МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $$-\begin{cases}13x+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=92\\ y+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=-124\end{cases}$$

$$\begin{cases}13x-y=216\\ y+\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=-124\end{cases}$$

$$y+\sqrt[3]{216\cdot(216+y+y)}=-124$$

$$y+6\sqrt[3]{216+2y}=-124.$$

$$6\sqrt[3]{216+2y}=-y-124$$

$$216(216+2y)=-y^3-3\cdot124y^2-3\cdot124^2y-124^3$$

$$6^6+6^3\cdot2y+y^3+3\cdot4\cdot31y^2+3\cdot4^2\cdot31^2y+4^3\cdot31^3=0.$$

$$y^3+2^2\cdot3\cdot31y^2+12(6^2+4\cdot31^2)y+(2^6\cdot3^6+2^6\cdot31^3)=0$$

$$y^3+2^2\cdot3\cdot31y^2+48(3^2+31^2)y+2^6(9^3+31^3)=0$$

$$y^3+2^2\cdot3\cdot31y^2+2^5\cdot3\cdot5\cdot97y+(2^9\cdot5\cdot7\cdot109)=0.$$

Нет ни одной смены знака. Сл-но, по правилу Декарта ур-е не имеет положительных корней.
Если левую часть предст. как ф-ию от y, то её производная всегда будет положительна значит, ф-ия монотонна и каждое зн-е (в том числе, 0) принимает 1 раз.

Значит, ур-е имеет ровно 1 отрицательный корень.

Более того, он является одним из делителей числа $2^9\cdot5\cdot7\cdot109$.

Т.к. зависимость x от y линейная $(13x=y+216)$, то ед. знач-ю y будет соотв. ед. зн-е x. Тогда решением будет ровно одна точка $(x;y)$. — Ответ

② $\sqrt{\log_{3x^2}(x^9)} \leqslant \log_{9x^3}\left(\frac{1}{x^3}\right)$. <u>ОДЗ</u>: $\begin{cases} \log_{3x^2}(x^9) \geqslant 0 \\ 9x^3 > 0 \\ 9x^3 \neq 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup [1; +\infty)$.

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leqslant -3\log_{9x^3} x$

Нарушим ОДЗ, но потом проверим случай $x=1$:

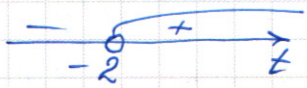
$$\sqrt{\frac{1}{\log_x(3x^2)}} \leqslant \frac{-1}{\log_x(9x^3)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3 + 2}} \leqslant \frac{-1}{2\log_x 3 + 3}$$

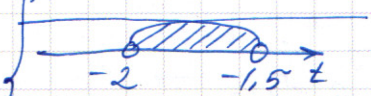
Заменим $\log_x 3 = t$:

$$\sqrt{\frac{1}{t+2}} \leqslant \frac{-1}{2t+3}$$ в квадрат с условиями:

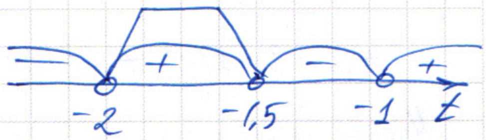
$$\begin{cases} \frac{-1}{2t+3} \geqslant 0 \\ \frac{1}{t+2} \leqslant \frac{1}{(2t+3)^2} \\ \frac{1}{t+2} \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{t+1,5} \leqslant 0 \\ \frac{(2t+3)^2 - (t+2)}{(t+2)(2t+3)^2} \leqslant 0 \\ \text{} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{} \\ \frac{4t^2+11t+7}{(t+2)(t+1,5)^2} \leqslant 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} -2 < t < -1,5 \\ \frac{4(t+1)(t+1,5)}{(t+2)(t+1,5)^2} \leqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < t < -1,5 \\ \frac{t+1}{(t+2)(t+1,5)} \leqslant 0 \end{cases}$$



нет решений. Проверим упущенный $x=1$:

$$\sqrt{\log_{3\cdot 1^2}(1^9)} \overset{?}{\leqslant} \log_{9\cdot 1^3}\left(\frac{1}{1^3}\right)$$

$$\sqrt{\log_3 1} \overset{?}{\leqslant} \log_9 1$$

$0 \leqslant 0$ — верно. Значит, $x=1$ — ед. реш. нерав-ва.

<u>Ответ</u>: $\{1\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ Обозначим семизначное число $N = \overline{abcdefg}$, где a, b, c, d, e, f и g — цифры, причём $a \neq 0$.

В таком случае, остаток от деления N на 10^n будет выглядеть как число, составленное из n последних цифр. (считаем числа, начинающиеся с нуля, за обычные числа без этого (нулевого) разряда).

$10^1; 10^2; 10^3$: $\quad g + \overline{fg} + \overline{efg} = 12828$. — невозможно, т.к.

$\overline{g} + \overline{fg} + \overline{efg} \leq 9 + 99 + 999 = 1107 < 12828$

$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12828$ — снова невозможно, т.к. левая часть не превосходит (по аналогии) 11097.

