МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\cancel{2}\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \cancel{\cos}\sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha \cancel{=\frac{2}{5}} + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2 2\beta - \overset{\sin^2}{\cancel{\cos^2}} 2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cancel{=\frac{2}{5}}$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha} + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1) + \cancel{2}4\sin\beta\cos\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\cdot$$
$$\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta) + 4\sin\beta\cos\beta\cdot$$
$$\cdot(\cos^2\beta - \sin^2\beta)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha\cos^2 2\beta + 4\sin\beta\cos\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$2(\cos^2\beta - \sin^2\beta)(2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \cancel{\cos}\sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha -$$
$$\sin^2\alpha)) = -\frac{2}{5}$$

$$2(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$$

$$2\cos^2\beta = \frac{\sqrt5}{5} + 1$$

$$\cos^2\beta = \frac{5+\sqrt5}{10}$$

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{5+\sqrt5}{10}$$

$$\sin^2\beta = \frac{5-\sqrt5}{10}$$

$$\begin{cases}\cos\beta = \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\\ \sin\beta = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\cos\beta = \sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\\ \sin\beta = -\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}\cos\beta = -\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\\ \sin\beta = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases}\cos\beta = -\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\\ \cancel{\cos}\sin\beta = -\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}\end{cases}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\underbrace{(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}_{=\frac{\sqrt5}{5}} + 2\underbrace{\sin\beta\cos\beta}_{=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}} \text{ или } -\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} + 2\sqrt{\frac{(5^2-5)}{10}}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$\frac{2\sqrt5}{5}\sin\alpha\cos\alpha + \left(2\sqrt2+\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos^2\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt2\right)\sin^2\alpha = 0$ $\Big|$ $:\cos^2\alpha \neq 0$ т.к $tg\alpha$ существует

$\left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt2\right)tg^2\alpha + \frac{2\sqrt5}{5}tg\alpha + 2\sqrt2+\frac{1}{\sqrt5} = 0$

$D = \frac45 - 4\left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt2\right)\left(2\sqrt2+\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac45 - 4\left(\frac15-8\right) =$

$= \frac45 - \frac45 + 4\cdot8 = 32 = (4\sqrt2)^2$

$tg\alpha = \dfrac{-\frac{2\sqrt5}{5}+4\sqrt2}{2\left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt2\right)} = \dfrac{\frac25(10\sqrt2-\sqrt5)}{2\left(\frac{\sqrt5}{5}-2\sqrt2\right)} =$

$= \dfrac{\frac25(10\sqrt2-\sqrt5)}{-\frac25(10\sqrt2-\sqrt5)} = -1$

$tg\alpha = \dfrac{-\frac{2\sqrt5}{5}-4\sqrt2}{-\frac25(10\sqrt2-\sqrt5)} = \dfrac{-\frac25(10\sqrt2+\sqrt5)}{-\frac25(10\sqrt2-\sqrt5)} = \dfrac{10\sqrt2+\sqrt5}{10\sqrt2-\sqrt5}$

2) $2\sin\alpha\cos\alpha\frac{\sqrt5}{5} - 2\sqrt2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$\left(2\sqrt2+\frac{1}{\sqrt5}\right)\sin^2\alpha + \frac{2\sqrt5}{5}\sin\alpha\cos\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt2\right)\cos^2\alpha = 0 \Big| :\cos^2\alpha \neq 0$ т.к $tg\alpha$ – существует

$\left(2\sqrt2+\frac{1}{\sqrt5}\right)tg^2\alpha + \frac{2\sqrt5}{5}tg\alpha + \left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt2\right) = 0$

$D = \frac45 - 4\left(2\sqrt2+\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1}{\sqrt5}-2\sqrt5\right) = 32 = (4\sqrt2)^2$

