МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \dfrac{-8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta) + \sin(4\beta)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) = \dfrac{-8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha)(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\alpha + 1) + 2\overset{\cos(2\alpha)}{\cancel{\sin 2\alpha}}\sin(2\beta)\cos(2\beta) = \dfrac{-8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = \dfrac{-8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta) = \dfrac{-8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\beta = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\dfrac{16}{17}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

(1) $$\begin{cases} \cos 2\beta = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \dfrac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{17}}\,\cancel{\sin}\cdot \operatorname{tg} 2\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{17}} = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{2}$$

Пусть $\cos 2\alpha = 0$, тогда

$\frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{4}$ $\Rightarrow \cancel{\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in N \\ 2\alpha = -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in N \end{array}\right.}$

$\cancel{\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k, k \in N}$

т.к. $tg\,\alpha$ - определён.

$\sin 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow tg\, 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = +2\sqrt{2} - 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ tg\,\alpha = +2\sqrt{2} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ tg\,\alpha = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ tg\,\alpha = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{array}\right.$

иначе:

$\begin{cases} tg\, 2\alpha = -\frac{1}{2} = \frac{2 tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$

$tg\,\alpha = 4 \pm 2\sqrt{2}$

(2) $\begin{cases} \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = 0, \cos 2\alpha \neq 0 \\ \begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \text{пред. пункт.} \end{cases} \end{array}\right.$

Заметим, что если $\cos 2\alpha \neq 0$, то #значений $tg\, 2\alpha$ всего 2, $\Rightarrow$ $\cos 2\alpha = 0$

Ответ: $\{+2\sqrt{2} - 2\sqrt{2-\sqrt{2}};\ 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2-\sqrt{2}};\ -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2+\sqrt{2}};\ -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2+\sqrt{2}}\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