Случаи $\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg}$ и $\overline{defg} + \overline{cdefg} + \overline{bcdefg}$ уже могут подойти, но $\overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + \overline{abcdefg} =$

$= \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + N \geq N \geq 10^6 > 12828$.

I: $\quad \overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12828$. Распишем числа по разрядам:

$100e + 10f + g + 1000d + 100e + 10f + g + 10000c + 1000d + 100e + 10f + g = 12828$

Если $c > 1$, то левая часть $\geq 20000 > 12828$. Рассмотрим ост. случ:

$c = 1$: $\quad 2000d + 300e + 30f + 3g = 2828$.

Если $d > 1$, то левая часть $\geq 4000 > 2828$.

При $d = 0$: $\quad 300e + 30f + 3g = 2828$. — невозможно, т.к. левая часть кратна 3, а правая — нет.

При $d = 1$: $\quad 300e + 30f + 3g = 828$

$e = 0$: $\quad 30f + 3g = 828$ — нет реш

$e = 1$: $\quad 30f + 3g = 528$ — нет реш

$e = 2$: $\quad 30f + 3g = 228$, $\Rightarrow 10f + g = 76$, т.е. $f = 7, g = 6$

Получено число вида $\overline{ab11276}$. a — 9 различных цифр
b — 10-ти цифр.

$\Rightarrow$ 90 вариантов.

Аналогичным образом для $c=0$ находим $\overline{ab06276}$ — тоже 90 вариантов.

II: $\underbrace{10^5 b}+2\cdot 10^4 c+3\cdot\overline{defg}=12828.$

при $b>0$ превосходит 12828, значит, $b=0$.

Тогда $c\in\{0;1\}$.

$c=0$: $2000d+\underbrace{300e+30f+3g}_{\leq 2997}=12828.$

$2000d\geq 12828-2997.$

$d\geq 5$. но $d\leq 6$, т.к. иначе превосх 12828.

при $d=5$: $\underbrace{300e+30f+3g}_{⋮\,3}=\underbrace{2828}_{\not⋮\,3}$ — невозможно

$d=6$: $300e+\underbrace{30f+3g}_{\leq 297}=828.$

$\Rightarrow e\geq 2$. но при $e>2$ $\Sigma>900>828$.

$e=2$: $30f+3g=228 \Rightarrow f=7,\ g=8.$

$\overline{a006278}$ — 9 вариантов.

Итог: $90+90+9=\underline{189}$

Ответ.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 $\dfrac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax+b \leqslant 1+\sqrt{-\dfrac{33}{4}-13x-x^2}, \quad x\in\mathbb{R}$

$\sqrt{136} \mid 4$; $\frac{12}{16}$; 34

• $\dfrac{2(6x+13)}{2x+3} \leqslant 1+\sqrt{-\dfrac{33}{4}-13x-x^2}$

$x^2+13x+\dfrac{33}{4}$.

$D=169-33=136=4\cdot2\cdot17$

$x=\dfrac{-13\pm2\sqrt{34}}{2}$.

$5<\sqrt{34}<6$
$10<2\sqrt{34}<12$
$-3<-13+2\sqrt{34}<-1$
$-\dfrac{3}{2}<\dfrac{-13+2\sqrt{34}}{2}<-\dfrac{1}{2}$

$-12<-2\sqrt{34}<-10$
$-25<-13-2\sqrt{34}<-23$
$-12{,}5<\dfrac{-13-2\sqrt{34}}{2}<-11{,}5$

$x_в=\dfrac{-13}{2}=-6.5$

$y_в=\sqrt{-\dfrac{33}{4}+13\cdot6{,}5-6{,}5^2}=\sqrt{-\dfrac{33}{4}+\dfrac{169}{2}-\dfrac{169}{4}}=$

$=\sqrt{\dfrac{169}{4}-\dfrac{33}{4}}=\sqrt{\dfrac{136}{4}}=\sqrt{34}$.

