МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$|x^2+6x|=x^2+6x$ по ОДЗ.

$x^2+6x=4^{\log_4(x^2+6x)}$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}=4^{\log_4(x^2+6x)\log_4 5}=\left(4^{\log_4 5}\right)^{\log_4(x^2+6x)}=$

$=5^{\log_4 x^2+6x}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4(x^2+6x)}\geq 0$

Отсюда следует, что $\log_4(x^2+6x)\leq 2$.

$x^2+6x\leq 16$ $(x-2)(x+8)\leq 0$.

$x\in[-8;2]$

с учетом ОДЗ $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$.

№1

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} & (1)\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17} & (2)\end{cases}$ $\operatorname{tg}\alpha-?$

2). $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$.

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

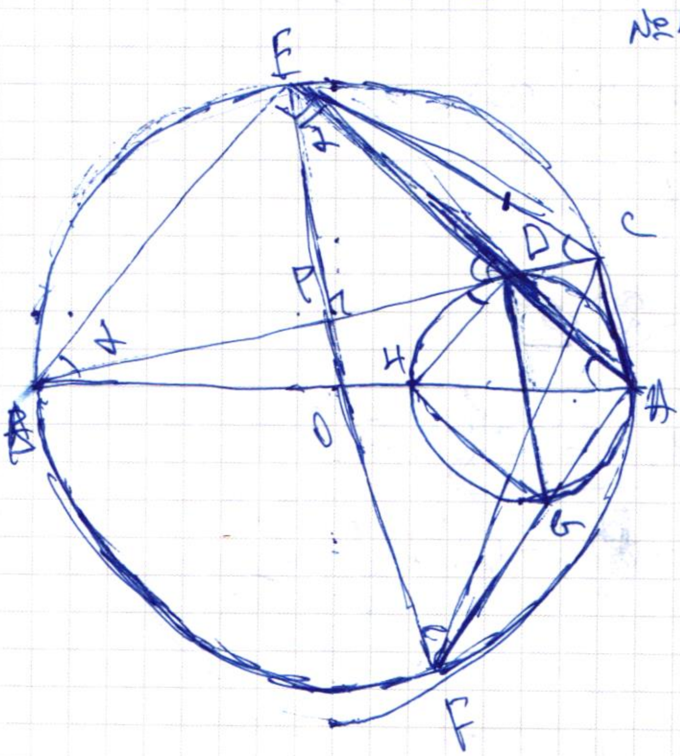
$$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -1 \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\,tg\,\alpha + 2 = 0 \\ 8\,tg\,\alpha + 2\,tg^2\alpha = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{1}{4} \\ tg\,\alpha = 0, \quad tg\,\alpha = -4 \end{array}$$

Ответ: $tg\,\alpha = \{0; \frac{1}{4}; -4\}$

№4



Дано: Ω, ω, $\Omega \cap \omega = \{A\}$

AB – диаметр Ω

$BC \cap \omega = \{D\}$

$AD \cap \Omega = \{E; A\}$

$EF \perp BC$

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

R – ?, r – ?, $\angle AFE$ – ? S_{AEF} – ?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $AB \cap \omega = \{A', H\}$, $AF \cap \omega = \{A', G\}$, $HC \cap BC = \{P\}$

~~$\angle BAE = \angle ADH$ (касательная к AD) — касательная к хорде~~

$\angle BAE = \angle ADH$ (DH — хорда, BP — касательная)

$\angle ADH = 90^\circ$ (AH — диаметр ω)

$\angle BDH = 90^\circ$, $\angle BEA = 90^\circ$ (AB — диаметр Ω)

$\angle EDB = 90^\circ - \angle EBC = 90^\circ - \angle BDH \Rightarrow \angle EBC = \angle BDH$.

$BE = CE$ (опираются равные углы).

Пусть $\angle EBC = \alpha$

$\angle BCB = \alpha$, $\angle AEF = \alpha$

EP — высота $\triangle BEC \Rightarrow EP$ — медиана $\Rightarrow FE$ — диаметр Ω.