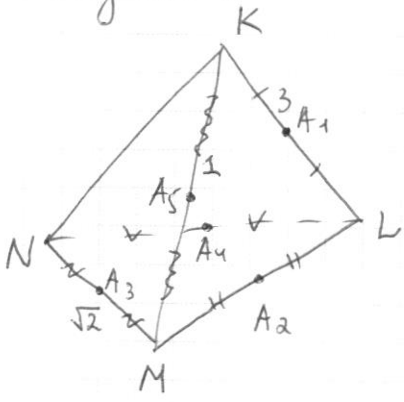
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$tg\alpha = \frac{\frac{2\sqrt5}{5} + 4\sqrt2}{2\left(2\sqrt2 + \frac{\sqrt5}{5}\right)} = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\frac{2\sqrt5}{5} - 4\sqrt2}{2\left(2\sqrt2 + \frac{\sqrt5}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{5}\left(\sqrt5 - 10\sqrt2\right)}{\frac{2}{5}\left(10\sqrt2 + \sqrt5\right)} = \frac{\sqrt5 - 10\sqrt2}{10\sqrt2 + \sqrt5}$$

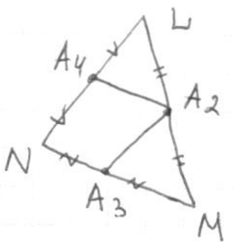
Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 1$; $tg\alpha = \frac{\sqrt5 - 10\sqrt2}{10\sqrt2 + \sqrt5}$; $tg\alpha = \frac{10\sqrt2 + \sqrt5}{10\sqrt2 - \sqrt5}$

Задача 7



A_1 - середина KL, $A_2 - ML$, $A_3 - NM$, $A_4 - NL$
$A_5 - KM$
$A_1, A_2, A_3, A_4, N \in \omega$ - сфера

! ΔNLM



A_2A_4 - средняя линия $\Rightarrow A_2A_4 \parallel NM$

A_2A_3 - средняя линия $\Rightarrow A_2A_3 \parallel LN$

$\Rightarrow A_3A_2A_4N$ - пара-м

$\Downarrow$

$\angle A_4A_2A_3 = \angle A_4NA_3$
$\angle A_2A_4N = \angle NA_3A_2$

$A_2, A_3, A_4, N \in LMN$ и $A_2, A_3, A_4, N \in \omega$, сечение сферы плоскостью - окружность $\Rightarrow A_2, A_3, A_4, N$ - лежат на одной окружности

$A_3A_2A_4N$ - вписанный $\Rightarrow \angle A_4A_2A_3 + \angle A_4NA_3 = 180°$
$\angle A_2A_4N + \angle NA_3A_2 = 180°$

$\Rightarrow$ Все углы $NA_4A_2A_3$ равны $90°$ - это прямоугольник

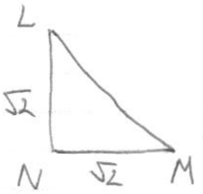
~~___~~ ΔLMN - прямоуг $\angle LMM = 90°$

Середины сторон ΔNLM лежат на окружности 9-ти точек, точно так же, как и основания высот

этого треугольника, аналогично для ΔKLM.
Значит основания высот этих треугольников лежат и на ω.
Сфера может пересекать прямую ML максимум в двух точках, значит или основания высот проведенных из точек K и N в ΔKLM и NLM соотв. либо совпадают (II) либо одна из них совпадает с основанием медианы (но тогда Δ - равнобедр, но $KL \neq KM$, значит ΔNML - равнобедр. $NL = NM$) I

I ΔNML - равнобедр. $NL = MN = \sqrt{2}$

$\angle MNL = 90^\circ$ => по теореме Пифагора $LM = \sqrt{NL^2 + MN^2}$

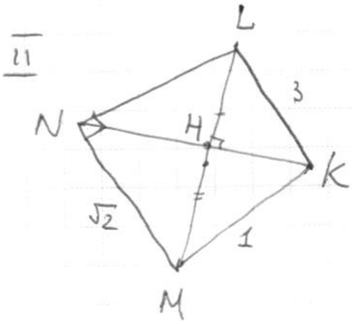


$LM = \sqrt{2+2} = 2$

! ΔKLM $MK = 1$, $KL = 3$, $LM = 2$

$1+2 \leq 3$ - такого треугольника не существует.