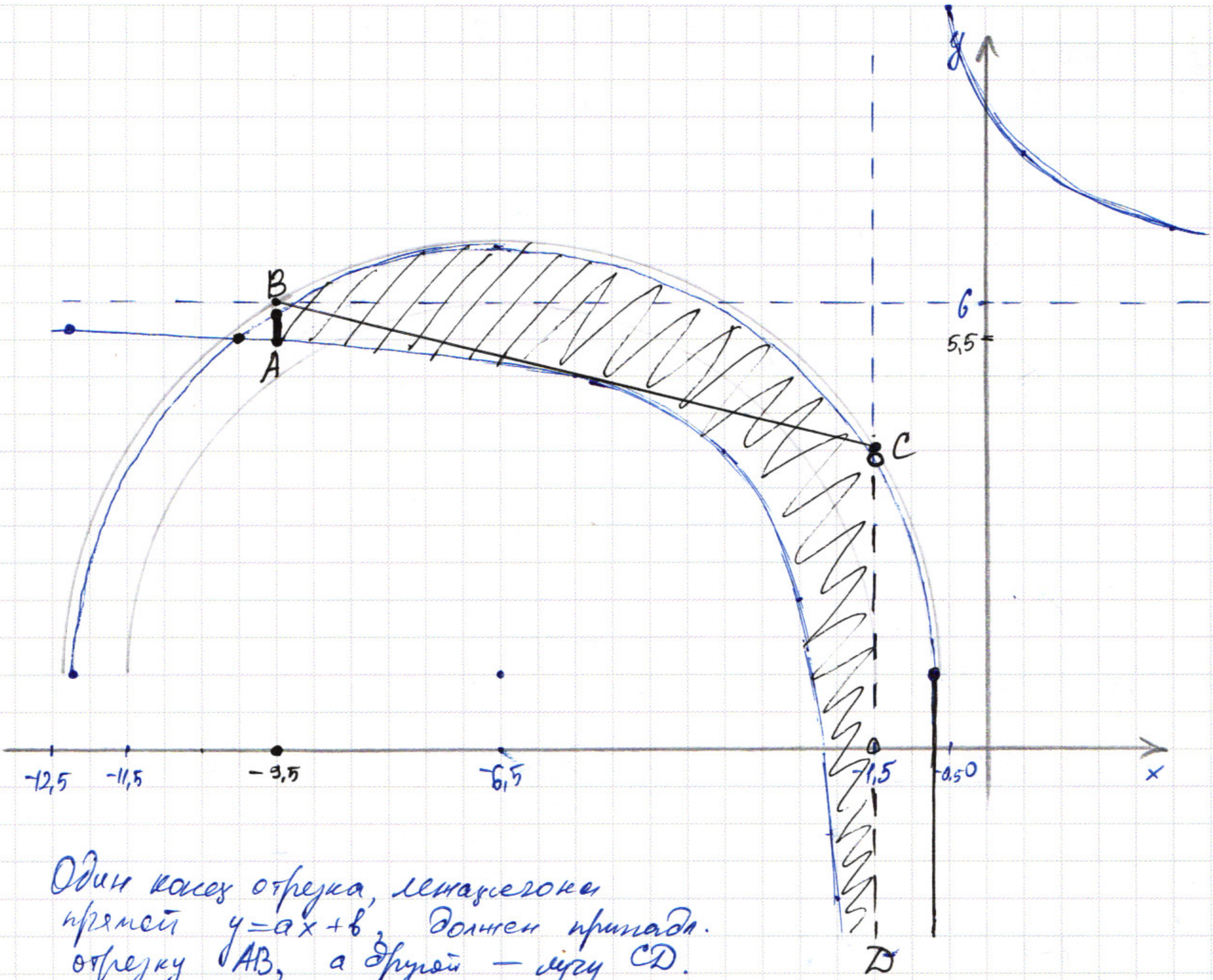
• верт. ас-та: $x=-\dfrac{3}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}\pm0}\left(\dfrac{12x+26}{2x+3}\right)=\pm\infty$

$(2x+3)\cdot6=12x+18$. 8

$6+\dfrac{8}{2x+3}=6+\dfrac{4}{x+\frac{3}{2}}$

• горизонт. ас-та: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x+26}{2x+3}=\dfrac{12}{2}=6$. $y=6$.



Один конец отрезка, лежащего на прямой $y=ax+b$, должен принадл. отрезку AB, а другой — дугу CD.

$$\begin{cases} y_A \le -9{,}5a + b \le y_B \\ -1{,}5a + b \le y_C \end{cases}$$

при этом прямая $y=ax+b$ не должна пересекать гиперболу $y = 6 + \frac{4}{x+1{,}5}$

$ax+b = 6 + \frac{4}{x+1{,}5} \quad | \cdot (x+1{,}5) \neq 0$ на ОДЗ

$(ax+b)(x+1{,}5) = 6(x+1{,}5) + 4 \cancel{ax}$

$ax^2 + (b+1{,}5a)x + 1{,}5b - 6x - 4 - 4 = 0.$

~~$ax^2 + (b-4{,}5)x + (1{,}5b-8) = 0.$~~ $ax^2 + (b+1{,}5a-6)x + (1{,}5b-8) = 0.$

