МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

• $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

(1) $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

• $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

в (1): $\frac{1}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1.$

~~при $\sin 2\alpha$~~ ~~$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$~~

по универсальной тригонометр. замене: $\cos 2\alpha = 1 - \frac{2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

З.п. пусть $t = tg\,\alpha$

при $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$:

$\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2-2t^2}{1+t^2} = -1$

$2t^2+2t-2 = -1-t^2$

$3t^2+2t-1=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{1}{3} \end{array}\right.$ (по т. Виета).

при $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$:

$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2-2t^2}{1+t^2} = -1$

$-2t^2+2t+2 = -1-t^2$

$t^2-2t-3=0$

$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-1 \end{array}\right.$ (по т. Виета).

Обр. з. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=-1 \\ tg\,\alpha=\frac{1}{3} \\ tg\,\alpha=3 \end{array}\right.$

Ответ: $tg\,\alpha_1 = -1$; $tg\,\alpha_2 = \frac{1}{3}$; $tg\,\alpha_3 = 3$.

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$; $x-12y=x-6-6(2y-1)$

$(x^2-12x+36)-36+(36y^2-36y+9)-9=(x-6)^2+9(2y-1)^2-45=45$.

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90. \end{cases}$$

З. п. $v=x-6$; $u=2y-1$

$$\begin{cases} v-6u=\sqrt{uv} \\ v^2+9u^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (v-6u)^2=uv \\ v^2+9u^2=90 \end{cases}$$ при усл. $v-6u\geq 0$

$v=\pm\sqrt{90-9u^2}=\pm 3\sqrt{10-u^2}$

при $v=-3\sqrt{10-u^2}$

$(-3\sqrt{10-u^2}-6u)^2=-3\sqrt{10-u^2}\cdot u$.

$90-9u^2+36u^2+36u\sqrt{10-u^2}=-3\sqrt{10-u^2}\cdot u$

$27u^2+90=-39u\sqrt{10-u^2}\ |:3$

$9u^2+30=-13u\sqrt{10-u^2} \Rightarrow u<0$ т.к. $9u^2+30>0$; $-13\sqrt{10-u^2}<0$.

$81u^4+540u^2+900=169u^2(10-u^2)$.

$250u^4-1150u^2+900=0\ |:10$

$25u^4-115u^2+90=0$

$5u^4-23u^2+18=0$

$\left[\begin{array}{l} u^2=1 \\ u^2=\frac{18}{5} \end{array}\right.$ (по т. Виета). $u<0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=-1 \\ u=-\sqrt{\frac{18}{5}}=-\frac{3\sqrt{10}}{5}. \end{array}\right.$ $\Rightarrow v=-9$ $(v-6u=-9+6=-3<0) \Rightarrow$ не подходит.

$\Rightarrow v=-3\cdot\frac{\sqrt{40}}{5}=-12\frac{\sqrt{10}}{5}$ $\left(-\frac{12\sqrt{10}}{5}+\frac{18\sqrt{10}}{5}>0\right)$.

при $v=3\sqrt{10-u^2}$:

$(3\sqrt{10-u^2}-6u)^2=3u\sqrt{10-u^2}$

$90-9u^2+36u^2-36u\sqrt{10-u^2}=3u\sqrt{10-u^2}$.

$27u^2+90=39u\sqrt{10-u^2}\ |:3$

$9u^2+30=13u\sqrt{10-u^2}$

$81u^4+540u^2+900=169u^2(10-u^2)$ при усл. $u>0$

$\left[\begin{array}{l} u^2=1 \\ u^2=\frac{18}{5} \end{array}\right.$ (аналогично из 1ого случая) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} u^2=1 \\ u=\sqrt{\frac{18}{5}} \end{array}\right.$ $\Rightarrow v=9$ $(v-6u=9-6>0)$

$\Rightarrow v=\frac{12\sqrt{10}}{5}$ $\left(\frac{12\sqrt{10}}{5}-6\sqrt{\frac{18}{5}}=\frac{12\sqrt{10}}{5}-\frac{18\sqrt{10}}{5}<0\right)$

$\Rightarrow$ не подходит.

Ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$V = -\frac{12\sqrt{10}}{5}$; $U = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$ или $V = 9$ $U = 1$.