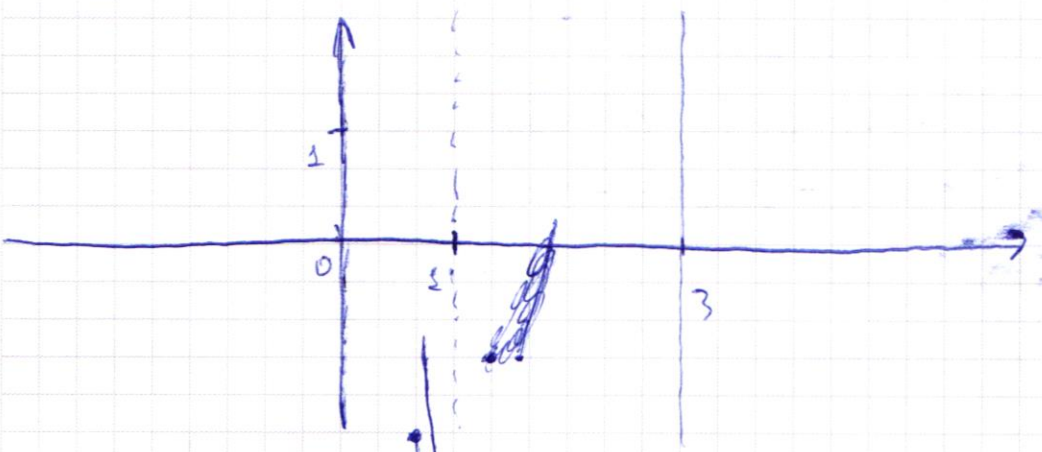
№6

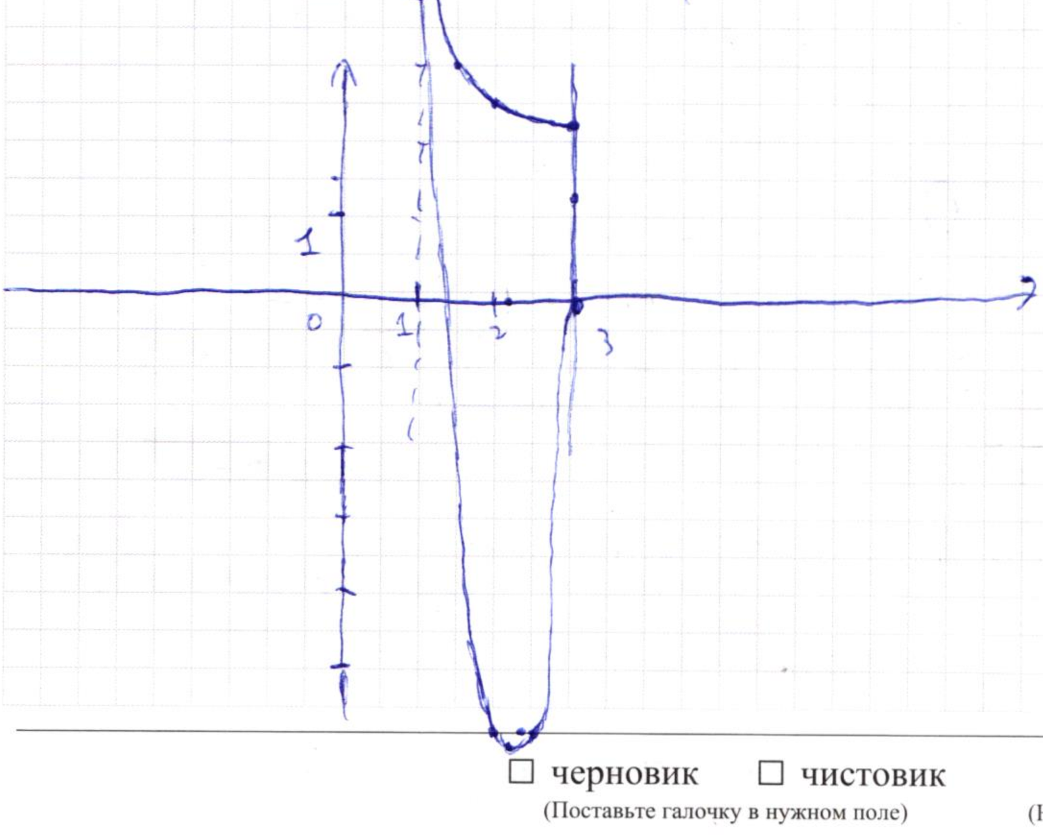
гипербола

$$\begin{cases} \dfrac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \\ ax+b \geqslant 8x^2-34x+30 \\ x \in (1;3] \end{cases}$$

парабола.

Построим $\dfrac{4x-3}{2x-2}$ и $8x^2-34x+30$





☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

Заметим, что

$8\cdot1-34+30=4$ $\Rightarrow$

$8\cdot9-34\cdot3+30=0$

т.е. парабола проходит через точки $(1;4)$ и $(3;0)$, то есть

$ax+b\geqslant -2x+6$, для $x\in(1;3]$ то есть $a+b\geqslant4$

$3a+b\geqslant0$

$b\geqslant-3a$

рассмотрим, когда $ax+b$ касается $\frac{4x-3}{2x-2}$

$$ax+b=\frac{4x-3}{2x-2}$$

$$(2x-2)(ax+b)=4x-3$$

$$2ax^2-2ax+2bx-2b=4x-3$$

$$2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3=0$$

усл. кас. $D=0=(2b-2a-4)^2-8a(-2b+3)=$ ~~4b...~~

$=(2a-2b)^2+16(a-b)+16+16ab-24a=$

~~Замена $t=2a-2b$~~

~~$t^2+8t+16...$~~

$=4a^2+4b^2+8ab-8a-16b+16=4(a^2+b^2+2ab-2a-4b+4)$

$=4((a+b)^2-2(a+b)-2b+4)=0$

~~$(x-3)(x-2)=x^2...$~~

~~$x_1+x_2=-2b+4$~~

~~$x_1\cdot x_2=2$~~

$b\leq2-a+\sqrt{-2a}$

$$\begin{cases}a+2-a+\sqrt{-2a}\geqslant4\\3a+2-a+\sqrt{-2a}\geqslant0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{-2a}\geqslant2\\2a+\sqrt{-2a}\geqslant-2\end{cases}$$

Решим относ. b:

$b^2+(2a-4)b+a^2-2a+4=0$

$D=(2a-4)^2-4(a^2-2a+4)=-8a=$

$b=\frac{4-2a\pm2\sqrt2\cdot\sqrt{-a}}{2}=2-a\pm\sqrt{-2a}$

Заметим, что когда $b=2-a-\sqrt{-2a}$, то $ax+b$ касается нижней части гиперболы, а нам нужно только касание верхней.