II



Пусть основание высоты из точки K в ΔKLM - H $H \in$ отрезку LM, т.к ΔLMN - прямоуг

! ΔNLM и ΔNLH $\angle NLM$ - общ., $\angle LNM = \angle LHN = 90^\circ$

$\Delta NLM \sim \Delta NLH$ => $\frac{LM}{LN} = \frac{LN}{LH}$

! ΔNLM и ΔNHM $\angle NML$ - общ., $\angle LNM = \angle NHM = 90^\circ$ =>
=> $\Delta LNM \sim \Delta NHM$ => $\frac{LM}{NM} = \frac{NM}{MH}$

ΔLMN - прямоуг => по теореме Пифагора $LM^2 = LN^2 + NM^2$

$LN = \sqrt{LM^2 - 2}$

$LH = \frac{LN^2}{LM} = \frac{\sqrt{LM^2-2}}{LM}$; $MH = \frac{NM^2}{LM} = \cancel{\frac{LM^2-2}{LM}} = \frac{2}{LM}$

ΔLKH - прямоуг, по теореме пифагора $LK^2 = LH^2 + HK^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Δ MHK - прямоуг, по теореме Пифагора $MK^2 = HK^2 + MH^2$

$\hookrightarrow 9 = LH^2 + HK^2$

- вычтем

$1 = HK^2 + MH^2$

$8 = LH^2 - MH^2$

$8 = (LH + MH)(LH - MH)$

$8 = LM\,(LH - MH)$

$LM\left(-\frac{2}{LM} + \frac{LM^2 - 2}{LM}\right) = 8$

$\cancel{2 - LM^2 + 2 = 8}$

$\cancel{LM^2 = 4}$

$\cancel{LM}$

$\hookrightarrow LM^2 - 2 - 2 = 8$

$LM^2 = 12$

$LM = 2\sqrt{3}$ Ответ: $LM = 2\sqrt{3}$

R опис. окр. $> 2\sqrt{3}$

$KN >$

Задача 3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2)^{\log_3 3} + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$a = 10x - x^2$

$\cancel{a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}}$

$\cancel{\log_3 3\ 3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}}$

$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$10x - x^2 > 0$

$x(x - 10) < 0$

$x \in (0; 10)$

$|x^2 - 10x| = 10x - x^2$

При $a = 9$

$$9^{\log_3 3} + 9^{\log_3 4} = 9^{\log_3 5}$$

$$3^{\log_3 9} + 4^{\log_3 9} = 5^{\log_3 9}$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Если для $a \geq 9$ $\left(a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4}\right)' < \left(a^{\log_3 5}\right)'$

то для $a > 9$ $a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} < a^{\log_3 5}$

$$\left(a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4}\right)' = 1 + (\log_3 4) a^{\log_3 4 - 1} = 1 + \log_3 4\, a^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\left(a^{\log_3 5}\right)' = \log_3 5 \cdot a^{\log_3 5 - 1} = \log_3 5 \cdot a^{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)}$$

При $a \geq 1$ $a^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)} < a^{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)}$; $\log_3 4 < \log_3 5$

При $a = 9$ $1 + \log_3 4 \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1 + \log_3 4 \cdot \frac{16}{9}$

$$\log_3 5 \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \log_3 5 \cdot \frac{25}{9}$$

$$\log_3 5 \frac{25}{9} - 1 - \log_3 4 \cdot \frac{16}{9} = \log_3 5 \left(\frac{16}{9} + 1\right) - 1 - \log_3 4 \cdot \frac{16}{9}$$

$$= \log_3 5 \cdot \frac{16}{9} + \log_3 5 - 1 - \log_3 4 \cdot \frac{16}{9} > 0$$

Тогда и для $a > 9$, это тоже верно

Значит $a > 9$ – не подходит

Если для $a \leq 9$ и $a \geq 1$ $\left(a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4}\right)' < \left(a^{\log_3 5}\right)'$

то $a \in [1; 9]$ подходит

Если $a < 1$ $a > 0$

$$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$$

$$a^{\log_3 3} > a^{\log_3 5}$$

~~Ответ:~~ $a \in (0; 9]$ удовлетворяет

$10x - x^2 \leq 9$ $x^2 - 10x + 9 \geq 0$ $\Rightarrow x \in [1; 9]$

Ответ: $x \in [1; 9]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(1) = f\left(\frac{2}{10}\right) + f(5)$

$f(10) = f(2) + f(5) = f\left(\frac{2}{10}\right) + f(50) = 1$ $\quad 1 = f\left(\frac{2}{10}\right) + 2$