Обр. з.

$x - 6 = V \Rightarrow x = V + 6$

$x = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$

$2y - 1 = U \Rightarrow y = \frac{U+1}{2}$

$y = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}$

$x = V + 6 \Rightarrow x = 15$

$y = \frac{U+1}{2} \Rightarrow y = 1$.

Ответ: $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$; $(15; 1)$.

№5.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(2\cdot 1) = f(2) + f(1)$ (т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$ (по усл.)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(2) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Найдём все значения $f(x)$ при $x \in [2; 25]$; $x \in N$.

$f(2) = 0$.
$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$
$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(5) = 1$.
$f(6) = f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) = 0$.

$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$.
$f(10) = 1$.
$f(11) = 2$

$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$.

$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$.
$f(21) = 1$.

$f(22) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$.

Заметим

$f(x) = f(\frac{x}{y}\cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(\frac{x}{y}) < 0$ если $f(x) < f(y)$; $x; y \in [2; 25]$; $\{x; y\} \in N$.

~~тем~~

~~$f(x) = 0$; 10 таких~~

на отрезке $[2; 25]$ при натуральном аргументе $f(x) = 0$ в 10 случаях

$f(x) = 1$ в 7 случаях, $f(x) = 2$ в 3-ёх; $f(x) = 4$ в двух; $f(x) = 5$ только при $x = 23$.
$f(x) = 3$ – в одном случае.

$\Rightarrow$ если $x = 23$, то нет такого y, чтобы $f(x) < f(y)$

если $f(x) = 0$, то $f(y)$ – может быть любым $> 0 \Rightarrow x$ можно выбрать 10 способами; а y $24 - 10 = 14$ способами $\Rightarrow$ всего $10\cdot 14 = 140$

• если $f(x)=1 \Rightarrow f(y)\in\{2,3,4,5\} \Rightarrow x$ выбираем 7 способами; y – 7 способами.

$7\cdot 7=\underline{49}$

• $f(x)=2 \Rightarrow f(y)\in\{3;4;5\} \Rightarrow x$ выбираем тремя способами (либо 11, либо 22, либо 25)

y – 4

$3\cdot 4=\underline{12}$

• $f(x)=3 \Rightarrow f(y)\in\{4;5\} \Rightarrow x$ – 1 способ; y – 3 способ.

$1\cdot 3=\underline{3}$

• $f(x)=4 \Rightarrow f(y)\in\{5\} \Rightarrow 2\cdot 1=\underline{2}$ способа.

• $f(x)=5 \Rightarrow f(y)\in\varnothing \Rightarrow$ невозможно.

Всего: $140+49+12+3+2=189+17=206$ способов.

Ответ: 206.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6-6(2y-1)=x-6-12y+6=x-12y$

$(x-12y)=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$10-\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$

$(x-6)^2+(3(2y-1))^2=90$

$-3\cdot\frac{4\sqrt2}{\sqrt5}=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$v-6u\geq0$

$x-6=v$
$2y-1=u$

$\begin{cases}v-6u=\sqrt{vu}\\v^2+(3u)^2=90\end{cases}$ $\begin{cases}(v-6u)^2=vu\\v^2+9u^2=90\end{cases}$ $\begin{cases}v^2-12vu+36u^2=vu\\v^2+9u^2=90\end{cases}$

$v^2-13vu+36u^2=0$ $\cancel{v^2-12}$

$\cancel{v^2+9u^2}$

$(v-3u)^2=v^2-6uv+9u^2=90-6(v-6u)^2$

$(v-6u)^2=uv$
$(v-3u)^2=90-6uv$

$(v+3u)^2=v^2+6uv+9u^2=90+6(v-6u)^2$

$2v^2+18u^2=180$
$v^2+9u^2=90$

$27u^2-6uv=7uv-90$
$27u^2-13uv+90=0$
$-36u^2+13uv-v^2=0$
$-9u^2-v^2+90=0$

$-13vu+27u^2=-90$
$27u^2-13vu+90=0$

$\begin{cases}x-6y=\sqrt{xy}\\x^2+9y^2=90\end{cases}$ $\begin{cases}(x-6y)^2=xy\\x^2+9y^2=90\Rightarrow(x-3y)^2+6xy=90\end{cases}$