Продолжение №6 на стр. 7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

Замена: $t = x^2+6x$; $x^2+6x > 0$, т.к. по ОДЗ из $\log_4(x^2+6x)$

$$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$$

$$4^{\log_4 3 \cdot \log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 4^{\log_4 5 \cdot \log_4 t}$$

Замена $y = \log_4 t$

$$3^y + 4^y \geq 5^y$$

~~т.к.~~ заметим, что при $y = 2$ $3^2+4^2=5^2$ и ~~возрастает~~

~~ои~~ 5^y возрастает быстрее, чем $3^y + 4^y$,

$y \leq 2$

Обратная замена:

$\log_4 t \leq 2 \Rightarrow t \leq 16$

Обратная замена

$x^2+6x \leq 16$

по ОДЗ $x^2+6x>0$

$0 < x^2+6x \leq 16 \Leftrightarrow x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

$x(6x+6)$

Ответ: $[-8;-6) \cup (0;2]$

№5

$\cancel{f(1)=0}$

$\cancel{f(2)=0}$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=0$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

$f(26)=3$

$f(27)=0$

Обозначим через $g(n)$:

$f(n)=0$ - 11 штук $=g(0)$

$f(n)=1$ - 6 штук $=g(1)$

$f(n)=2$ - 3 штуки $=g(2)$

$f(n)=3$ - 2 шт. $=g(3)$

$f(n)=4$ - 2 шт. $=g(4)$

$f(n)=5$ - 1 шт. $=g(5)$

Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)=f(1)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

Значит $f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \iff f(y)>f(x)$

$g(5)\cdot(g(4)+g(3)+g(2)+g(1)+g(0))+g(4)\cdot(g(3)+g(2)+g(1)+g(0))+$

$+g(3)(g(2)+g(1)+g(0))+g(2)(g(1)+g(0))+g(1)g(0)=$

$=1\cdot(24)+2\cdot22+2\cdot20+3\cdot17+6\cdot11=$

$=125.$

Ответ: 125

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

$$\begin{cases} \sqrt{-2a} \geq 2 \iff -2a \geq 4 \Rightarrow a \geq -2 \quad \text{из ОДЗ } \sqrt{-2a} \Rightarrow a \leq 0 \\ 2a + \sqrt{-2a} \geq -2 \quad (2) \end{cases}$$

рассмотрим в (2)

$2 \leq \sqrt{-2a} \Rightarrow 2a + 2 \leq 2a + \sqrt{-2a}$

$2a + 2 \geq -2$

$a \geq -\frac{4}{2}$

$$\begin{cases} a \geq -2 \\ a \geq -2 \\ a \leq 0 \\ b = 2 - a + \sqrt{-2a}; \ b \geq -3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in [-2; 0] \\ b \leq 2 - a + \sqrt{-2a} \\ b \geq -3a \end{cases}$$

~~Ответ:~~ $\cancel{\begin{cases} a \in [-\frac{1}{2}; 0] \\ b \leq 2 - a + \sqrt{-2a} \\ b \geq -3a \end{cases}}$

Ответ: $\begin{cases} a \in [-2; 0) \\ b \in [-3a; 2 - a + \sqrt{-2a}] \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3x+2}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$f(0)=$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=$

24

68

$+108$

$+51$

66

$+17$

3

$2a \geq -1$

$a \geq -\frac{1}{2}$

$+108$

$+17$

125

$b^2+(2a-4)b+a^2-2a+4$

$(4-2a)$

$(2a-4)^2 \quad \cancel{4a^2}-16a+\cancel{16}\cancel{-4a^2}+8a\cancel{-16}$

$D=--8a$

$2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-a}$

$2a-4$

$(1-b)$

$2(2-b)^2$

$(a+-2$

$(b-2)^2$

$(2-b)$

$(2-2b)$

$a^2+b^2+2ab-2a-4b+4$

$b^2+(2a-4)b+a^2-2a+4$

$a^2+(2b-2)a-4b+4+b^2$

$\cancel{4\,2a2-2b}$

$(2b-2a-4)(2b-2a-4)=4b^2-4ab-8b+4a^2-4ab+8a-8b+8a+16$

$-8a$

$4b^2-\cancel{16b}+4a^2+\cancel{16a}+8ab+16$

$+(b-2)^2$

$-8(-2b+3)=\cancel{8\,16ab}-24a$

$a^2+(2b-2)a+b^2-4b+4$

$4(a^2+b^2-4a-8ab$

$4(a^2+b^2-4b-2a+2ab+4)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+6x-16=0$

