\ \hline -8x^2+6x & 2x+6 \\ \hline -24x+18 & \\ 24x+18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{8x+8}{4x+3} \leq -(4x+3)(2x+6)$$

$$\frac{8x+8+(4x+3)^2(2x+6)}{4x+3} \leq 0$$

$$\begin{array}{r} \overset{4}{16} \\ \times\ 8 \\ \hline 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 72 \\ 4 \\ \hline 288 \end{array} \quad \begin{array}{r} \overset{1}{\times 85} \\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$-2 \quad 16\cdot(-8)+72\cdot4-85\cdot2+31$

$-\frac{1}{2} \quad -16\cdot\frac{1}{8}+72\cdot\frac{1}{4}-85\cdot\frac{1}{2}+31$

$-2+18$

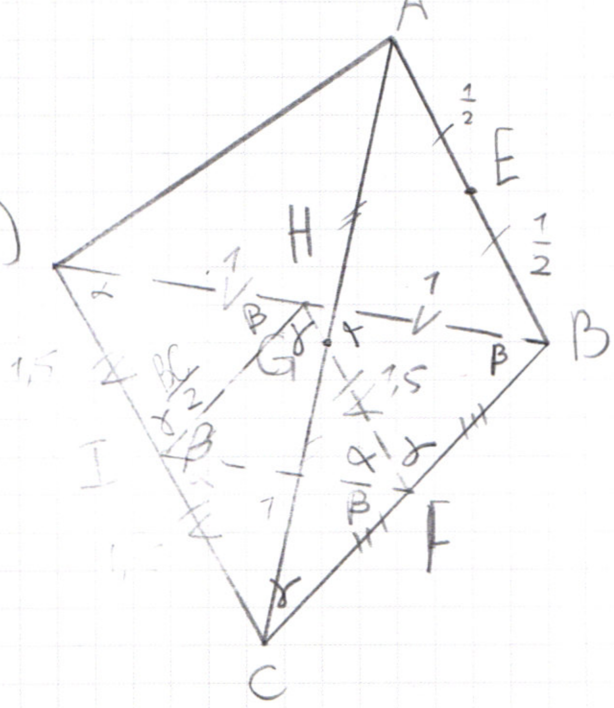
12. $-\frac{11}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle \quad \frac{3}{7} \quad 7$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)