$f(50) = f(10) + f(5) = 1 + 1 = 2$ $\quad f\left(\frac{2}{10}\right) = -1$

$f(1) = -1 + 1 = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f\left(\frac{k}{x}\right) = f(k) - f(x)$

$f\left(\frac{k}{x}\right) < 0$, если $f(k) > f(x)$

11 - нулей

7 - „1"

3 - „2"

1 - „3"

2 - „4"

1 - „5"

(1;0) - 70

(2;0) - 30

(3;0) - 10

(4;0) - 20

(5;0) - 10

100

140

$(2;1) - 21$

$(3;1) - 7$

$(4;1) - 14$

$(5;1) - 7$

28

$$\begin{array}{r} 35 \\ +14 \\ \hline 49 \end{array}$$

$(3;2) - 3$

$(4;2) - 6$

$(5;2) - 3$

12

$(4;3)\ 2$

$(5;3)\ 1$

$(5;4)\ 2$

4

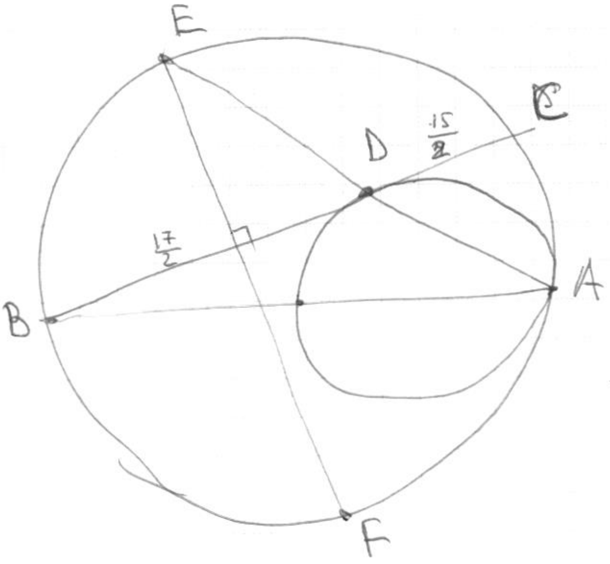
$140 + 49 + 4 + 12$

$189 + 16$

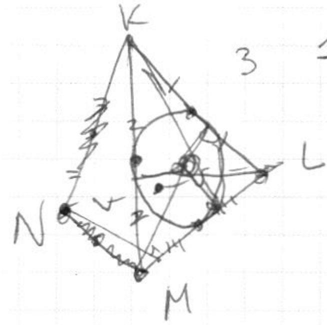
205

Ответ: 205 пар.

Задача 6



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



3 1 $\sqrt{2}$

$LM - ?$

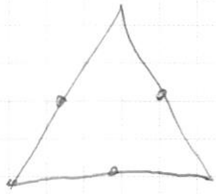
$KL = 3$

$KM = 1$

$NM = \sqrt{2}$

№1 $9 = HK^2+a^2-2HKa\cos\alpha$

$1 = HK^2+a^2+2HKa\cos\alpha$



$15 = KH^2 + a^2$ (m)