$(b+1)(b+3)$ $\quad 8;\,-2$

$(x+8)(x-2)$

$(b+a)(b+c)=2 \quad 2;\,-8$

$b^2+(a+c)b+ac=2$

b

$x(x+6) \quad (a+c)^2-4(ac-2)=$

$\frac{\ln 3^t}{\ln 4^4}$

$\frac{\ln 3}{\ln 4}\cdot\frac{\ln t}{\ln 4}$

$t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}\geq t$

$t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}\geq t^1$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$4^{\log_4 t}-4^{\log_4 t}$

Замена, $t>0$

$3^{\log_4 t}\ \cancel{+}\geq|t|^{\log_4 5}\ \cancel{+}-t$

$4^{x\cdot\log_4 3}-4^{x\log_4 5}\leq 4^x$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}$

$9+16=5^2$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}\geq 4^{\log_4 t\cdot\log_4 5}-t$

$7\geq 5$

$2\geq 1$

$t\geq 4^{\log_4 t\cdot\log_4 5}-4^{\log_4 3\log_4 t}$

$\cancel{3}^x\ 4^x\geq\cancel{3}\,5^x-3^x$

$\cancel{3^x}\ \quad 3^x+4^x\geq 5^x$

$4_4 \quad 4_4$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Пусто

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{}{\sin\alpha}}$

$\operatorname{tg}2\alpha =$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30$

$72 - 302 + 30$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$8 - 34 + 30$

$(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$

$+t^2\cdot\operatorname{tg}2\alpha + 2t - 1 = 0$

$289 \mid 8$, $36{,}1$

$\frac{289}{2} - \frac{289}{4} + 30 - \frac{289}{8} + 30$

$-\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1 = 0$

$4 \quad -2$

$\frac{-2\pm\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}$

$-1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

$+ \; 4 - 2$

$\frac{-2\pm\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}}$

$\frac{289}{8} - \frac{289}{4}$

$6 - 3$

$\frac{2\sqrt{2}}{4}$

$y = -2x + 6$

$0 = -x + 12$

$-6 + 6 \quad -6{,}1$

$4 \pm 2\sqrt{2}$

$\frac{5}{2}$

$\frac{6-3}{1}$

$\operatorname{tg}\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{2}}t^2 + 2t - 1 = 0$

$\frac{2\cdot 17\cdot 17}{84}$

$\frac{9}{4}$

$4 - \frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$

$4 - 2\sqrt{2}$

$2(2 - \sqrt{2})$

$-\frac{289}{4}$

$\sin 2\alpha = 0$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha = 0$

$t = \frac{-2\pm\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{-\frac{2}{\sqrt{2}}} = -2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\frac{289}{2}$

$4\cdot 9$ 36

$\frac{34}{16}$

$\frac{17}{8}$

$4 + \frac{4}{\sqrt{2}} = 4 + 2\sqrt{2}$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$

$8\cdot 9 - 34\cdot 9 + 30$

$32 - 68 + 30$

$62 - 68$

$\frac{-2\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}}{1}$

$72 - 306 + 30$

$306 - 302$

-204

$\frac{289}{16} \cdot 2 - \frac{289}{2}$

$34\cdot 17 = 17\cdot 34 = \frac{2\cdot 289}{84}$

$\frac{289}{2} + 30$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos^2 2\beta - \sin^2 2\alpha$

sin

$\sin(\alpha+\beta) \cos 4\beta = -\frac{8}{17}.$ $2\cos^2 2\beta$

$+\sin 2\alpha$ $2 - 2\sin^2 2\alpha$

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta) + \sin(4\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin(4\beta)\cos(2\alpha) = \frac{-8}{17}.$ $(2a+2b)^2 \pm 1 - 8a + 16b + 16$

$2\sin 2\alpha - 2\sin^3 2\alpha$ $(2b-2a-4)(2b-2a-4)$

$\sin 4\beta = 2\cos 2\beta \sin\beta$ $4b^2 - 4ab - 8b - 4ab + 4a^2 + 8a - 8b + 8a + 16$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ $4b^2 + 4a^2 - 8ab - 16b + 16a + 16$

$(2a-2b)^2 + 16(a-b+1)$

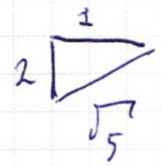
$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta) + \cos(2\alpha)\, 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}.$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = \frac{-8}{17}.$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}}.$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}} =$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$



$\frac{4}{\sqrt{17}}\operatorname{tg} 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\alpha =$

$\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\frac{8}{\sqrt{17}} \cancel{\sin 2\alpha \cos 2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{17}}$ $4\operatorname{tg} 2\alpha = \cancel{-2}\ -\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА