МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9=12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена $\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases}$ $ab\geq 0$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad * \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$*$ $a-2b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a\geq 2b \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a\geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$a^2+9b^2=25$ $\quad a=4b$

$$\begin{cases} 16b^2+9b^2=25 \\ b\geq 0 \\ a=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=1 \\ b\geq 0 \\ a=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2+9b^2=25 \\ b<0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10b^2=25 \\ b<0 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

т.о. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

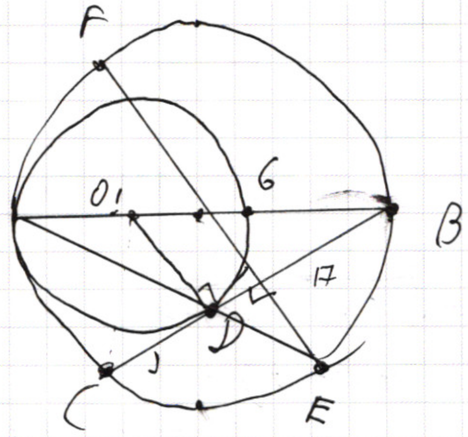
№ 4

Дано

$CD=8$

$BD=17$

Найти: $R, r, \angle AFE, S_{\triangle AEF}$-?



1) центр ~~радиус~~ $\Omega \in AB$ (O)

$AB \cap \omega = A$, $= G$

2) центр $\omega \in AB$ (O_1)

3) BD · касательная к ω BA-секущая =>

=> $BD^2 = BA \cdot AG = D \cdot (d)$, где D - диаметр Ω, а d - диаметр ω

4) ~~$\angle O_1DB$ прямоугол => $O_1D^2+DB^2=O_1B^2$~~

~~$r^2+17^2=(D-r)^2=D^2-2Dr+r^2 \Rightarrow 17^2=D^2-2Dr$~~

~~$17^2=D \cdot d=D \cdot 2r=4Rr$~~

~~$4Rr=(2R)^2-2 \cdot 2R \cdot r$ $\quad 4Rr=4R^2-4Rr \Rightarrow$~~ $R=2r$

5) ~~$2r \cdot 2R=17^2 = 2r \cdot 4r=17^2 = 8r^2=17^2 \Rightarrow r=\frac{17}{\sqrt{8}}=\frac{17}{2\sqrt{2}}$~~

~~$R=\frac{17}{\sqrt{2}}$~~

4)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac45\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\cos2\alpha\cdot\sin4\beta+\sin2\alpha=-\frac45\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}tg2\alpha(\cos2\beta)+\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5\cos2\alpha}\\ \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta\cancel{-1+1})+\cos2\alpha\cdot2\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta=-\frac45\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}tg2\alpha(\cos2\beta)+\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5\cos2\alpha}\\ \cos2\beta\cdot2(tg2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta)=-\frac{4}{5\cos2\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cos2\beta=\frac{-\frac45\cos2\alpha}{-\frac{1}{\sqrt5\cdot\cos2\alpha}}=\frac{4}{\sqrt5}\Rightarrow\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\frac45}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\cos4\beta=2\cos^2 2\beta-1=2\frac45-1=\frac35$$

$$\sin4\beta=2\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta=\pm\frac45$$

$$\begin{cases}\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}\pm\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\frac35\pm\cos2\alpha\cdot\frac45+\sin2\alpha=-\frac45\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin2\alpha\pm\cos2\alpha=-1\\ 4\sin2\alpha\pm4\cos2\alpha=-4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin2\alpha\pm\cos2\alpha=-1\\ \sin2\alpha\pm\cos2\alpha=-1\end{cases}\Leftrightarrow\sin2\alpha\pm\cos2\alpha\mp\cos2\alpha=0$$

$$\left[\begin{array}{l}tg2\alpha=0\\ tg2\alpha=2\\ tg2\alpha=-2\end{array}\right.$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\qquad\left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\ tg\alpha=\frac{-1\pm\sqrt5}{2}\\ tg\alpha=\frac{1\pm\sqrt5}{2}\end{array}\right.$$

Ответ: $0;\ \frac{-1\pm\sqrt5}{2};\ \frac{1\pm\sqrt5}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