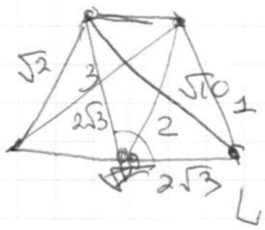
$m^2 = a^2 - 15$

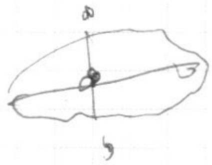
$2a = 4\sqrt{3}$

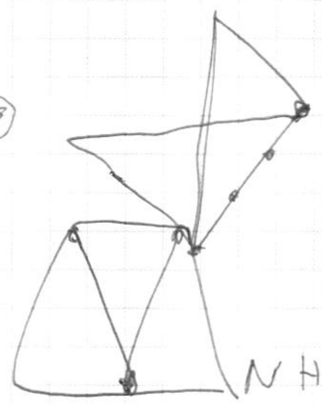
$m^2 = 9 - 15 - 5$

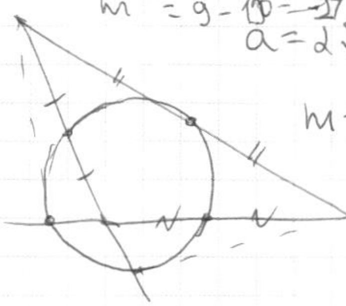
$a = 2\sqrt{3}$

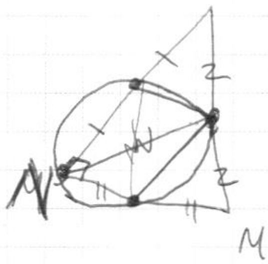
$m = 2$

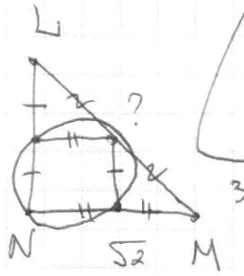






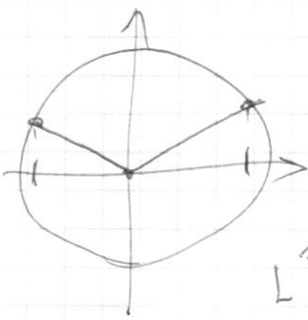


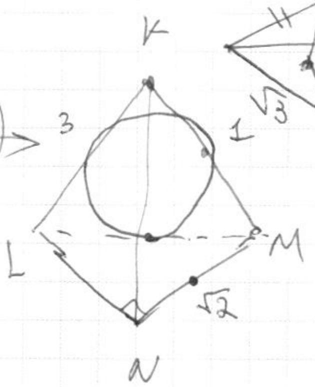


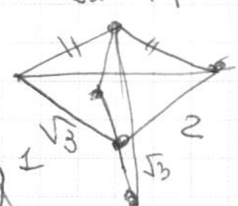


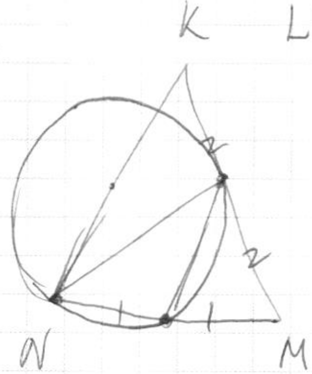
$NH = \dfrac{\sqrt{2(LM^2-2)}}{LM}$

$LH = \sqrt{LM^2-2-\dfrac{2(LM^2-2)}{LM^2}}$





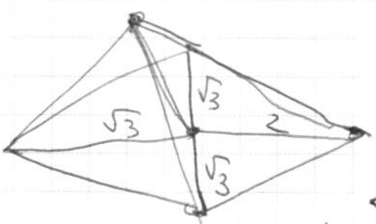


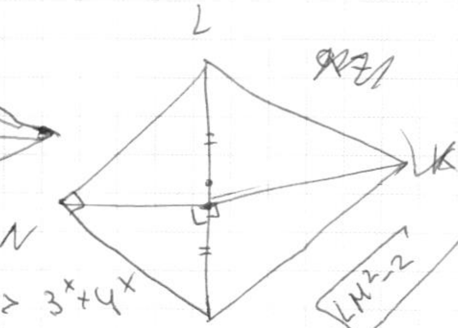


$KH = \sqrt{9-LM^2-2-\dfrac{2(LM^2-2)}{LM^2}}$

$LM^2 = LN^2 + 2$

$1+\log_3 4\, x^{\log_3 4 - 1}$



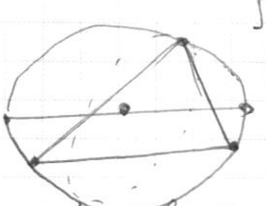


№21

$\dfrac{\sqrt{13}}{2}\log_3 5\, x^{\log_3 5 - 1}$

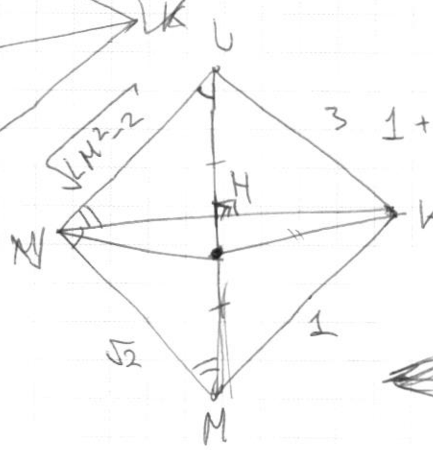
$5^x > 3^x + 4^x$

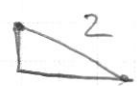
$1+\log_3 4\, x^{\log_3\frac{4}{3}}$



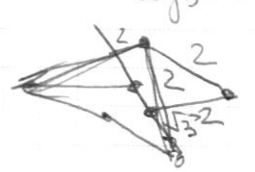
$x^1 + x^{\log_3 4}$

$x^{\log_3}$





$\log_3 5\, x^{\log_3\frac{5}{3}}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 24xy + \cancel{y^2}\, 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 + 144y^2 - 26xy + x + 12y = 6$