$BP = \frac{9}{2}$, $PD = 2$.

$tg\alpha = \frac{2}{3} = \frac{EP}{\frac{9}{2}} \Rightarrow EP = 3$.

$EP \cdot PF = BP \cdot PC$ (пересекающиеся хорды).

$3PF = \frac{81}{4}$.

$PF = \frac{27}{4}$.

$R = \frac{PF + EP}{2} = \frac{\frac{27}{4}+3}{2} = \frac{39}{8}$.

$\angle EAF = 90^\circ$ (EF — диаметр Ω) $\Rightarrow DG$ — диаметр ω.

$\angle BDG = 90^\circ$ (касательная к диаметру).

$\angle ACB = 90^\circ$ (AB — диаметр ω)

$EF \parallel DG \parallel AC$

По теореме Фалеса:

$$\frac{BD}{DP} = \frac{r}{R-r}.$$

$$\frac{r}{R-r} = \frac{5}{4} \qquad 4r = 5R - 4r$$

$$r = \frac{5}{9}R = \frac{5 \cdot \cancel{39}^{13}}{{}_3\cancel{9} \cdot 8} = \frac{65}{24}$$

$$\angle AFE = 90° - \alpha$$

$$tg \angle AFE = ctg\,\alpha = \frac{3}{2}.$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$AE = 2R \cdot \cos\alpha = \frac{39}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$AF = 2R \cdot \sin\alpha = \frac{39}{2} \cdot \sqrt{13}.$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF = \frac{39 \cdot 3 \cdot \cancel{39}^{13}}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cancel{13}} = \frac{39^2}{16} = \frac{1521}{16}.$$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{65}{24}$ $tg \angle AFE = \frac{3}{2}$, $S_{AEF} = \frac{1521}{16}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{8}{17}$

$\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=$

$=\frac{4\sin2\alpha+\cos2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)+2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=$

$4\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$\sin(2\alpha+2\beta)(1+2\cos2\beta)=-\frac{\sqrt{17}+8}{17}$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\cancel{1}=-\cancel{1}$

$8\,tg\alpha+2\,tg^2\alpha=0$, $\sin(2\alpha+8\beta)=-\sin2\beta$

$tg\alpha=0$ $tg\alpha=-4$ $\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\sin2\beta$

$\times\begin{array}{r}39\\39\\\hline 351\\117\\\hline 1521\end{array}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{8}{17}$

$\frac{2}{\sqrt{17}}\cos2\beta=\frac{8}{17}$ $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=$

$=2\,tg\alpha\cos^2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\cos2\beta=$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{2}{1+tg^2\alpha}-1$

$4\sin2\alpha+\cos2\alpha$.

$=\frac{2-1-tg^2\alpha}{1+}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + \cancel{6} x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} = 4^{\log_4(x^2+6x)\log_4 5}$

$3^t + 4^t \geq 4^{\log_4 5 t} = 5 \cdot 4^t$

$3^t + 4^t \geq 5 \cdot 4^t$

$3^t \geq 4 \cdot 4^t$ $\quad t\log_4 3 \geq \log_4(4 \cdot 4^t) \geq 1$

$3^t \geq 4^{t+1}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 4 \cdot 4^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 4(x^2+6x)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq (4^{\log_4 5})^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^t + 4^t - 5^t \geq 0$ $\quad t=2$

$4^{\log_4 3 t} + 4^t - 4^{t\log_4 5} \geq 0$

$\log_4$

$\log_4(x^2+6x) \leq \log_4$

$x^2+6x \leq 16$

$x^2+6x-16 \leq 0$

$(x-2)(x+8) \leq 0$

$x \in [-8; 2]$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9y^2+4x^2=15xy-2x-3y+2.$