1) $x^2+18x > 0$

2) замена $x^2+18x = a$, $a>0$

$$5^{\log_{12}a} + x^2+18x \geq a^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13} \quad \Big| : a>0$$

$$\frac{5^{\log_{12}a}}{a} + 1 \geq a^{\log_{12}13-1}$$

$$a^{\log_{12}5-1} + 1 \geq a^{\log_{12}13-1}$$

$$a^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}} \quad \Big| : a^{\log_{12}\frac{13}{12}} > 0$$

$$a^{\log_{12}\frac{5}{12}-\log_{12}\frac{13}{12}} + \frac{a^0}{a^{\log_{12}\frac{13}{12}}} \geq 1$$

$$a^{\log_{12}\frac{5}{13}} + a^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geq 1$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}a} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}a} \geq 1$$

Замена: $\frac{5}{13} = \sin\varphi$, тогда $\cos\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$

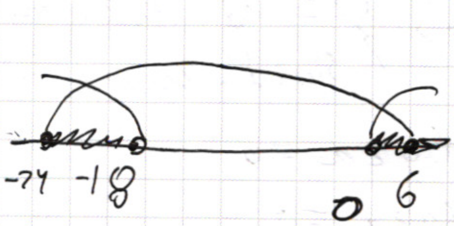
$b = \log_{12}a$

$(\sin\varphi)^b + (\cos\varphi)^b \geq 1$ верно только при $b \leq 2$

тогда $\log_{12}a \leq 2 \iff \log_{12}a \leq \log_{12}144 \iff$

$\iff a \leq 144$

тогда $\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \leq 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases}$



$x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

Ответ: $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

Дано

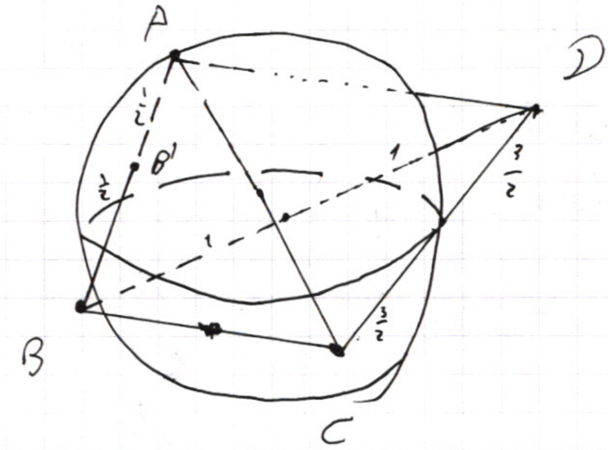
$AB=1$

$BD=2$

$CD=3$

$BC-?$

$r_{min}-?$



$AB \cap \Omega = A'$ $\quad$ Ω - сфера (исходная)

$AC \cap \Omega = C'$

N 6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$$

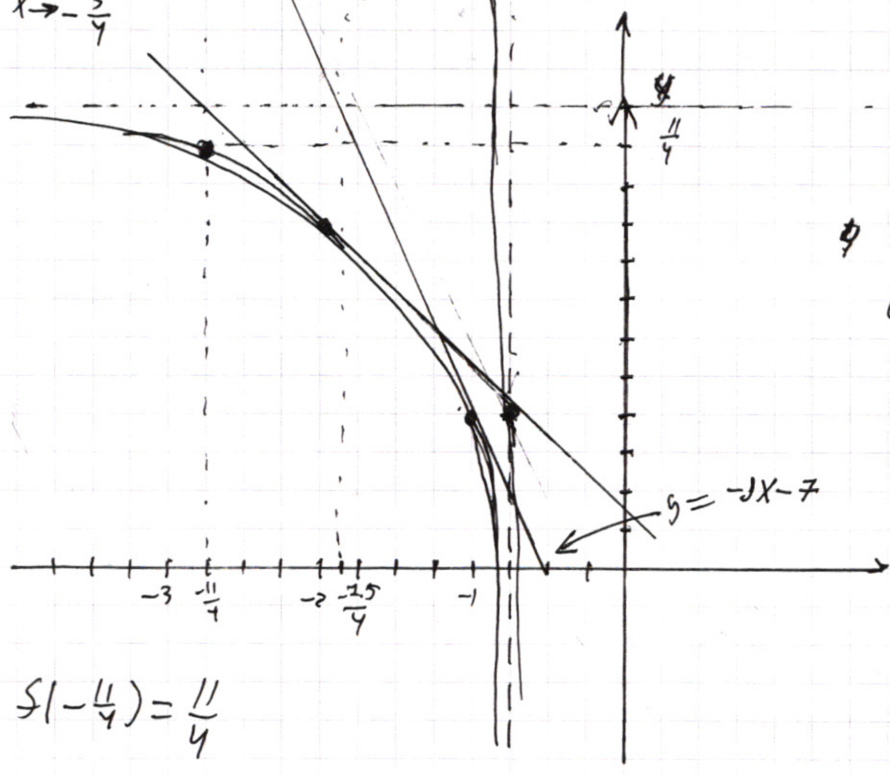
1) $\frac{12x+11}{4x+3} = f(x)$ $\qquad f'(x) = \frac{12(4x+3)-4\cdot(12x+11)}{(4x+3)^2} = \frac{36-44}{(4x+3)^2} < 0$