~~При $a=0$: $(b-4{,}5)x + 1{,}5b - 8 = 0$~~ $a=0$: $(b-6)x + 1{,}5b - 8 = 0$

~~Если $b=4{,}5$, то $0 \cdot x + 1{,}5 \cdot 4{,}5 - 8 = 0$ — нет реш.~~

~~Если $b \neq 4{,}5$, то $x = \frac{8-1{,}5b}{b-4{,}5}$ — решение~~

~~$\Rightarrow (0; 4{,}5)$~~

При $a \neq 0$: $D<0$. ~~$D=(b-4{,}5)^2 - 4a(1{,}5b-8)<0$.~~

Если $b=6$, то: $0x+9-8=0$ — нет реш. ✓

$D=(b+1{,}5a-6)^2 - 4a(1{,}5b-8)<0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y_A = 6 + \frac{4}{-9,5+1,5} = 6 + \frac{4}{-8} = 6 - 0,5 = 5,5$$

$$y_B = \sqrt{-\frac{33}{4} + 13\cdot 9,5 - 9,5^2} + 1 = \sqrt{-\frac{33}{4} + \frac{13\cdot 19}{2} - \frac{19^2}{4}} + 1 =$$

$$= \sqrt{\frac{247}{2} - \frac{361+33}{4}} + 1 = \sqrt{\frac{247}{2} - \frac{197}{2}} + 1 = \sqrt{25} + 1 = 6$$

$$y_C = 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} + 13\cdot 1,5 - 1,5^2} = 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} + \frac{39}{2} - \frac{9}{4}} =$$

$$\cancel{= 1 + \sqrt{\frac{39-17}{2}} = 1 + \sqrt{11}}\quad 1 + \sqrt{\frac{39-21}{2}} = \sqrt{9} + 1 = \cancel{2}\ 4$$

$13 \times 19 = 117 + 13 = 247$; $19 \times 19 = 171 + 19 = 361$; $361 + 33 = 394$; $394 : 2 = 197$; $247 - 197 = 50$; $33 + 9 = 42$; $14 \times 3 = 42$

Итак,
$$\begin{cases} 5,5 \le -9,5a + b \\ 6 \ge -9,5a + b \\ 4 \ge -1,5a + b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = \cancel{4}\ 6 \end{cases} \\ \cancel{(b-4,5)^2 - 4a(+1,5b-8) \ge 0}\ (b+1,5a-6)^2 - 4a(1,5b-8) < 0. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5,5 \le -9,5a + b \\ 6 \ge -9,5a + b \\ 4 \ge -1,5a + b \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b = 6 \end{cases} \\ b^2 + 2,25a^2 + 36 + 3ab - 12b - 18a - 6ab + 32a < 0 \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} b \ge 9,5a + 5,5 \\ b \le 9,5a + 6 \\ b \le 1,5a + 4 \end{cases}$$

$a(14 - 3b)$

$-3ab + 14a$

$12 \times 9 = 108$; $108 - 42 = 66$; 5; 30; 9; $234 - 196 = 38$; $| \cdot 4$

$$9a^2 + 4a(14 - 3b) + 4(b^2 - 12b + 36) < 0$$

$$D_1 = \cancel{2}\ 2^2(14 - 3b)^2 - 9\cdot 4(b^2 - 12b + 36) = 4(9b^2 - 42b + 196 - 9b^2 + 108b - 234) =$$

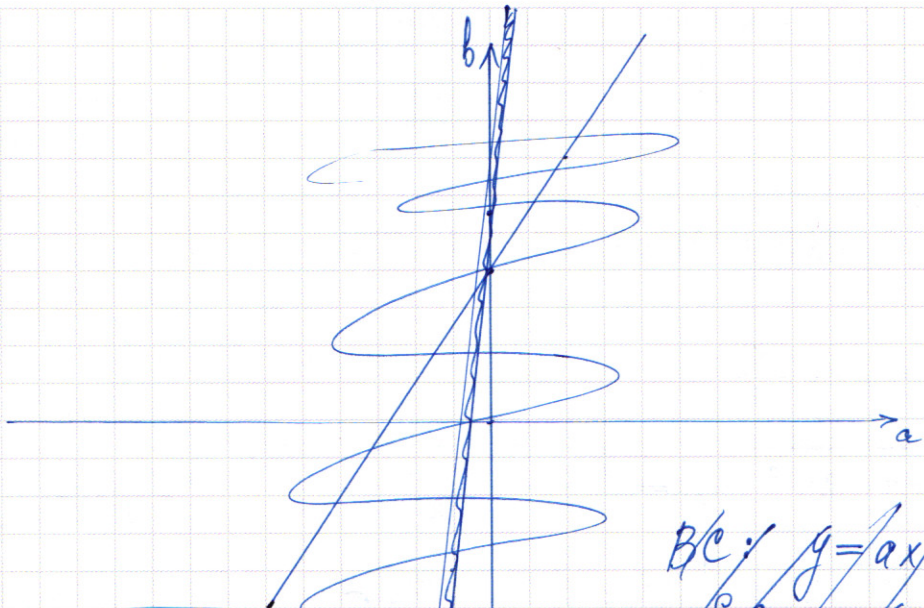
$$= 4(66b - 38) = 8(33b - 19)$$

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7

(Нумеровать только чистовики)



$$\begin{array}{r} 3,5 \\ \times\ 1,5 \\ \hline 175 \\ +\ 35\ \ \\ \hline 5,25 \\ +\ 4\ \ \ \ \ \\ \hline 9,25 \end{array}$$

