МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45; \end{cases}$ $\begin{cases} y-6-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}, \quad (3) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90; \end{cases}$

Пусть $y-6=b$, $x-1=a$, тогда:

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab}, \quad (1) \\ 9a^2+b^2=90; \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow b^2+36a^2-12ab=ab \Rightarrow$ (из (2)) $90+27a^2=13ab \Rightarrow$

$\Rightarrow b=\frac{90+27a^2}{13a} = \frac{9(10+3a^2)}{13a}$ (если $a\neq 0$) $\Rightarrow$ (из (2)): $a^2+\frac{9(10+3a^2)^2}{169a^2}=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 169a^4-1690a^2+900+81a^4+540a^2=0 \Rightarrow 250a^4-1150a^2+900=0$

$\Rightarrow 10a^4-46a^2+36=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{2116-1440}=\cancel{\sqrt{1942}=2\sqrt{493}}=\sqrt{676}=26$

$a^2=\frac{46\pm 26}{20}$, $a_1=1$, $a_2=3,6$

$b_1=\frac{117}{13}=9$ (т.к. $b=\frac{90+27a^2}{13a}$), $9-6=\sqrt{9\cdot 1}$ & $9+9^2=90 \Rightarrow$ решение подходит

$b_2=\frac{90+27\cdot\frac{18^2}{5^2}}{13\cdot\frac{18}{5}}=9\left(\frac{250+972}{13\cdot 18\cdot 5}\right)=\frac{125+486}{13\cdot 5}=\frac{611}{13\cdot 5}=\frac{47}{5}=9,4$

$9,4-6\cdot 3,6<0 \Rightarrow$ решение не подходит

если $a=0$; $x=1$, $y=6$ (из 3), но $9(1-1)^2+(6-6)^2\neq 90 \Rightarrow a\neq 0$.

$x_1=2$, $y_1=15$, ~~$x_2=4,6$, $y_2=15,4$~~

Ответ: $(2;15)$ ~~$(4,6;15,4)$~~

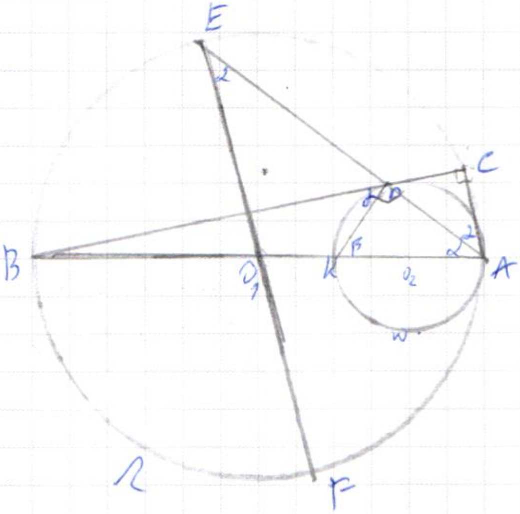
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№ 4



Дано: Ω, ω — окр-ти, Ω кас ω в т. A, BA — диаметр Ω, BD — кас ω, $BD \cap \Omega = C$, $AD \cap \Omega = E$, $EF \perp BC$, $F \in \Omega$, $CD = 12$, $BD = 13$.

Найти: R_Ω, R_ω, $\angle AFE$, S_{AEF}

Решение:

1) Пусть O_1 — ~~...~~ центр Ω, O_2 — центр ω, т.к. BA — диаметр Ω и A — т. касания, то $O_1, O_2 \in BA$. Пусть $R = R_\Omega$, $r = R_\omega$. Пусть $BA \cap \omega = K$. Пусть $EF \cap BA = O_1'$. Пусть $\angle EAB = \alpha$, $\angle DKA = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.к. $\angle KDA = 90^\circ$, т.к. KA — диаметр ω. $\angle BDK = \angle DAK = \alpha$, т.к. BD — касательная, $\angle BDE = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = \beta \Rightarrow \angle FEA = 90^\circ - \beta = \alpha \Rightarrow \triangle AO_1'E$ — р/б $AO_1' = O_1'E$, но если $O_1' \neq O_1$, то т.к. все точки равноудалённые от O_1' на расстояния $O_1'A$, лежат на окружности (радиусом $O_1'A$) которая касается Ω в т. A (т.к. точки O_1, O_1' и A — коллинеарны), то не существовало бы точек пересечения этой окружности с Ω отличных от A, но E должна была бы относиться к ней $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow O_1' = O_1 \Rightarrow EF \cap BA = O_1$.