$D(f) = R / \{-\frac{3}{4}\}$ $\qquad$ ~~$\Rightarrow$~~ $f(x)\searrow$ на $R/\{-\frac{3}{4}\}$

$f(x)$ - непрерывна и дифференцируема на $D(f)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3 \Rightarrow y=3$ гор. ассимптота

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}} f(x) = \infty$ $x=-\frac{3}{4}$ верт ассимптота



~~4) найдём касательную к $f(x)$ в точке $(-1;1)$~~

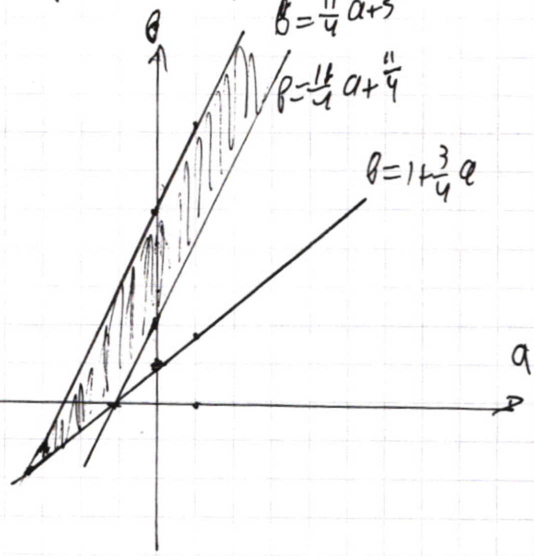
~~$k = -\frac{8}{1} = -8$~~

~~$1 = k\cdot(-1)+e \quad e+8=1 \quad e=-7$~~

из $*$ $\Rightarrow$ $\frac{11}{4} \le a(-\frac{11}{4})+b \le 5$

из $**$ $\Rightarrow$ $-\frac{3}{4}a+b \le 1$

$$\begin{cases} b \le \frac{11}{4}a+5 \\ b \ge \frac{11}{4}+\frac{11}{4}a \\ b \ge 1+\frac{3}{4}a \end{cases}$$



$f(-\frac{11}{4}) = \frac{11}{4}$

2) $g(x) = -8x^2-30x-17$

$g(-\frac{11}{4}) = 5$

$g(-\frac{3}{4}) = 1$

3) $z(x) = ax+b$ - линейная функция

$\frac{11}{4} \le z(-\frac{11}{4}) \le 5$ $\quad *$

$z(-\frac{3}{4}) \le 1$ $\quad **$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~м~~ 5) Найдём касательные к графику функции $f(x)$:

~~[illegible]~~ проходящие через $A(-\frac{11}{4};5)$, $B(-1;1)$

~~$k = -\frac{8}{1} = -8$~~ ~~$1 = k(-1) + ... = ... = -7$ // $y = -8x - 27$~~

~~8)~~ а) $1 = -k + l$

$k = \frac{-8}{(4x_0+3)^2}$

$-kx_0 + l = \frac{12x_0+11}{4x_0+3} \to \frac{3x_0}{(4x_0+3)^2} = \frac{12x_0+11}{4x_0+3}$

N 5

Всего пар 24^2 б) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

а) $f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

~~[illegible]~~

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

в) Любое число от 1 до 24 можно представить как произведение простых чисел ~~[illegible]~~ $(8 = 2 \cdot 2 \cdot 2)$, тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) =$

$= f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) + f(\frac{1}{b_1}) + f(\frac{1}{b_2}) + \ldots + f(\frac{1}{b_m})$, где $a_1 - a_n$ — множители x, а $b_1 - b_m$ — множители y.