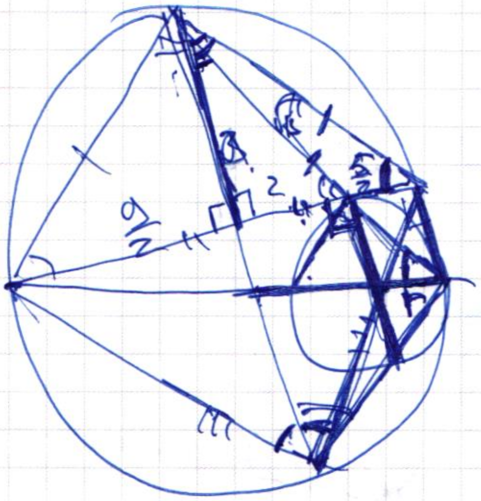
$9y^2$

$5(x^2+y^2)^2+6xy$

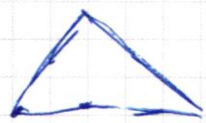
$\frac{2}{a}=\frac{a}{\frac{9}{2}}$ 3

$3x^2+3y^2-2x+2y=4+2\sqrt{}$

$\frac{1}{a}=\frac{a}{9}$ $a=3.$



$3b=\frac{81}{4}$



$b=\frac{27}{4}.$ $\frac{27}{4}+3=\frac{39}{8}$

$\frac{5}{2}$ $R-r,$ $R=\frac{39}{8}$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$\frac{R-r}{r}$ $\frac{r}{R-r}=\frac{5}{4}$ $\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3y-2x$

$4x^2-17x+15=0$

$4r=5R-5r.$

$\frac{9}{5}r=\frac{5}{9}R=\frac{39\cdot5}{8\cdot9_3}=\frac{65}{24}$

$17\cdot17=289$

$289-4\cdot15\cdot4$

$289-240=49$ $\frac{17\pm7}{8}=3,\ \frac{5}{4}.$

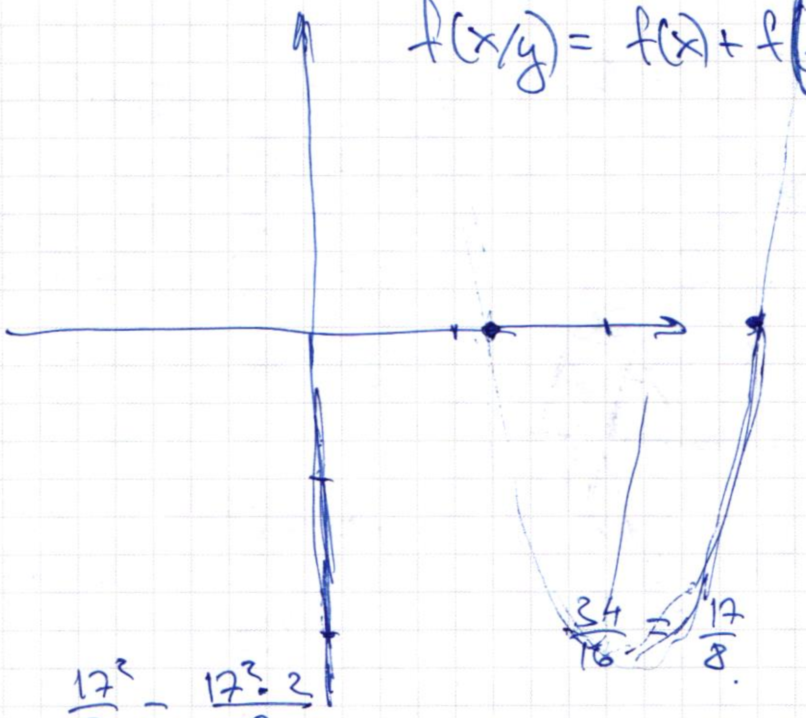
$(3y-2x)^2=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$2\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$.

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$(4x-5)(x-3)$.