2) По т. о степени точки для ω и B, и т.к. BD — касательная: $BD^2 = BK \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R = 4R^2 - 4Rr = 169 \Rightarrow r = \frac{4R^2 - 169}{4R}$. Т.к. OE — сер пер к BC, то $\cup BE = \cup EC = 2\alpha \Rightarrow \angle EAC = \alpha \Rightarrow CD = DA \cdot \sin\alpha$ (т.к. $\angle BCA = 90^\circ$) $\Rightarrow CD = KA \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = 2r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha = r \cdot \sin(2\alpha) = 12$. Из $\triangle BCA$: $BC = BA \cdot \sin 2\alpha = 2R \cdot \sin 2\alpha = 25 \Rightarrow \frac{2R}{r} = \frac{25}{12}$ (т.к. $\sin(2\alpha) \neq 0$) $\Rightarrow r = \frac{24R}{25} \Rightarrow 4R^2 - \frac{96R^2}{25} = 169 \Rightarrow 4R^2 = 25 \cdot 169 \Rightarrow 2R = 5 \cdot 13 \Rightarrow R = \frac{65}{2} = 32{,}5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow r = \frac{12\cdot 5\cdot 13}{25} = \frac{12\cdot 13}{5} = 31{,}2$; т.к. $2R\cdot\sin 2\alpha = 25$, то $\sin 2\alpha = \frac{25}{5\cdot 13} = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{12}{13}$ (т.к. $2\alpha < 90^\circ$) $\Rightarrow 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow 2\sin^2\alpha = \frac{1}{13} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

(т.к. $\alpha < 90^\circ$) $\Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{26}}$ (т.к. $\sin\alpha = \cos\beta$, т.к. $\alpha + \beta = 90^\circ$) $\Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)$

$\angle EFA = \beta$ ~~т.к. ...~~ $= 90^\circ - \alpha = \beta$ (т.к. EF - диаметр Ω и $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$.

3) $EA = EF\cdot\cos\alpha$, $AF = EF\cdot\sin\alpha \Rightarrow S_{EAF} = \frac{1}{2}EF^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$ (т.к. $\angle EAF = 90^\circ$) $=$

$= \frac{1}{2}\cdot 4R^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = R^2\cdot\sin(2\alpha) = \frac{65}{2}\cdot\frac{25}{2} = \frac{1625}{4} = 406{,}25$

Ответ: $R_\Omega = 32{,}5$; $R_\omega = 31{,}2$; $\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$; $S_{AEF} = 406{,}25$

N5 $f(ab) = f(a) + f(b)$

1) ~~если $a = a$, $b = \frac{1}{a}$: $f(1)$~~ если $a = b = 1$: $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

2) если $a = a$, $b = \frac{1}{a}$: $f(1) = 0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

3) если $a \in N$, b - простое: $f(ap) = f(a) + f(p) \Rightarrow f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}) =$

$= \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$ ($\alpha_i \in N_0$, p_i - простое $\forall i$)

п.1 При $x = 4 \vee 6 \vee 8 \vee 9 \vee 12 \vee 16 \vee 18 \vee 24 \vee 27$ $f(x) = 0$ (т.к. все они состоят из степеней 2 и 3, а $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$, $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$. и из св-ва 3)), при этом это все такие числа от 4 до 28 $\Rightarrow$ при любом других натуральном x из этого промежутка $f(x) > 0$ (т.к в этих числах будет простое p отличное от 2 и 3, а при любом таком p $f(p) \geq 1$, а значит по св-ву (3): $f(x) \geq 1$) при таких x $\Rightarrow$ существует $9\cdot 16$ пар (x,y) таких что $f(x) - f(y) < 0$, т.е ~~$f(\frac{x}{y})$~~ $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ т.е. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

п2 При $x = 5 \vee 7, 10, 14, 15, 20, 21, 28$ $f(x) = 1$ (т.к все они содержат не более одного простого множителя отличного от 2 и 3 и по св-ву(3), и при

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Значит это все числа из интересующего нас промежутка =>

$f(x) \geq 2$ для любого x ~~не~~ $\neq 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21,$

28 (аналогично п.1)) => при таких x существует $8 \cdot 8$ пар (x, y) для которых $f(\frac{x}{y}) < 0$

(аналогично п1).