$f(1)=f(2)+f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$

$f(1)=f(3)+f(\frac{1}{3}) \Rightarrow f(\frac{1}{3})=0$

$f(1)=f(4)+f(\frac{1}{4}) \Rightarrow f(\frac{1}{4})=0$

$f(\frac{1}{5})=0-f(5)=-1$

$f(\frac{1}{7})=0-f(7)=-1$

$f(\frac{1}{11})=0-f(11)=-2$

$f(\frac{1}{13})=0-f(13)=-3$

$f(\frac{1}{17})=0-f(17)=-4$

$f(\frac{1}{19})=0-f(19)=-4$

$f(\frac{1}{23})=-5$

$f(\frac{1}{6})=0$

$f(\frac{1}{8})=0$

$f(\frac{1}{9})=0$

• $f(\frac{x}{y})=f(a_1)+\ldots f(a_n)+f(\frac{1}{b_1})+\ldots+f(\frac{1}{b_n})<0$

Найдём число пар неудовлетворяющих этому неравенству

если числа x и y равны, то $f(\frac{x}{y})=0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$-(x^2+18x)^{\log_{12}5} + |x^2+18x|^{\log_{12}13} \leq x^2+18x$

$x^2+18x=t$

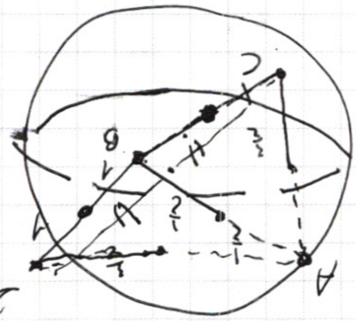
$|t|^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5} \leq t$

$\frac{2}{1}=\frac{4}{CB^2}$ $\frac{2}{1}\cdot 1 = 2\left(\frac{2}{CB}\right)$

$t\left(|t|^{\log_{12}13-1} - t^{\log_{12}5-1}\right) - t \leq 0$

$t\left(|t|^{\cancel{\log_{12}12}} - \cancel{t^{\log_{12}4}}\right) \leq 0$

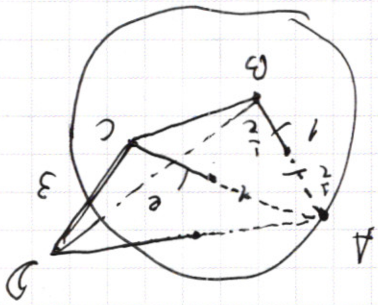
$t(|t| - 1 - t^{\log_{12}4}$



$5^{\log t} + t \geq -t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} + t \geq 0$

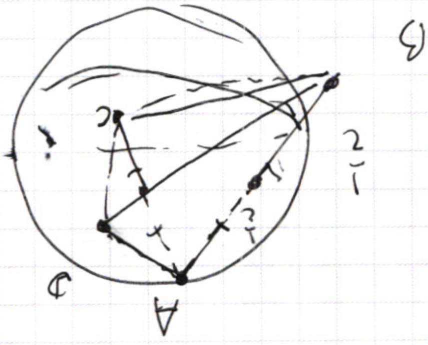
$t\left(t^{\log_{12}5-1} - t^{\log_{12}13-1} + 1\right) \geq 0$



$\log_{12}5 - 1 = \log_{12}5 - \log_{12}13 = \log_{12}\frac{5}{12}$

$\log_{12}13 - 1 = \log_{12}\frac{13}{12}$

$t\left(t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} + 1\right) \geq 0$



$\frac{12x+11}{4x+3} \leq 9x+38 \sim 8x^2-30x-17 \leq$

$225 - 8\cdot 17 =$

$x^2+18x=t \qquad t>0$

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$

~~$t\geq 0$~~

$t\left(1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)\geq 0$

$t\left(1+\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}-\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}\right)\geq 0$

$\log_{12}(x^2+18)=t$

~~$x^2+18=\sqrt[12]{t}$~~

$12^{x^2+18}=t$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$t\left(1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)\geq 0$