$\frac{4 \cdot 5}{25}$

$x^2 + 36y^2 \cancel{\ldots}$

$-12x - 36y = \cancel{4}5$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\alpha\cos\alpha + 2 \cdots (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ - ?

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1)$

$4\sin\alpha\cos\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= 4\sin\alpha\cos\alpha\,(\cos^2\beta - \sin^2\beta)^2 + 4\sin\beta\cos\beta\,(\cos^2\beta + \sin^2\beta)$

$(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 2(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\big(2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta)$

$+ 2\sin\beta\cos\beta\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\big) = -\frac{2}{5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

$\frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

$\frac{10 - 5 - \sqrt{5}}{10}$

$\cos^2\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\beta = \pm\frac{5-\sqrt{5}}{10}$

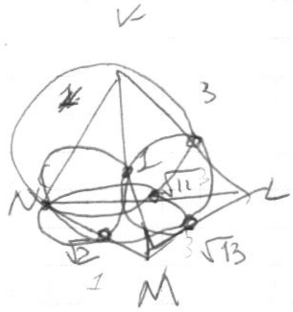
$2\cos^2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} + 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

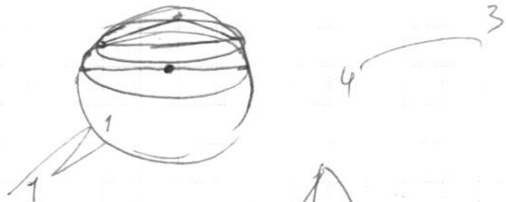
(Нумеровать только чистовики)



10

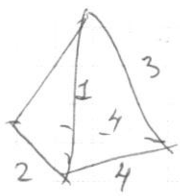
$$\frac{\sqrt{22}+3}{\sqrt{13}}$$

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$



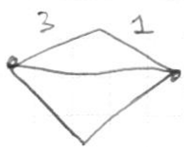
$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

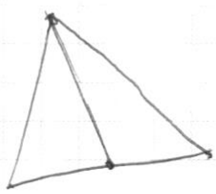
$$V=\frac{a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot e\cdot f}{4R}$$



$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2-(10x-x^2)$$

$$(10x-x^2)^1+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$$





~~9+1~~ 10

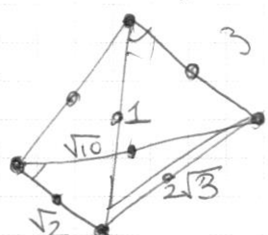
$\sqrt{3}$

$a^2(1-2\cos\ldots) = 9$

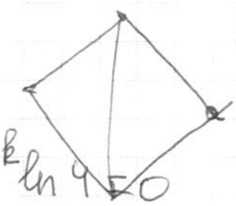
$a^2(\ldots) = 12$

$a^2(\ \ ) = 2$

радиус впис окружн



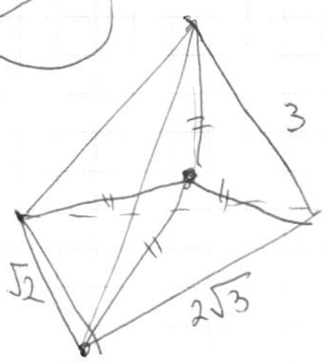
5^k-4^k



$a+a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$5^k\log 5-4^k\ln 4=0$

$5^k\ln 5=4^k\ln 4$



$1^{\log_3 a}+4^{\log_3 a} \geq$

$k>1$

$5^{\log_3 a}$

$k>0$

$$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$$

$$x^2+36y^2-12x+36y-45=0$$

$1+4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$

$1+4^k \geq 5^k$

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

$-1 \leq 4^k-5^k$

$1 \geq 5^k-4^k$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$NH = \frac{\sqrt{2LM^2-2}}{LM} = \sqrt{\frac{2ML^2-2}{LM^2}} = \sqrt{2-\frac{2}{LM^2}}$$