$(x-3y)^2=90-6xy$

$v^2=-90-63u^2$
$v^2+9u^2=90$

$+\frac{18\sqrt{10}}{5}-\frac{12\sqrt2}{5}=\frac{6}{5}(3\sqrt{10}-2\sqrt2)=$

$=\frac{6}{5}(\sqrt{90}-\sqrt{\ }$

$-90-63u^2=90-9u^2$

$180=-54u^2$

$u^2=\frac{10}{3}$

$v=\sqrt{90-9u^2}=3\sqrt{10-u^2}$

$(3\sqrt{10-u^2}-6u)^2=3\sqrt{10-u^2}\,u$

$90-9u^2-36u\sqrt{10-u^2}+36u^2=3u\sqrt{10-u^2}$

$90+27u^2=39u\sqrt{10-u^2}$
$30+9u^2=13u\sqrt{10-u^2}$ $(30+9u^2)^2=13^2u^2(10-u^2)$

$9(10+3u^2)^2=169u^2(10-u^2)$

$\frac{9(10+3u^2)^2}{169u^2}=10-u^2$

$\frac{9}{169}\left(\frac{10}{u}+3u\right)^2=10-u^2$

$-\frac{3\sqrt{32}}{5}=$

$3\cdot\frac{4\sqrt2}{\sqrt5}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$900+540u^2+81u^4=-169u^4+1690u^2$
$250u^4-1150u^2+900=0$
$25u^4-115u^2+90=0$
$5u^4-23u^2+18=0$

$\left[\begin{array}{ll}u^2=1 & u=\pm1\\u^2=\frac{18}{5} & u=\pm\frac{18}{5}\end{array}\right.$

$1690-540=1150$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 \geq 0$.

$10x + |x^2 - 10x|$

З.п. $t' = x^2 - 10x$ $t = -t'$ $3^m = (-t)$

$|t|^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3(-t)}$ $= m$

$t^{\log_3 4 = n}$ $4 = 3^n$ t^n

$t^{\log_3 3}$ $f(1 \cdot 5) = f(1) + f(5)$

З.п. $|t| = t'$ $t' = -t$ т.к. $-t > 0$.

$t'^{\log_3 4} + t' \geq 5^{\log_3(t)}$

$f(2) = 0$ $f(10) = 1$ $\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq$

$f(5) = 1$ $f(1) = 0$

$t'^{(\log_3 4 + \log_3 3)} \geq 5^{\log_3 - t}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$t'^{\log_3 12} \geq 5^{\log_3(t)}$

$f(c) = f(c \cdot 1) = f(c) + f(1) = f(c)$

$f(c) =$

$t'^{\log_3 12} \geq 5^{\log_3 t}$

$t'^{\log_3 12} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

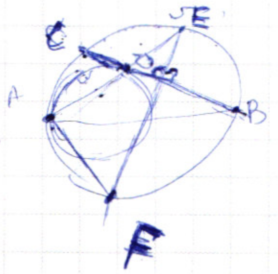
$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t = m}$ $t = 3^n$ $5^n = 5^{\log_3 t} =$ $4 = 3^k$ $3^n = t$ $t^k - ?$

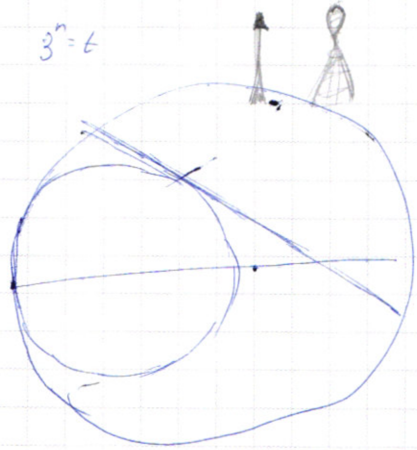
t'