~~BC: $y = ax + b$.~~

$$\cancel{-\begin{cases} 6 = a\cdot(-9,5)+b \\ 4 = a(-1,5)+b \end{cases}}$$

$$\cancel{2 = 7a}$$

$$\cancel{a = 3,5}$$

$$\cancel{b = 4+1,5\cdot 3,5}$$

ВС: — ед. случай

$$-\begin{cases} -9,5a+b=6 \\ -1,5a+b=4 \end{cases}$$

$$(-9,5+1,5)a = 2$$

$$-8a = 2$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$b = 4+1,5a =$$

$$= 4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} = 4 - \frac{3}{8} = \frac{32-3}{8} = \frac{29}{8} = b$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{4};\ \frac{29}{8}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $-\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$

$\begin{cases} 13x - y = 216 \\ 13x + \sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)} = 92 \end{cases}$

$\begin{cases} 13x - y = 216 \\ 13x + 6\sqrt[3]{13x+y} = 92 \end{cases}$

$\begin{cases} 13x = y + 216 \\ y + 216 + 6\sqrt[3]{y+216+y} = 92 : \end{cases}$

$y + 6\sqrt[3]{2y+216} = -124$

$6\sqrt[3]{2y+216} = -y - 124 \quad |^3$

$216(2y+216) = -y^3 - 3y^2 \cdot 124 - 3y \cdot 124^2 - 124^3.$

$y^3 + 3y^2 \cdot 124 + 3y \cdot 124^2 + 2 \cdot 216y + 216^2 + 124^3 = 0.$

Смены знака нет, $\Rightarrow$ ~~д. максимум 1~~ нет „+" корень – по Декарту

$y^3 + y^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 31 + y(3 \cdot 4^2 \cdot 31^2 + 2 \cdot 6^3) + 6^6 + 4^3 \cdot 31^3 = 0.$

$2 \cdot 3$
$2 \cdot 3$

Делители св. члена: $6^6 + 4^3 \cdot 31^3 = 2^6 \cdot 3^6 + 2^6 \cdot 31^3 =$

$= 2^6(3^6 + 31^3) = 2^6(9^3 + 31^3) = 2^6(9+31)(9^2 - 9 \cdot 31 + 31^2) =$

$= 2^6 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot (81 - 279 + 961) = 2^6 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 763 = 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 109$

$y^3 + y^2(2^2 \cdot 3 \cdot 31) + y(3 \cdot 2^4 \cdot 31^2 + 2 \cdot 2^3 \cdot 3^3) + (2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 109) = 0.$

$y^3 + y^2(2^2 \cdot 3 \cdot 31) + y(3 \cdot 2^4(31^2 + 9)) + (2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 109) = 0$

$y^3 + y^2(2^2 \cdot 3 \cdot 31) + y(3 \cdot 2^4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 97) + (2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 109) = 0$

$-109 \cdot 7:$

$-109^3 \cdot 7^3 + 109^2 \cdot 7^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 31 - 109 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2^5 \cdot 5 \cdot 97 + 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 109$

$48 = 16 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

$y' = 3y^2 + 2^3 \cdot 3 \cdot 31y + 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 97. \quad D = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 31^2 - 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 97 =$

$= 2^4 \cdot 3^2(31^2 - 2 \cdot 5 \cdot 97) < 0.$

Вычисления на полях:

$194 : 2 = 97$; $31 \cdot 3 = 93$; $961 + 81 = 1042$; $1042 - 279 = 763$; $124 : 4 = 31$; $31 \cdot 9 = 279$; $763 : 7 = 109$; $124 \cdot 124 = 15376$; $31 \cdot 31 = 961$; $961 + 9 = 970$; $2970 : 5$; $186 : 7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

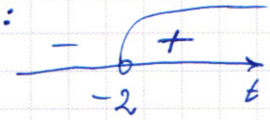
② $\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -3\log_{9x^3} x \quad | : 3$

$\sqrt{\frac{1}{\log_x (3x^2)}} \leq \frac{-\cancel{1}}{\log_x (9x^3)}$

$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3 + 2}} \leq \frac{-1}{2\log_x 3 + 3}$

Заменим $\log_x 3 = t$:



$\sqrt{\frac{1}{t+2}} \leq \frac{-1}{2t+3}$

$\begin{cases} \frac{-1}{2t+3} \geq 0 \\ \frac{1}{t+2} \leq \frac{1}{(2t+3)^2} \\ \frac{1}{t+2} \geq 0 \end{cases}$

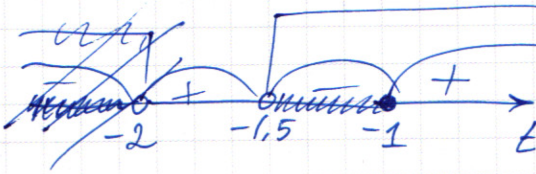
$\begin{cases} t > -1{,}5 \\ t > -2 \\ \frac{(2t+3)^2 - t - 2}{(2t+3)^2(t+2)} \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t > -1{,}5 \\ \frac{4t^2 + 11t + 7}{(t+1{,}5)^2(t+2)} \leq 0 \end{cases}$