п.3. При $x = 11 \vee 22 \vee 25$ $f(x) = 2$ => (аналогично п1, п2) при таких x существует $3 \cdot 5$ пар

(x, y) для которых $f(\frac{x}{y}) < 0$

п.4 При $x = 13, 26$ $f(x) = 3$ => (аналогично п1, п2) при таких x $\exists$ $2 \cdot 3$ пар (x, y)

для которых $f(\frac{x}{y}) < 0$

п5 При $x = 17, 19$ $f(x) = 4$ => (аналогично п1, п2) при таких x $\exists$ $2 \cdot 1$ пар (x, y)

для которых $f(\frac{x}{y}) < 0$

~~п6 При $x = 19$ $f(x) = 5$ => (аналогично п1, п2) при таких x $\exists$ $2 \cdot 1$~~

~~пар (x, y) для которых $f(\frac{x}{y}) < 0$~~

п6 При $x = 23$ $\exists$ 0 пар для которых $f(\frac{x}{y}) < 0$ т.к. $f(23) = 5$,

а при всех других x $f(x) < 5$

Из п 1-6: $\exists$ $9 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 = 144 + 64 + 15 + 5 + 2 =$

$= 230$ пар при которых $f(\frac{x}{y}) < 0$

Ответ: 230

№1 $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (из (1)) $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta \pm \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 16\cos^2 2\alpha = 1 + \sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 16(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) = 17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha + 1 \Rightarrow 17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{4 + 1020} = 32 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{-2-32}{34} \vee \frac{-2+32}{34} \Rightarrow \sin 2\alpha =$

$= -1 \vee \frac{15}{17}$, но если $\sin 2\alpha = -1$, то $2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = -1$ ~~$tg\alpha$ — несуществует~~. Если $\sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Leftrightarrow \frac{15}{17} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \pm 2\sin\alpha\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \quad \forall p \in P$

$4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_n f(p_n)$

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 - f(a)$

4 5 6 7 8 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17

~~18~~ 19 ~~20~~ 21 ~~22~~ 23 ~~24~~ 25 ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~

$f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

$\alpha_1 f(p_1) + \dots + \alpha_n f(p_n)$

$\alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right] > \beta_1 \left[\frac{q_1}{4}\right] + \dots + \beta_n \left[\frac{q_n}{4}\right]$

$2^2 \quad 3^2 \quad 25$

$2^{2-4} \quad 3^{2-3}, 5^2,$

7, 11, 13, 17, 19,

23,

25

~~4~~

Если $x = 4 \vee 6 \vee 8 \vee 9 \vee 12 \vee 24$, то верно при $\forall y \ne 4, 6, 8, 9, 12, 24$

$f(4) = f(2) + f(2) =$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

т.е. 17 · 8 пар

$f(5), f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

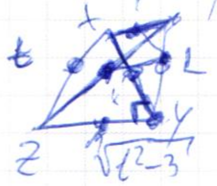
Если $x = 5 \vee 10 \vee 15 \vee 20 \vee 7 \vee 14 \vee 21 \vee 27$ $\forall y \ne$ 3 чисел и 8 чисел, верно, т.е. 8 · 16 пар

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



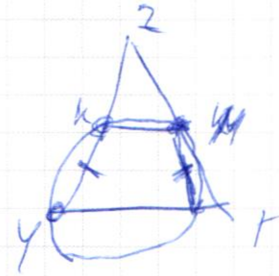
$kL = 1 \quad PL = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$XY = \sqrt{3}$

$TX = \sqrt{2}$

$TZ = 2$

XZ ?



$\frac{t}{2}$, 1 , $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 =$

$= -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$

$\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha +$

$+ \cos^2 2\alpha = 0$

$\cancel{-1+2\sin^2 2\alpha - 2\sin^2}$

$\pm 4\cos 2\alpha = -1 \mp \sin 2\alpha$

$16\cos^2 2\alpha = 1 + \sin^2 2\alpha +$

$+ 2\sin 2\alpha$

$16(1-\sin^2 2\alpha)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{36}{10} = \frac{18}{5}$ $\quad 90 + \frac{8104\cdot 77}{25} =$ $\quad \frac{(90\cdot 25 + 8104\cdot 27)\cdot 8}{28\cdot 13\cdot 18}$ $\quad 625+51$

$130\cdot\frac{18}{5}$ $\quad 2116 - 1440 = 676$ $\quad 250a^4$ $\quad 78$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 676 \mid 26^2$ $\quad 810+162$ $\quad 972$

$23^2 =$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad 9a^2 + \frac{8100+3^6a^4+20\cdot 3^5a^2}{169a^2} =$

$400+41+43+45 =$

$69\alpha = 529$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\quad 169a^4+900+3^4a^4+20\cdot 27a^2 = 90$

$\exists\, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ $\quad \sin 2\alpha + 2\beta = 0 \ \vee\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad = 1690a^2$