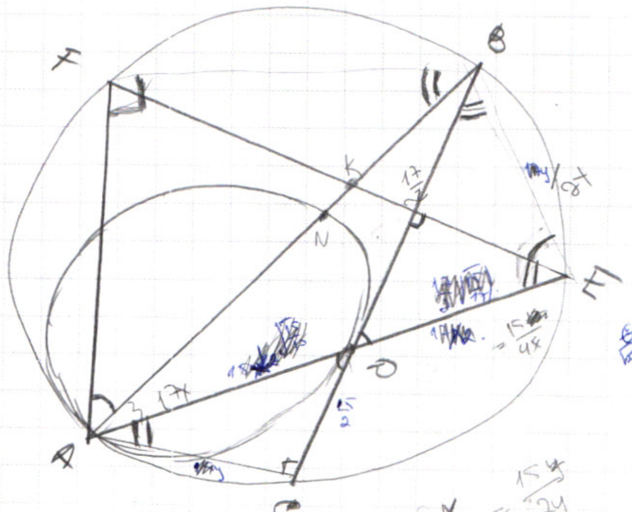
$t^{\log_3 4} + t \geq 5^{\log_3 t}$

3^x $4 +$

$\log_3(\log_3 4) +$







$\angle FAC - \angle BAC = 90^\circ$

$\angle FAB + \angle DAC = 90^\circ$

$\angle FAB = \angle ADC$

$\angle AFE = 180^\circ - \angle FAC = 180^\circ - 90^\circ - \gamma = 90^\circ - \gamma$

$\frac{15}{17} = \frac{CD}{ED} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow CD \cdot BD = ED \cdot AD = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$AD = 15x$; $ED = 17x$

$\frac{2x}{17} = \frac{15y}{2y}$ $y = \frac{15 \cdot 17}{4x}$

$(15y)^2 + 16^2 = (32x)^2 + (17y)^2$

$\frac{g}{h} = \frac{17x^2}{17}$ $h = \frac{y}{2x}$

$64y^2 = 2^{10}x^2 - 16^2$ $64y^2 = 16^2 - 2^{10}x^2$

$2^6 y^2 = -2^{10}x^2 + 2^8$ $15^2 x^2 = \frac{15^2}{4} + 15^2 y^2$ $15x^2 - 4 + \frac{1}{4} = 0$ $-17x^2 + 4 - \frac{1}{4} = 0$

$y^2 = -16x^2 + 4$ $y^2 = x^2 - \frac{1}{4}$ $15x^2 = \frac{15}{4}$ $17x^2 = \frac{15}{4}$

$x = \frac{1}{2}$ $x^2 = \frac{15}{17} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2(\underbrace{\alpha+\beta}_{x})+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\sin\frac{x+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{x-2\alpha}{2} = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$ $\quad \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$ $\quad \sin 2\beta = \frac{\sqrt{25-5}}{5} = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$

(1) $\sin 2\alpha = -1 + 2\cos 2\alpha \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

(2) $\sin 2\alpha = -1 + 2\cos 2\alpha$

$36(y^2-y)$

$9(4y^2-4y) = 9(2y-1)^2$

(1) $\cancel{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-1-2\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}}$

$(x-6)^2 - 36 + (6y-3)^2 - 9 = 45$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad | : \sqrt5$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$\left(\frac{x}{3}-2\right)^2 + (2y-1)^2 = 10$

$\sin(2\alpha - \varphi) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) - 1}$

$(\sin 2\alpha)^2 \; \cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{(\sin 2\alpha)^2}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha}{1}$ $\quad \frac{4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{4\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad :\cos^2\alpha$

$(\cos 2\alpha)^2 = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 1 - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

$\cos 2\alpha = \frac{1-2t^2+t^4}{1+2t^2+t^4}$ $\quad t =$ $\quad (1-t^2)^2 + 4t^2 = 1 + 2t^2 + t^2$

$\frac{1+2t^2+t^4 - 1 + 2t^2 - t^4}{1+2t^2+t^4} = \frac{4t^2}{1+2t^2+t^4} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}$.

$\cos 2\alpha = 1 - \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad (1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2 + 4\operatorname{tg}^2\alpha = 1$

$4t^2 + 2t - 2 - 2t^2$ $\quad \operatorname{tg}x$

$\frac{2t}{1+t^2} - 2 + \frac{4t^2}{1+t^2} = -1$.