$\frac{3}{\sqrt{13}} +$

$$LH = \sqrt{LM^2-2-2+\frac{2}{LM^2}} = \sqrt{LM^2-4+\frac{2}{LM^2}}$$

$\frac{\sqrt{22}+5}{\sqrt{13}}$

$\frac{\sqrt{2\cdot 11}}{\sqrt{13}}$

$$KH = \sqrt{9-LM^2+4-\frac{2}{LM^2}} = \sqrt{13-LM^2-\frac{2}{LM^2}}$$

$$\sqrt{1-\cancel{9}13+LM^2+\frac{2}{LM^2}} = HM = \sqrt{LM^2+\frac{2}{LM^2}-12} = HM$$

$$\sqrt{LM^2-4+\frac{2}{LM^2}}+\sqrt{LM^2+\frac{2}{LM^2}-12} = LM$$

$$LM^2-4+\frac{2}{LM^2}+LM^2+\frac{2}{LM^2}-12-LM^2+2\ldots = 0$$

$\cancel{2LM^2+2}$

$$-LM^2+\frac{4}{LM^2}+16 = \cancel{4}\left(LM^2-4-\frac{2}{LM^2}\right.$$

$$\left(\frac{LM^2-2}{LM}-\frac{2}{LM}\right)LM = 9$$

$$\frac{\sqrt{2}}{LM} = \frac{HM}{\sqrt{2}} \quad LM\cdot HM = 2 \quad HM = \frac{2}{LM}$$

$$LM = \frac{2}{HM}$$

$$\frac{\sqrt{LM^2-2}}{LM} = \frac{LH}{\sqrt{LM^2-2}}$$

$LM^2-4=9$

$LM^2=13$

$LM=\sqrt{13}$

$$1-\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 \quad \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \frac{LM^2-2}{LM} = LH$$

$HK^2+LH^2=9$

$Hk^2+HM^2=1$

$LH^2+HM^2=10$

$LH^2-HM^2=9$

$$\frac{4}{13} = \frac{9}{13}$$

$$\frac{LM^2-2}{LM}$$

$$(LH-HM)(LH+HM) = 9$$

$$(LH-HM)LM = 9$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(p_1) = \cancel{f(\frac{k}{p})} f(\frac{p_2}{k}) + f$

$\boxed{f(p_1) = f(\frac{p_1}{p_2}) + f(p_2)}$ $\cancel{\#}\ p^2 > p_1$

$5^x \ln 5$

?

$C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12 = 5 \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

5^x

$3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 \geq 5^x \ln 5$ $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$

$\frac{\cancel{25}^2 \; 3^x \ln 3 \cdot \ln 3 + 3^x}{\cancel{2} \;\; 25 \cdot 25 - 25x}$ $3^x + 4^x \quad 5^x$

$f(1) = f($

$25 \cdot 24$

$f(k) = f(\frac{k}{n}) + f(n)$

5^x

$f(1) = f(\frac{1}{p}) + f(p)$

$f(k)$

$f(6) = \overset{=0}{f}(2) + f(3)$ $f(1) = f(\frac{1}{p}) + [\frac{p}{4}]$

$3^x + 4^x \geq 5^x$ $x = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) f$ $27 + 64 < 125$

1

$3^x + 4^x = 5^x$

$5^x \ln 5 = 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$

$f(1) = f(\frac{2}{6}) + f($

$f(10) = f(\frac{2}{10}) + f(50)$ $f(1) = f(\frac{\cancel{2}}{15}) + f($

1 $\quad$ -1 $\quad$ 2

$f(1) = f(\frac{2}{10}) + f(5)$

$5^x \ln$ $\cancel{3^{\log_3 1}}$

$5 \cdot 10$ $f(1) = 0 \quad -1 \quad 1$

$a^{\log_3 b} = b^{\log_3 a}$

$3^{\log_3 b} = b$

$\log \quad (3^x \ln 3 + \quad 5^x \ln 5 - (3^x \ln 3 + 4^x \ln 4) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

