

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52.

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=95 \end{cases}$$

Заменим:

$$x-6=a$$

$$2y-1=b$$

Тогда

$$\begin{cases} \sqrt{ab} = a-6b & (1) \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

Поэтому (1) перепишем в виде:

$$(\sqrt{a}-3\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})=0$$

Рассмотрим:

$$a=\pm 4b$$

$$a=\pm 9b$$

$$\text{учитывая } \begin{cases} ab \geq 0 \\ a-6b \geq 0 \end{cases}$$

$$1) a=9b \quad (\text{из } a-6b > 0) : \\ b > 0$$

$$90b^2=90$$

$$\begin{cases} b=1 \\ a=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$$

$$2) a=-9b \quad (\text{из } a-6b > 0) : \\ b < 0$$

$$90b^2=90$$

$$\begin{cases} b=-1 \\ a=9 \end{cases} = \begin{cases} b=-1 \\ a=9 \end{cases} \text{ - неверно, т.к. } ab < 0$$

$$3) a = 4b \quad (\text{и } a - 6b > 0) \\ b < 0$$

$$25b^2 = 90 \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{5} \cdot \sqrt{10} \\ a = -\frac{12}{5} \cdot \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

$$4) a = -4b$$

и $ab < 0 \Rightarrow$ не уг.

Ответ: $(15; 1)$; $(6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{10}}{10})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

55

Для $2 \leq x$ и $x \leq 25$:

$$25 \geq y \geq 2$$

Найти наименьшее $\text{ker.}(x|y)$, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$$f(x) = F\left(y \cdot \frac{x}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x) - f(y)}{y}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0$$

$$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$$

$$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$$

$$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$$

$$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$$

$$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$$

$$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$$

$$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$$

$$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$$

$$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$$

x	f(x)
1	
2	0
3	0
4	
5	1
6	
7	1
8	
9	
10	
11	2
12	
13	3
14	
15	
16	
17	4
18	
19	4
20	
21	
22	
23	5
24	
25	

$$f(1) = 0 \quad (f(2) = 0, \quad f(2) = f(2) + f(1))$$

Заполним все составные числа:

X	f(x)
1	0
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2

$f(x) = 1$ — 7 значений

$f(x) = 2$ — 3 значения

$f(x) = 3$ — 1 значение

$f(x) = 4$ — 2 значения

$f(x) = 5$ — 1 значение

$f(x) = 0$ — 10 значений

В учете! где 5-20 X т.ч. $f(x) = 0$, подходят
 $\forall x \quad f(x) \geq 0$, их 14 шт. (~~7+3+1+2+1~~)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

где x $f(x)=1$ соответствуют $f(x) > 1$. $4x \geq 7$

- // -

где x $f(x)=2$ $4x \leq 4$.

- // -

$f(x)=3$ $4x \leq 3$.

- // -

$f(x)=4$ $4x \leq 1$

$$11020 \quad 10 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 140 + 49 \\ + 12 + 3 + 2 = 206$$

Ответ: 206.

56.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$$x \in \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$$

$$32x^2 - 36x + 3 = 0 \\ \theta =$$

$$\begin{aligned} \uparrow: & \quad \begin{cases} 3 \rightarrow 0 \\ x > \frac{1}{4} \quad x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{tg } \alpha = ?; \quad \cos \alpha \neq 0.$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta (\cos 2\alpha)$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha - \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha (2 \cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot (2 \sin^2 2\beta - \cos 2\beta) + \sin 2\alpha = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha - \sin 2\beta) = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \eta \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\eta}{\eta^2+1}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\eta^2}{\eta^2+1}$$

(можно считать т.ч. $\operatorname{tg} \alpha$ отрезком)

$$1) \sin 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}} = \text{— первое уравне с этим жакет.}$$

$$= \frac{2\eta}{\eta^2+1} + \frac{2(\eta^2+1)}{1-\eta^2} = -1$$

$$\frac{\eta^2 - 2\eta - 3}{\eta^2 + 1} = 0$$

$$(\eta+1)(\eta-3) = 0$$

$$\eta \in \{-1; 3\}$$

$$2) \sin 2\beta + \frac{-2}{\sqrt{5}} =$$

$$\text{— // —} \quad \frac{2\eta}{\eta^2+1} - 2 \cdot \frac{1-\eta^2}{\eta^2+1} = -1$$

$$\frac{3\eta^2 + 2\eta - 1}{\eta^2 + 1} = 0$$

$$(\eta+1)\left(\eta - \frac{1}{3}\right)$$

$$\eta \in \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow \text{итого } \eta \in \left\{-1; \frac{1}{3}; 3\right\}$$

$$\text{Ответ: } -1; \frac{1}{3}; 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

53.

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$10x - x^2 > 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = 10x - x^2 = a, \quad a > 0$$

$$a + a \log_3 4 \geq 5 \log_3 a$$

$$\log_3 a = b.$$

$$3^b + 4^b \geq 5^b$$

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^b \geq \left(\frac{5}{3}\right)^b$$

(1) Очевидно, что ф-ция $\left(\frac{5}{3}\right)^b$ растёт быстрее, чем $b \geq 1$

(2) Очевидно, таме, что т. $b = 2$ лви. чх т. пересм.
чм $b < 0$

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^b > \left(\frac{5}{3}\right)^b$$

(1) + (2) :

чм $b > 2$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^b > \left(\frac{4}{3}\right)^b + 1$$

(3) или $b=1$:

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^b > \left(\frac{5}{3}\right)^b$$

(1) + (2) + (3):

$$\text{или } b \in [1; 2) \quad \left(\frac{4}{3}\right)^b + 1 > \left(\frac{5}{3}\right)^b$$

На участке $b \in (0; 1)$ не меняется знак
производной $y = \left(\frac{5}{3}\right)^b - \left(\frac{4}{3}\right)^b$

Для этого $b = 0, 1$ ^{пер-во} выполн. \Rightarrow выполн. на

$[0; 1]$.