$529 - 36 =$
$= 493$ $\quad 1972 = 4\cdot 493$ $\quad 493 \mid 17$ $\quad 29$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$17\cdot 29$ $\quad 153$ $\quad 1972$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$ $\quad \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$9x^2+y^2-18x-12y = 45$ $\quad 900$ $\quad 4$ $\quad 46^2$ $\quad \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$(3x-3)^2+(y-6)^2-9-36 = 45$ $\quad 276+184 = 2116$ $\quad \sin 2\alpha \pm 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 90$ $\quad \pm 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1-\sin 2\alpha$

$9(x-1)^2+(y-6)^2 = 90$

$y-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} =$ $\quad x-1=a$ $\quad b = \frac{90+27a^2}{13a}$ $\quad 16(1-\sin^2 2\alpha) = 1+\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha$

$= \sqrt{(x-1)(y-6)} =$ $\quad y-6=b$ $\quad 17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0$

~~$y=6 \vee \sqrt{x-1} = \sqrt{y-6}$~~ $\quad 9a^2+b^2 = 90$

$90 - 9a^2 + 36a^2 - 13ab = 0$ $\quad D = 4 + 4\cdot 15\cdot 17$

$b - 6a = \sqrt{ab}$ $\quad 27a^2 - 13ab + 90 = 0$ $\quad = 4(255+1) =$

$= (y-6) - 6(x-1)$ $\quad b^2+36a^2-12ab = ab$ $\quad 6ab = 6b^2+216a^2-72a$ $\quad = 4\cdot 256 =$

$52 - 300$ $\quad 300-52$ $\quad 248$ $\quad b^2+36a^2-13ab = 0$ $\quad = 1024$

$338 - 135a^2 \pm 26\sqrt{\ldots} = 90$ $\quad \sqrt{D_b} = \sqrt{169-4\cdot 36\cdot a^2}$ $\quad \sqrt{D} = 32$

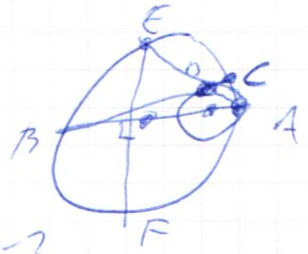
$135a^2 - 248 = \pm 26\sqrt{\ }$ $\quad b = \frac{13\pm\sqrt{169-4\cdot 36\cdot a^2}}{2}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{-2\pm 32}{34}$

$135a^4 + 248^2 - 135\cdot 248a^2 = b^2 = 338 - 144a^2 \pm 26\sqrt{\ldots}$ $\quad \sin 2\alpha = -1 \vee \frac{15}{17}$

$= 169 - 144a^2$ $\quad b^2$

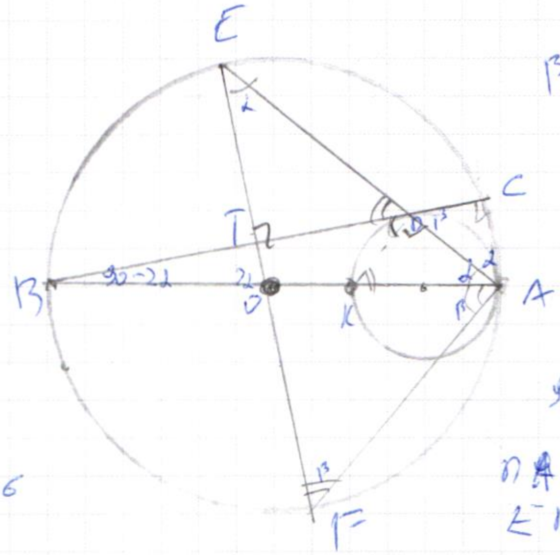
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



R – ?
r – ?
∠AFE – ?
S_{AFE} – ?

CD = 12
BD = 13



9,4 – 3,8 = 6

125 · 13 =
= 1250 + 375 =
= 1625
~~β = α = 90 – 2α~~

625 · 13

α + β = 90°
~~2α + 2β~~

~~90 = 2α = 1~~
DA = 2r · cos α
ED =

~~BD · BC~~ = 13 · 25 = BK · ~~B~~A =
= (2R – 2r) · 2R =
= $4R^2 - 4rR$ = 169
$r = \frac{4R^2 - 169}{4R}$

CD = ~~DA · cos α~~
CD = DA · sin α
DA = 2r · cos α
CD = 2r · cos α · sin α =
= r · sin 2α =
= 12 =
$= \frac{4R^2 - 169}{4R} \cdot \sin 2\alpha$