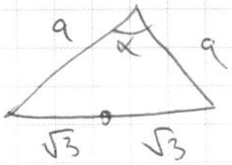
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\quad f(5) = -1$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $\quad f(7) = 1$



$24 = 2a^2(1 - \cos\alpha)$

$\cancel{\frac{25}{8}}$

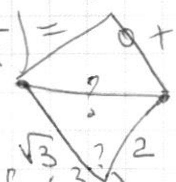
< 0

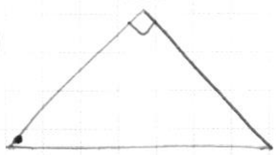
$D = (36 - a)^2 - 4(3 + b) \cdot 32$

$f\left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = \cancel{f}0 + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$f\left(3 \cdot \frac{1}{x}\right) = 0 + f\left(\frac{1}{x}\right)$





$\frac{32}{2}$ $\quad 36^2 + a^2 - 72a - 128\,3 - 128b$

$f\left(\frac{2}{x}\right) = f\left(\frac{3}{x}\right)$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = -1$

$180 - 2\beta = 2\alpha$

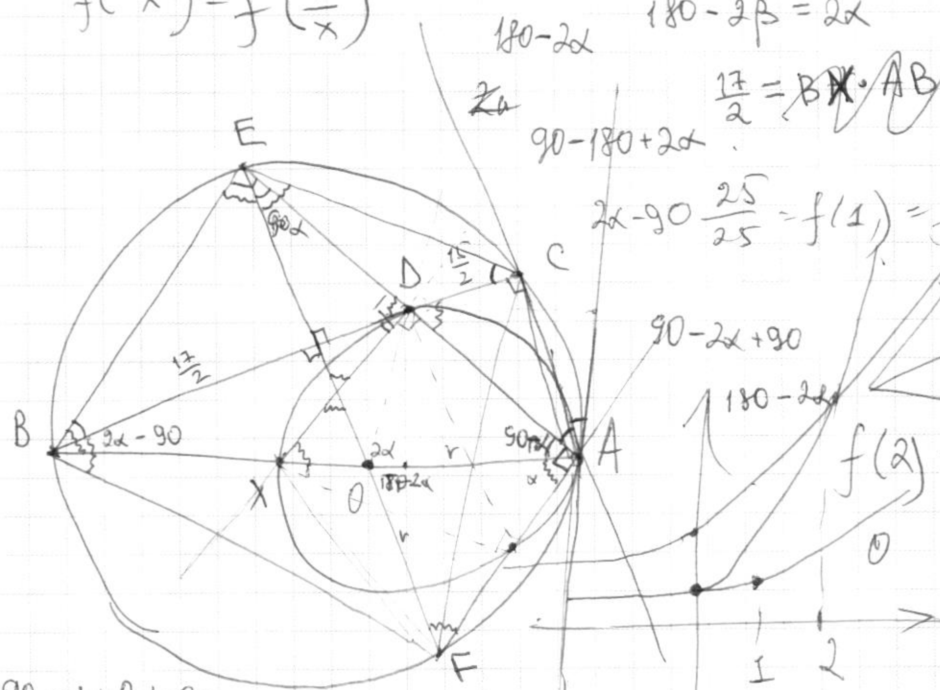
$180 - 2\alpha$

$\cancel{2\alpha}$

$\frac{17}{2} = B\cancel{X} \cdot AB = BO^2 - R^2$ $\quad 128$

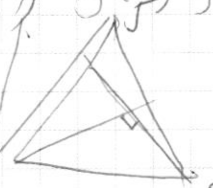
$90 - 180 + 2\alpha$

$2\alpha - 90$ $\quad \frac{25}{25} = f(1) = f\left(\frac{4}{5}\right) \cdot f(5)$



$f(1) = f\left(\frac{1}{5}\right) + 1$

$f(1) = f\left(\frac{1}{4}\right) + 1$



$f(2) = f\left(\frac{2}{5}\right) + f(5)$

$0 = -1 \quad 1$

$90 - \alpha + 2\alpha - 90 = \alpha$

$D = (36 - a)$

$\frac{16a - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

$32x^2 - (36 - a)x + 3 + b \leq 0$ $\quad ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

$0 \leq -32x^2 + (36 - a)x - 3 - b$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)