$\geq 0 \qquad \geq 0$

$1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\geq 0$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}-\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}\geq 0$

$\log_{12}t=a$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^{a}-\left(\frac{13}{12}\right)^{a}\geq 0$

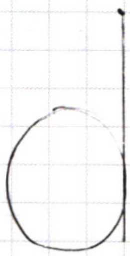
$\log_{12}1+$

h

$2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}$

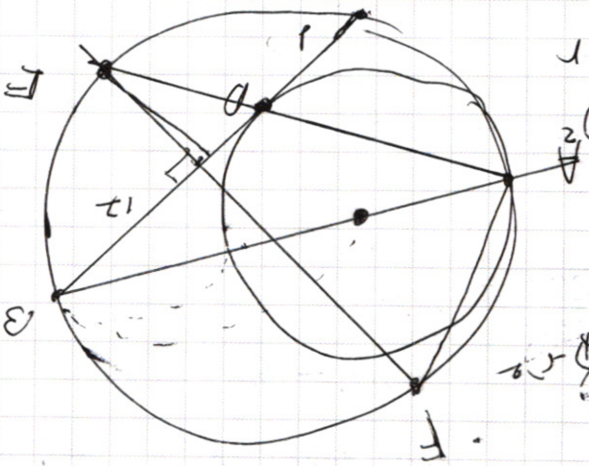
h



$2Rr$

$4Rr=$

$12^2=2R\cdot 2r$



$BD=12$

$CD=8$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

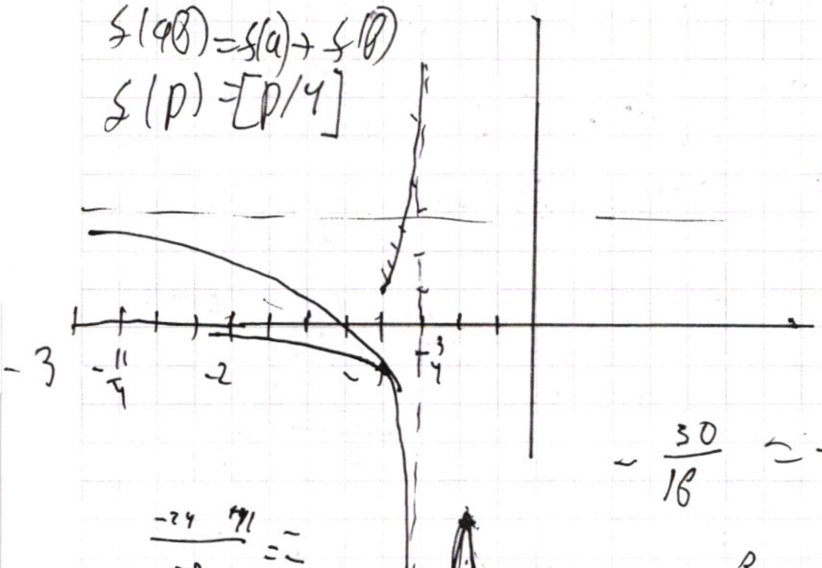
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$