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=$



$\frac{17^2}{8}-\frac{17^2\cdot 2}{8}$

$-\frac{17^2}{8}+30=\frac{-289+240}{8}$

$-\frac{49}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-1}$ $\quad 4x-3 \,|\, x-1$

$9y^2-4$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$x^2+6y^2+8x^2+7y+2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

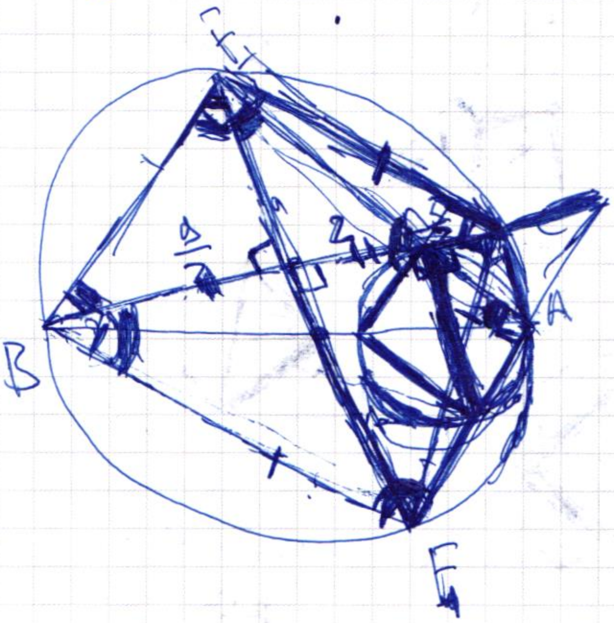
~~4sin2α~~.

$8\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

~~8sinαcosα~~

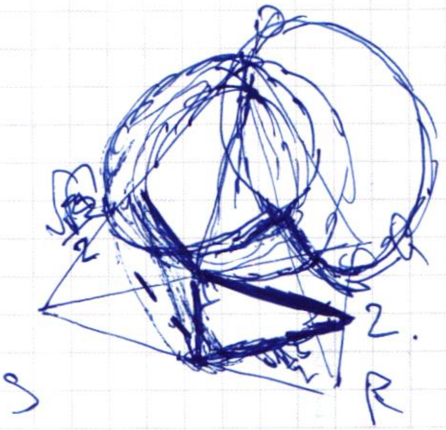
$8tg\alpha + 2tg$

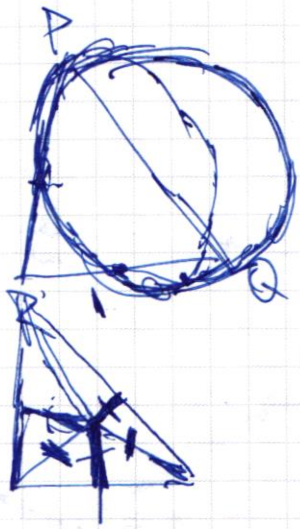
$9y^2 - \cancel{6xy} + 4x^2 = 15xy - 2x - 3y + 2.$



$\frac{r}{R} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



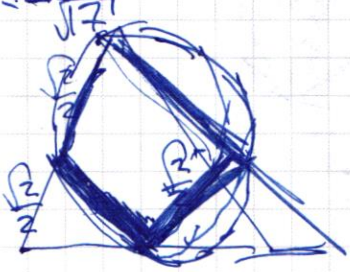


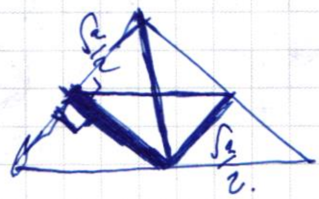
$tg^2\alpha+1.$

$\cancel{\sin 2\alpha + \cos 2\beta}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha$





$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha -$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2\alpha - 1 =$

$= \frac{1}{1+tg^2\alpha} - 1$

$\sin 2\alpha =$

$= \sin\alpha\cos\alpha = tg\alpha \cos^2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\frac{8tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$\frac{8tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \quad -1$

$8tg\alpha + 1 - tg^2\alpha + 1 + tg^2\alpha$

$8tg\alpha + 1 - tg^2\alpha + 1 + tg^2\alpha$

$8tg\alpha + 2 = 0. \qquad tg\alpha = \frac{1}{4}.$