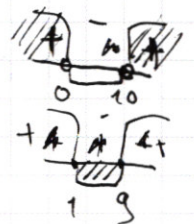
Итого $b \in (-\infty; 2]$ поскольку $b = \log_3 a$
($\log_3 a$ - монотонн. функция)

то $a \in [0; 9]$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10-x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10-x) > 0 \\ (x-1)(x-9) \geq 0 \end{cases}$$



$$D = 100 - 36 = 64$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} \quad | \quad x_2 = 1$$

Итого $x \in (0; 1) \cup [9; 10)$

Ответ: $[0; 1] \cup [9; 10)$

Проверим $b_1 = 1,1$,
тогда $y = 0$

$$\begin{cases} x = \sqrt{-x+6} \\ x^2 - 12x = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+6 = x^2 \\ x > 0 \\ x^2 - 12x = 45 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 12x = 45 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$25b^2 = 90 \Rightarrow b = -\frac{3}{5} \cdot \sqrt{10}$$

$$a = -\frac{12}{5} \cdot \sqrt{10} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1 - 3\sqrt{10}}{2 \cdot 10} \\ x = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

~~АВ < 0~~ ~~х > 0~~

4) $a = -4b$

~~х > 0~~

$ab < 0 \Rightarrow$ неуж.

$$D = 144 - 45 \cdot 4 < 0 \Rightarrow \text{нет х.}$$

Омлет: (15, 1)

$$\left(6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} ; \frac{1 - 3\sqrt{10}}{20} \right)$$

Проверим $b_2 = 1,15$

тогда $y = 1,075$

$$a_2 = 3\sqrt{1,15} = 3\sqrt{\frac{23}{20}}$$

$$x = 6 + 3\sqrt{\frac{23}{20}}$$

(а ~~н~~ $3\sqrt{b}$, чтобы выражение ~~не~~ под корнем

\sqrt{ab} было определено)

$$\Rightarrow \text{Итого: } \left(6 + 3\sqrt{\frac{23}{20}} ; 1,075 \right)$$

$$\text{Омлет: } \left(6 + 3\sqrt{\frac{23}{20}} ; 1,075 \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

52.

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}, \quad \begin{matrix} \text{Замена:} \\ x-6=a \\ 2y-1=b. \end{matrix}$$

тогда с учетом замены:

$$\begin{cases} \sqrt{ab} = a-6b \\ a^2 + 9b^2 - 13,5b = 103,5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\sqrt{a}-3\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})=0 \\ a^2 + 9b^2 - 13,5b = 103,5 \end{cases}$$

Поскольку $\sqrt{a}+2\sqrt{b} > 0$, то

$$\Rightarrow a^2 = 9b^2 + 13,5b + 103,5$$

$$90b^2 - 13,5b - 103,5 = 0$$

$$(b+1)(b+1,15) = 0 \quad 2) a = -9b$$

$$b_1 = -1$$

$$b_2 = -1,15$$

$$\text{и } a-6b > 0$$

$$b < 0$$

$$90b^2 = 90$$

$$3) a = 4b \quad \text{и } a-6b > 0$$

Поскольку первое предп.
перенес. в виде

$$(\sqrt{a}-3\sqrt{b})(\sqrt{a}+2\sqrt{b})=0$$

Рассмотрим случаи:

$$a = \pm 4b, \quad a = \pm 9b,$$

$$\text{и тогда } \begin{cases} ab > 0 \\ a-6b > 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} = 3\sqrt{b}$$

$$1) a = +9b \quad \text{и}$$

$$b > 0$$

$$(a-6b) > 0$$

$$90b^2 = 90$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 9 \end{cases} \text{ - неверно, т.к. } ab < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

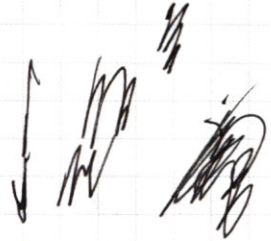
51.

Умнож. д. р:

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

все $\tan \alpha = ?$

$$\frac{x}{y} = \frac{45}{1}$$



$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha - \cos 2\beta + \sin 2\alpha - \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha - \cos 4\beta \end{cases}$$

$\frac{2x-12y}{x-12y} = \frac{\sqrt{2xy-12y-x+6}}{10x+1x-10x} = \frac{2x-12y}{x+5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha (\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta (\cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

3) $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
 $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

~~5x + 8x + 32x + 36x - 3~~

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha (2\cos^2 \beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin \beta \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos(2\alpha - 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin^2 \beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\frac{12}{12+21} = \frac{12}{33}$$

$$10x - x^2 > 0!$$

$$x^2 - 10x < 0.$$

~~scribble~~

~~scribble~~

$$10x + (\cancel{x^2} - x^2 + 10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2)$$

~~scribble~~

$$\begin{array}{r} 36 \\ - 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$$

~~scribble~~

~~scribble~~

~~scribble~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР (заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 11
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 12
(Нумеровать только чистовики)