$\frac{25}{15}=\frac{5}{3}$

$-\frac{3}{4}$

$12x+11 \mid 4x+3$

$-\;12x+9 \quad 3$

2

$-\frac{30}{16}=-\frac{15}{8}$

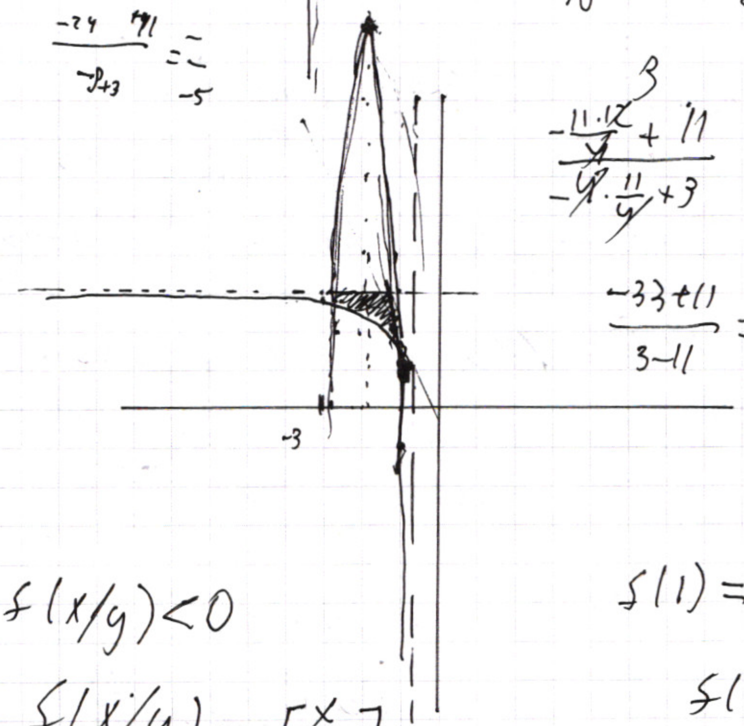
$\cancel{3}+\frac{2}{4x+3}$

$\frac{-24+11}{-8+3}=\frac{-13}{-5}$

$12(4x+3)-4(12x+11)$

$36-44$

$\frac{-\frac{11\cdot 12}{4}+11}{-4\cdot\frac{11}{4}+3}$



$-\frac{275}{8}+\frac{30\cdot 15}{8}-17$

$\frac{-33+11}{3-11}=\frac{-22}{-8}=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}$

$\frac{275-170}{8}=$

$\frac{85}{8}$

$f(x/y)<0$

$f(1)=f(1)+f(1)=2\cancel{0}$

$f(1)=0$

$f(x/y)=\left[\frac{x}{4y}\right]$

$f(2)=f(2)+f(1)$

$f(2)=2$

$f\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{-12\cdot\frac{11}{4}+11}{-4\cdot\frac{11}{4}+3}=$

$f(3)=$

$121+11=132$

$\frac{132-44}{88}$

$=\frac{-12\cdot 11+44\cdot 4}{4\cdot(-44+12)}=\frac{\cdot}{\cdot}$

$44\cdot 2$

32

$\frac{88}{32}=\frac{44}{16}=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$12(4x+3)-4(12x+11)=0$

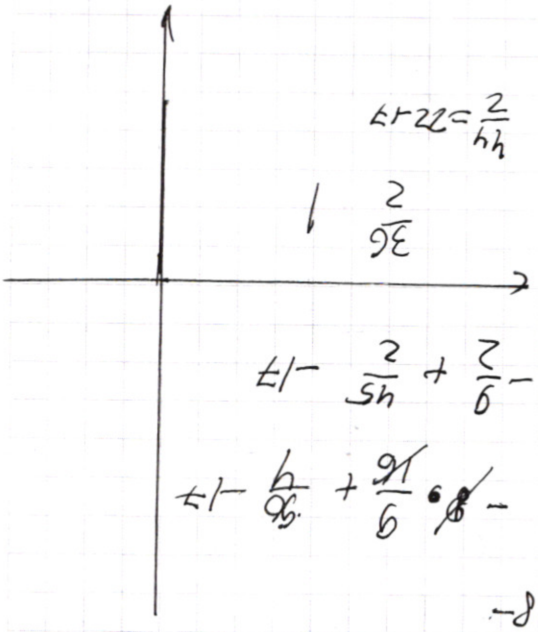
$\cancel{48x}+36-\cancel{48x}-44=$

$3x^2+30x+17$

$275-\cancel{4\cdot 3\cdot 17}$

$\begin{array}{r}17\\ \times 8\\ \hline 136\end{array}$

$\begin{array}{r}275\\ -136\\ \hline 139\end{array}$



$-\frac{30}{2\cdot 8}=-\frac{15}{8}$

$\begin{array}{r}30\\ \times 15\\ \hline 150\\ +300\end{array}$ $\begin{array}{r}450\\ -225\end{array}$