$D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot 7 = 9$

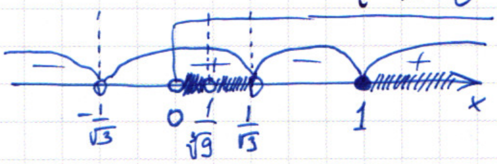
$t = \frac{-11 \pm 3}{8} = \left| \begin{array}{l} -1 \\ -1{,}5 \end{array} \right.$

$\begin{cases} \frac{t+1}{(t+1{,}5)(t+2)} \leq 0 \\ t > -1{,}5 \end{cases}$



ОДЗ: $\begin{cases} \log_{3x^2} x^9 \geq 0 \\ 9x^3 > 0 \\ 9x^3 \neq 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{3x^2} x \geq 0 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ x > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (3x^2 - 1)(x - 1) \geq 0 \\ 3x^2 > 0 \\ 3x^2 \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x\sqrt{3} - 1)(x\sqrt{3} + 1)(x - 1) \geq 0 \\ x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ x > 0 \end{cases}$



$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \vee \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt[3]{9} \wedge \sqrt{3} \quad |\wedge 6$

$9^2 \wedge 3^3$

$81 > 27$

$x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup [1; +\infty).$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times \ 7 \\ \hline 112 \end{array}$

$\begin{array}{r} 121 \\ -\ 112 \\ \hline 9 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

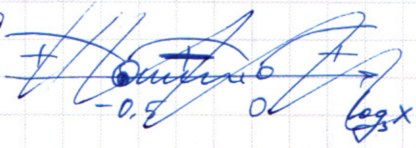
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_x 3 < -2$

$\frac{1}{\log_3 x} < -2$

$\frac{1+2\log_3 x}{\log_3 x} < 0$

$\frac{\log_3 x + 0{,}5}{\log_3 x} \le 0$



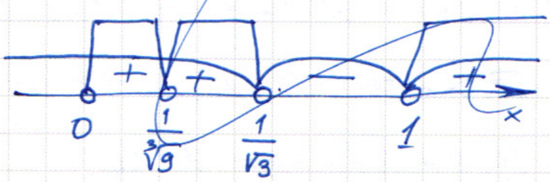
$\frac{\log_3 x - \log_3\left(\frac{1}{\sqrt3}\right)}{\log_3 x - \log_3 1} < 0$ т.к. $3>1$, то знак нерва сохр.

$\frac{x - \frac{1}{\sqrt3}}{x-1} < 0$

$0{,}5 = \log_3\sqrt3 = -\log_3 \frac{1}{\sqrt3}$

$\boxed{\text{Проверить } x=1 \text{ !}}$

$1 = \log_3 3 = -\log_3 \frac13$



$\frac23 = \log_3 3^{\frac23} = -\log_3 3^{-\frac23} = -\log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)$

$\bullet \begin{cases} \log_x 3 > -\frac32 \\ \log_x 3 \le -1 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{\log_3 x} + \frac32 > 0 \\ \frac{1}{\log_3 x} + 1 \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1+\frac32\log_3 x}{\log_3 x} > 0 \\ \frac{1+\log_3 x}{\log_3 x} \le 0 \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \vee \frac13$

$\sqrt[3]{9} \wedge 3$

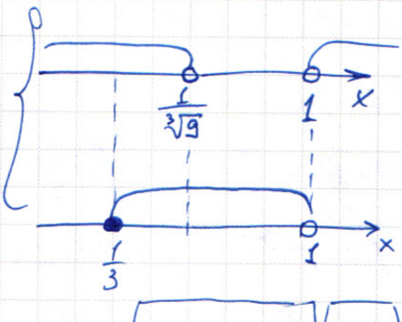
$9 < 27$

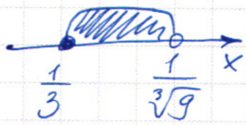
$\begin{cases} \frac{\log_3 x + \frac23}{\log_3 x - 0} > 0 \\ \frac{\log_3 x + 1}{\log_3 x - 0} \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{\log_3 x - \log_3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)}{\log_3 x - \log_3 1} > 0 \\ \frac{\log_3 x - \log_3 \frac13}{\log_3 x - \log_3 1} \le 0 \end{cases}$

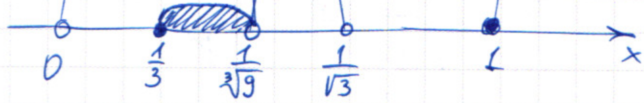
$3>1$, знаки нерав-в сохр.

$\begin{cases} \frac{x - \frac{1}{\sqrt[3]{9}}}{x-1} > 0 \\ \frac{x-\frac13}{x-1} \le 0 \end{cases}$





С учётом ОДЗ:



$\left[\frac13; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) \cup \{1\}$?