$\frac{2t+4t^2}{1+t^2} = 1 \Rightarrow$ $\quad 2t + 4t^2 = 1 + t^2$ $\quad 3t^2 + 2t - 1 = 0$ $\quad D = 4 + 12 = 16 = (4)^2$ $\quad t = \frac{-2-4}{6} = -1;\; t = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$.

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$ $\qquad x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$ $\qquad x^2-24xy$ $\qquad 2y(x-6)-(x-6)$

$(x-6)(2y-1)$

$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(12y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+26xy-6=0$

$(x+\frac{1}{2})^2+(12y+\frac{1}{2})^2-6,5+26xy=0$ $\qquad (\frac{x}{3}-2)^2+(2y-1)^2=10$

$(x-12y)=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{(x-6)(2y-1)}_{z}=(x-12y)^2$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$ $\qquad \cancel{180^2+9(2y-1)^2=90}$

$((x-6)+3(2y-1))^2=90+6z=90+6(x-12y)^2$ $\qquad 60^2$

$90^2+9(2y-1)^2=90$

$x-6+6y-3$

$x+6y-9$ $\qquad 10\ 90+9(4y-1)=10$

$((x-6)-6y+3)^2=90-6z=90-6(x-12y)^2$

$x-6y-3$

$2(x-6)=180$

$x=96$

$2x-12=2(x-6)$

$90\cdot 2=x-6$

$180=x-6$

$x=186$

$\cancel{(x-6)(2y-1)=(x-12y)^2}$

$\cancel{180(2y-1)=(186-12y)^2}$ $\qquad 120$

$\cancel{90(2y-1)=(62-4y)^2}$ $\qquad 66$

$\cancel{180y-90=62^2-248\cdot 2y+16y^2}$

$f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(16)=0$ $f(17)=4$

$f(4)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=0$ $f(8)=0$ $f(19)=4$

$f(7)=1$ $f(8)=0$ $f(9)=0$ $f(10)=1$ $f(11)=1$

$f(10)=1$ $f(11)=2$ $f(11)=0$ $f(22)=2$ $f(23)=5$

$f(13)=3$ $f(14)=1$ $f(15)=1$ $f(24)=0$ $f(25)=2$

$f(x)=0 \Rightarrow f(y)$ любое $=0$

$f(\frac{x}{y})<f(y)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(x)=f(\frac{x}{y})+f(y)$

$((x-6)+3(2y-1))^2=x-6+6y-3=x+6y-9$ $\qquad ((x-6)+3(2y-1))^2=(x-6)^2+6(x-6)(2y-1)+9(2y-1)^2=$

$x-6+6y$ $\qquad =90+6(x-12y)^2$

$(x-6-3(2y-1))^2=x-6-6y+3=x-6y-3$ $\qquad ((x-6)-3(2y-1))^2=((x-6)^2-6(x-6)(2y-1)+9(2y-1)^2)=$

$=90-6(x-12y)^2$

$(x+6y-9)^2+(x-6y-3)^2 \Rightarrow x^2+36y^2+81+12xy-18x-108y+x^2+36y^2+$

$(x+6y-9)^2-(x-6y-3)^2=(x+6y-9-x+6y+3)(x+6y-9+x-6y-3)=(12y-6)(2x-12)=$

$=12(2y-1)(x-6)=12(x-12y)^2$

$(2y-1)(x-6)=(x-12y)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• если $f(x)=1 \Rightarrow f(y)\in\{2;3;4;5\} \Rightarrow x$ выбираем 7 способами; y – 7 способами

$7\cdot 7=49$

• если $f(x)=2 \Rightarrow f(y)\in\{3;4;5\} \Rightarrow x$ выбираем тремя; y – 4 способами.

$3\cdot 4=12$

• если $f(x)=3 \Rightarrow f(y)\in\{4;5\} \Rightarrow x$ – 1 способ; y – 3 способа.

$1\cdot 3=3$

• $f(x)=4 \Rightarrow f(y)\in\{5\} \Rightarrow$ $2\cdot 1=2$ способа

• $f(x)=5 \Rightarrow f(y)\in\varnothing \Rightarrow$ ~~не~~ возможно.

Всего: $140+49+12+3+2=189+17=206$

Ответ: 206.