$y_m=-\frac{225}{64}\cdot 8+\frac{30\cdot 15}{8}-17$

$\frac{30\cdot 15-225}{8}-17$

$\frac{253-178}{8}=\frac{75}{8}$

$158+12$

$-8x^2-30x-17=\frac{12x+11}{4x+3}$

$-36x^3-120x^2-68x-24x^2-90x-51=12x+11$

$36x^3+144x^2+170x+62=0$

$(x-1)$

	36	144	170	62
-1	36	108	62	0

$(x+1)(36x^2+108x+62)$

$\begin{array}{r}27\\ \times 27\\ \hline 189\\ +54\\ \hline 729\end{array}$

$\cancel{(54)^2-36\cdot 62}$

18 54 31

$(27)^2-31\cdot 18$

$\begin{array}{r}729\\ -558\\ \hline 171\end{array}$

$\begin{array}{r}31\\ \times 18\\ \hline 248\\ +31\\ \hline 558\end{array}$

$\frac{-27\pm\sqrt{171}}{18}$

$y=kx+b$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

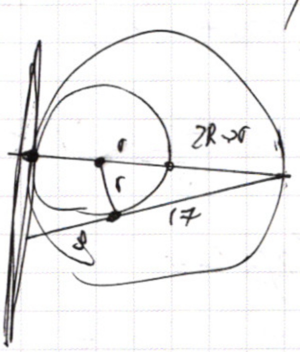
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2})$ $f(\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} b \geq \frac{11}{4} + \frac{11}{4}a \\ b \leq 5 + \frac{11}{4}a \\ b \leq \frac{3}{4}a + 1 \end{cases}$$

$2\frac{1}{4}$ $\quad 24^2$ $\quad 16$ $\quad 5,2 \quad 2=$ $\quad 3,2$

$\frac{11}{4}$



$\frac{2}{3} = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{2})$

$17^2 =$

$17^2 = 2R(2R-2r)$

$17^2 = 4R^2 - 4Rr$

$4R^2 - 4rR = 4R^2 - 4Rr$

$f(1) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

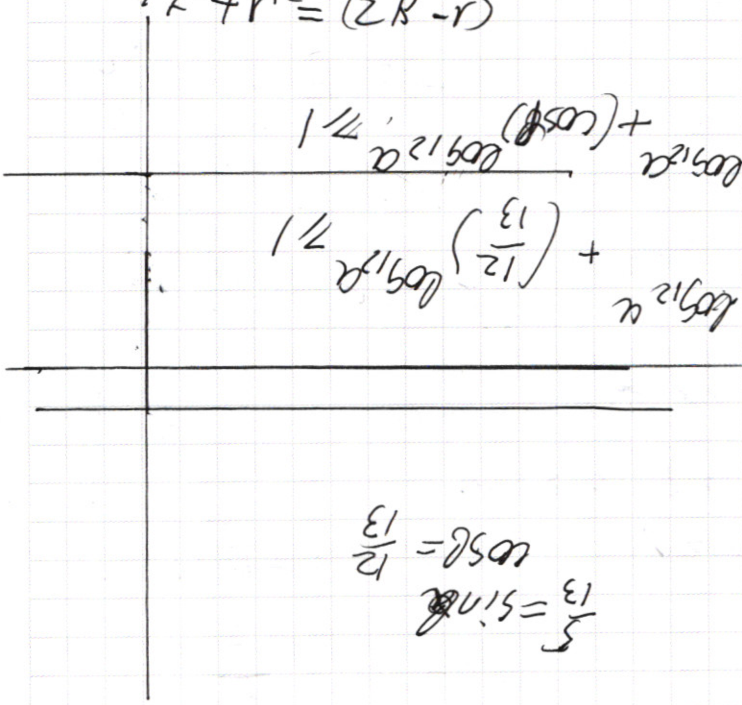
$17^2 = 2R \cdot (2R - 2r)$

$17^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$r^2 + 17^2 = (2R - 2r)^2$

$\cancel{r^2} + 17^2 = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$17^2 = 2R(2R - 2r)$



$(\sin\varphi)^{\log_{12} x} + (\cos\varphi)^{\log_{12} x} \geq 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

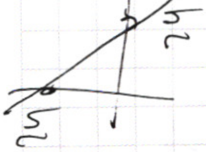
$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12} x} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12} x} \geq 1$

$a^{\log_{12} \frac{5}{13}} + a^{\log_{12} \frac{12}{13}} \geq 1$

$\frac{5}{13} = \sin\varphi$

$\frac{12}{13} = \cos\varphi$

$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13}$



$3796^2 + 2410 \neq$

$\frac{2}{1} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$

$a > 0$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$\boxtimes$ черновик $\quad \square$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$0=1-x-2^x$ $\quad 1+2^x=x$ $\quad x=2^x-1$