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

③ $\overline{abcdefg}$, $a \neq 0$

$\overline{g} + \overline{fg} + \overline{efg} = 12828$ — невозможно, т.к. $\overline{g} + \overline{fg} + \overline{efg} \leq 9 + 99 + 999 < 12828$

$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12828$ >

$$\begin{array}{r} 9999 \\ +\ 999 \\ +\ 99 \\ \hline 11097 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 333 \\ \times\ 9 \\ \hline 2997 \end{array}$$

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12828$ — уже возможно

$\overline{defg} + \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} = 12828$

$\overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + \overline{abcdefg} = 12828$ — уже невозможно, т.к. $\overline{abcdefg} = N$, $N \geq 10^6 > 12828$

$$\begin{array}{r} 12828 \\ -\ 2997 \\ \hline 9831 \end{array} \quad 9831 : 2 = 4615{,}5$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ +\ 99 \\ +\ 9 \\ \hline 1107 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 828 \\ -\ 297 \\ \hline 531 \end{array} \quad 531 : 3 = 177$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times\ 9 \\ \hline 297 \end{array}$$

I: $\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12828$

$\underbrace{100e + 10f + g}_{} + \underline{1000d} + \underbrace{100e + 10f + g}_{} + 10000c + \overline{defg} = 12828$.

$10000c + 2000d + 300e + 30f + 3g = 12828$.

$$\begin{array}{r} 3333 \\ \times\ 9 \\ \hline 29997 \end{array}$$

если $c > 1$, то $\Sigma > 20000 > 12828$. $\Rightarrow c \in \{0; 1\}$

$c = 1$: $2000d + 300e + 30f + 3g = 2828$.

$12828 : 3 = 4276$

если $d > 1$, то $\Sigma > 3000 > 2828$, $\Rightarrow d \in \{0; 1\}$.

$d = 1$: $300e + 30f + 3g = 828$ $e \in \{0; 2\}$

$e = 0$: $30f + 3g = 828$ — нет реш. на цифрах

$e = 1$: $300 + 30f + 3g = 828$

$30f + 3g = 528$ $|:3$

$10f + g = 176$ — нет реш. на 10-ых цифрах

$e = 2$: $600 + 30f + 3g = 828$

$30f + 3g = 228$ $|:3$

$10f + g = 76$

$\overline{fg} = 76$ $(a; b; 1; 1; 2; 7; 6)$ — 90 чис

$d = 0$: $\underbrace{300e + 30f + 3g}_{\vdots 3} = \underbrace{2828}_{\not\vdots 3}$ — невозможно

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$c=0$: $2000d + 300e + 30f + 3g = 12828$ $\quad d \leq 6$

$300e + 30f + 3g \leq 300 \cdot 9 + 30 \cdot 9 + 3 \cdot 9 = 333 \cdot 9 = 2997$

$2000d \geq 12828 - 2997$

$2000d \geq 9831$

$d \geq 4{,}6155$. т.к. d – цифра, то $d \in N$

$d \geq 5$. Итак, $5 \leq d \leq 6$.

$d=6$: $300e + 30f + 3g = 828$

$30f + 3g \leq 33 \cdot 9 = 297$

$300e \geq 828 - 297 = 531$

$e \geq 1{,}77$, $\Rightarrow e \geq 2$

Но при $e=3$ $\Sigma \geq 900 > 828$. $\Rightarrow e=2$:

$e=2$: $30f + 3g = 228$

$10f + g = 76 \Rightarrow f=7,\ g=6$

$(a; b; 0; 6; 2; 7; 6)$ – 90 чисел

$d=5$: $\underbrace{300e + 30f + 3g}_{\vdots 3} = \underbrace{2828}_{\not\vdots 3}$ – невозможно

II: $1000d + 100e + 10f + g + 10^4c + \overline{defg} + 10^5b + 10^4c + \overline{defg} = 12828$, $\Rightarrow b=0$.

$b=0$: $10000c + 2000d + 300e + 30f + 3g = 12828$

$3000d + 300e + 30f + 3g \leq 3333 \cdot 9 = 29997$

$c=0$: $3000d + 300e + 30f + 3g = 12828 \quad | : 3$

$\overline{defg} = 4276$

$(a; 0; 0; 4; 2; 7; 6)$ — 9 чисел

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

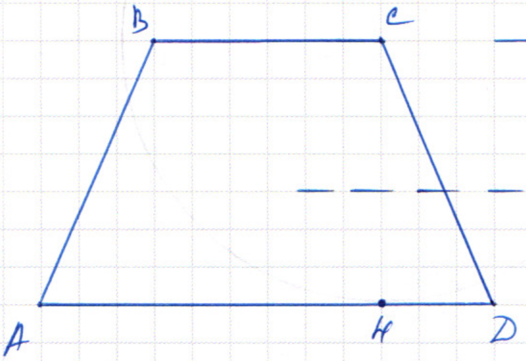
$c=1$: $3000d + 300e + 30f + 3g = 2828$, $\Rightarrow d=0$