~~BD · DC = ED · DA~~ =
= ~~13 · 12~~
BD · DC = ED · DA = 13 · 25
BD^2 = ~~A~~K · BA = $4R^2 - 4rR = 169$

$\frac{CD}{EF} = \frac{ET}{EA}$
CD · EA = EF · ET

ED · DA = 13 · 12

R · sin 2α =
= BT

$\frac{BT}{TC}$ =

BT · T

ET · TF = BT^2 = $\frac{R^2}{\cos(\beta - \alpha)}$ = ET · TF

$\frac{2R}{\cos 2\alpha} = 25$

2R = $\frac{25}{\cos 2\alpha}$

cos 2α =
=

$\frac{\frac{625}{\cos 2\alpha} - 169}{\frac{50}{\cos 2\alpha}}$ · sin 2α = 12

$\frac{625 - 169 \cos 2\alpha}{50} \cdot \sin 2\alpha = 12$

$\frac{ET}{EA} = \frac{EA}{EF}$

$\frac{R}{BC}$ = BC

$\frac{ED}{2R}$ =

~~ET · EF = EA²~~

ED · EA = ET · EF =
= ED · EA = ED^2 + 12 · 13

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\Rightarrow \frac{225}{289} = 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) \rightarrow 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + \frac{225}{289} = 0$

$\sqrt{D} = \sqrt{16 - 16\cdot\frac{225}{289}} = 4\sqrt{\frac{64}{289}} = \frac{32}{17}$

$\sin^2\alpha = \frac{4+\frac{32}{17}}{8} \vee \frac{4-\frac{32}{17}}{8} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{25}{34} \vee \frac{9}{34} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{34} \vee \frac{25}{34}$

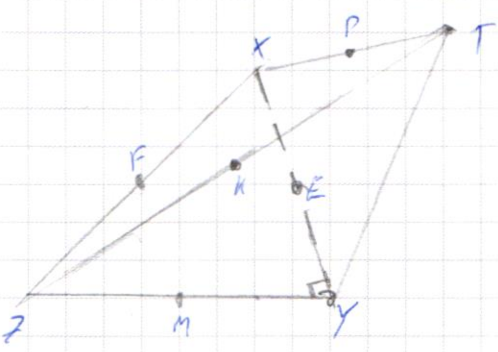
соответственно $\Rightarrow tg^2\alpha = \frac{25}{9} \vee \frac{9}{25} \Rightarrow tg\alpha = \frac{5}{3} \vee -\frac{5}{3} \vee \frac{3}{5} \vee -\frac{3}{5}$, но

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow$ $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ одного знака $\Rightarrow tg\alpha > 0 \Rightarrow tg\alpha\ \frac{5}{3} \vee \frac{3}{5}$

Значит $tg\alpha = \frac{5}{3} \vee \frac{3}{5} \vee -1$, но т.к. в условии сказано, что решений ≥ 3, то все эти решения подходят

Ответ $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$; -1

№7



Дано: $TXYZ$ — пирамида, ω — ~~окружность~~ сфера, M, K, E, F, P — середины ZY, ZT, XY, XZ, XT соответственно. $M, K, E, F, P, Y \in \omega$, $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$

Найти: XZ; т/п радиус ω.

Решение:

1) ~~Это~~ рассмотрим плоскость ZXY: окружность ω — проходит через середины $\triangle ZYX \Rightarrow \omega$ — окр. 9 точек, но она проходит через вершину $\triangle$ тогда и только тогда когда угол при вершине $90° \Rightarrow \angle XYZ = 90°$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 11 13 14 17 19 21 23 25

11, 13, 17, 19, $\overset{22}{23}$, 25, 26

18

x = 4, 6, 8, 9, 12, 16, 24, 27 — 16 · 9 пар

x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, ~~28~~, 28 — 8 · 8 пар

x = 11, 22, 25 — 5 · 3 пар

x = 13, 26 — 3 · 2 пар

x = 17 — 2 пары

x = 19 — 1 пара

x = 23 — 0 пар

144 + 12

156

312

$2\alpha = \cancel{\pi k}\ \pi(2k+1)$

$\alpha = \pi k + \frac{\pi}{2}$

~~692~~

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17} = 2\cos\alpha \sin\alpha =$

~~$\sin\alpha =$~~

$= 2\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\frac{225}{289} = 4\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)$

$4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha + \frac{225}{289} = 0$

$D = 16 - \frac{16 \cdot 225}{289} =$

$= 16\left(\frac{64}{289}\right) =$

$= \frac{2^{10}}{172}$

$\sqrt{D} = \frac{32}{17}$

$\sin^2\alpha = \frac{4}{}$

$\sin 4\beta = -\frac{3}{17}$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{?}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)