$0=1-x+2^x$ $\quad 1=\frac{2^x-1}{x}$

$$\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta}{\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta}=\frac{tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta}{2tg 2\alpha(\cos^2 2\beta+2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta}=$$

$2\cos^2 2\beta-1$

$$=\frac{tg 2\alpha+tg 2\beta}{2(tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta+tg 2\beta\cdot\cos 2\beta)}$$

$$\cancel{\frac{tg 2\alpha+tg 2\beta}{2\cos 2\beta(tg 2\alpha+tg 2\beta)}}=\frac{\sqrt{5}}{4\cdot 2}$$

$2^{x2}-2=x2$

$2=\frac{2^{x-1}}{x2}$ $\quad 2^x+1=x$

$0=1-x+2^x$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}\pm\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$ $\quad 2\cos^2 2\beta-1$

$2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$

$\sin 4\beta=2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha\pm\cos 2\beta=-1$

$2\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$

$=2\cdot\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}=\pm\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=$

$\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha\mp\cos 2\alpha=0$

$\sin 2\alpha+\cos 2\alpha-\cos 2\alpha=0$

$\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$

$7^{\log_{12}13}-13^{\log_{12}7}$

$7>13^{\log_{12}13}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{(\sqrt{2})^3}{8} + \sqrt{2}$ $\quad \frac{2(\sqrt{2})^3}{8}$ $\quad \frac{(\sqrt{2})^3}{4}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x(y-1)-2(y-1)$

$(x-2)(y-1)$

$(x-2)(y-1)$ $\quad \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$x^2-4x+4=(x-2)^2$

$(3y)^2-2\cdot 3y\cdot 3+9=(3y-3)^2$

$(x-2)$ $\quad 1$ $\quad \frac{3\sqrt{3}+1}{8}$

$-2(y-1)$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad 3\cdot 1{,}7+1$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=9-4=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2$

$ab \geq 0$

Замен $x-2=a$

$y-1=b$

$a-2b=\sqrt{ab}$ $\quad a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2+9b^2=5^2$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$25-16=9$

$\frac{5b\pm 3b}{2}$ $\quad a=4b$, $a=b$

$16b^2+9b^2=5^2$

$b^2+9b^2=5^2$

$25b^2=25$ $\quad b^2=1$ $\quad 24$ $\quad b=\pm 1$

$10b^2=25$ $\quad b^2=\frac{5}{2}$ $\quad b=\pm\frac{5}{2}$

$b=1 \quad a=4$

$b=-1 \quad a=-4$

$12\cdot 12$

$24\cdot 6$

$81+144$

225

$(x-6)(x+24)$

[illegible]

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$tg\alpha$ - ?

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ - ?

$tg(\alpha+\alpha) = \frac{\sin\alpha + \alpha}{\cos\alpha+\alpha}$

$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \cancel{\sin\alpha\cos}}{\cos\alpha\cos\alpha\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha}$

$tg 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5 \cos 2\alpha}$

$tg 2\alpha (1+\cos 4\beta) + \sin 4\beta = -\frac{4}{5\cos 2\alpha}$

$tg 2\alpha = \frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{5}{25} + \frac{16}{25}$ $\quad \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$= \sin 2\alpha(\cos 2\beta + \underbrace{\cos 4\beta}_{2\cos^2 2\beta - 1} + 1) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta + \underbrace{\sin 4\beta}_{2\sin 2\beta\cos 2\beta}) =$

$=$

$\sin 2\alpha(\cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta) + \cos 2\alpha\cdot(\sin 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta) =$

$= \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta(1+\cos 2\beta) + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta(1+2\cos 2\beta) =$

$= (1+2\cos 2\beta)(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) =$

$\cancel{(1+2\cos 2\beta)\, tg 2\alpha(\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\beta\cdot\sin 2\alpha)}$

$(1+2\cos 2\beta)(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{5\sqrt5}{4}$ $\quad \frac{\sqrt5}{4}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha(tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5}$

$\cos 2\alpha(tg 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta) = -\frac{4}{5}$

$4(tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta) = \sqrt5(tg 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta)$

$4 tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta + 4\cdot\sin 2\beta = \sqrt5\, tg 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sqrt5\cdot\sin 4\beta$

$tg 2\alpha(4\cos^2\beta - \sqrt5\cdot\cos 4\beta - \sqrt5) =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)