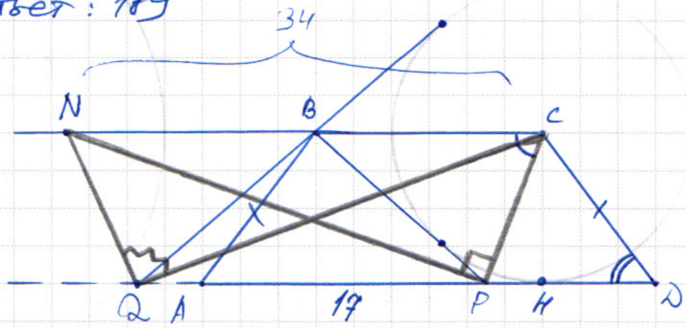
$d=0$: $\underbrace{300e + 30f + 3g}_{\vdots 3} = \underbrace{2828}_{\not\vdots 3}$ невозможно

$90+90+9 = 189$ чисел

Ответ: 189

④





$$\frac{NP}{PC} = \frac{15}{8} = \frac{17}{PC}$$

$$PC = \frac{8\cdot 17}{15}$$

⑤ $\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y$ определено, $\Rightarrow$

$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi q,\ q\in\mathbb{Z} \\ y \neq \frac{\pi}{2} + \pi p,\ p\in\mathbb{Z} \end{cases}$

• $\frac{1}{2}\cos(2x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\sin\frac{\pi}{6}\cos(2x-y) - \cos\frac{\pi}{6}\sin(2x-y) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\sin\left(\frac{\pi}{6} - (2x-y)\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\sin\left(\left(\frac{\pi}{6}+y\right) - 2x\right) = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$.

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\sin 2x = 6\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$.

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cdot(\cos 2x - 6) - \cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) = 0$. (1)

Если $\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) = 0$, то: $y + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right) = 1$, $\Rightarrow$ $\cos 2x - 6 = 0$, что не имеет реш.

Тогда разделим обе части ур-я (1) на $\cos\left(\frac{\pi}{6}+y\right) \neq 0$: $y \neq \frac{\pi}{3} + \pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cdot(\cos 2x - 6) - 1 = 0$.

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+y\right)\cdot(\cos 2x - 6) = 1$ (2)

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• $\sqrt{3}\cos(x-y)=7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)$ $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{3-4}{6}=-\frac{1}{6}$

$\sqrt{3}\cos(x-y)=7\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}-y\right)$

$\sqrt{3}\cos(x-y)=7\sin\left(-\frac{\pi}{6}-y\right)$

$\sqrt{3}\cos(x-y)=-7\sin\left(\frac{\pi}{6}+y\right)$, $\Rightarrow$ $\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{7}\cos(x-y)$

(3)

• $\cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y)=-12\cdot\frac{\sqrt{3}}{7}\cos(x-y)$.

$\cos 2x\cos y+\sin 2x\sin y+\sqrt{3}\sin 2x\cos y-\sqrt{3}\cos 2x\sin y=-12\cdot\frac{\sqrt{3}}{7}\cos x\cos y-12\frac{\sqrt{3}}{7}\sin x\sin y$

$\cos 2x+\sin 2x\,tg y+\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\,tg y+\underbrace{\frac{12\sqrt{3}}{7}\cos x+\frac{12\sqrt{3}}{7}\sin x\,tg y}_{12}=0$

$\cos^2x-\sin^2x+2\sin x\cos x\,tg y+2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2x\,tg y+\sqrt{3}\sin^2x\,tg y+\ldots=0$

$(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)+\ldots=0$

$(1+tg x)(\cos x-\sin x)+2\sin x\,tg y+2\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\cos x\,tg y+\sqrt{3}\sin x\,tg x\,tg y+$
$+\frac{12\sqrt{3}}{7}+\frac{12\sqrt{3}}{7}tg x\,tg y=0.$

$\cos x\cos(x-y)-\sin x\sin(x-y)+\sqrt{3}\sin x\cos(x-y)-\sqrt{3}\cos x\sin(x-y)+\frac{12\sqrt{3}}{7}\cos(x-y)=0$ (4)

Если $\cos(x-y)=0$, то $7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)=0$, откуда $\frac{2\pi}{3}+y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$y=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

тогда $tg\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=tg(\pi k)=0$. ~~tg~~ тогда из (2):

$0(\cos 2x-6)=1$

$0=1$ — ложно; $y\neq-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

Значит $\cos(x-y)\neq 0$, и на него м/о разд. обе части ур-я (4):

$\cos x-\sin x\,tg(x-y)+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}\cos x\,tg(x-y)+\frac{12\sqrt{3}}{7}=0.$

$(\cos x+\sqrt{3}\sin x)-tg(x-y)\cdot(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=0$

• ~~т.к. $\cos(x-y) \neq 0$, то по (3)~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)