МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$(x^2+18x)>0$

$x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^{\log_{12}5}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}12} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^{\log_{12}5}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}12} + (x^2+18x)^{\log_{12}5} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} \quad \Big| : (x^2+8x)^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{12}{13}} + (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{13}} \geq 1$

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 1$

~~t x²+18x~~ $t = \log_{12}(x^2+18x)$

$12^t + 5^t \geq 13^t$

$12^t + 5^t$; 13^t монотонно строго возрастают при увеличении t

$\Rightarrow 12^t + 5^t = 13^t$ ~~тол~~ при единственном значении t

$t = 2 \quad (12^2 + 5^2 = 13^2)$

$\Rightarrow \quad 12^t + 5^t \geq 13^t \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow$

(при $t \leq 2 \quad 12^t + 5^t \geq 13^t \quad (12+5>13)$,
при $t \geq 2 \quad 12^t + 5^t \leq 13^t$)

$\Leftrightarrow \log_{12}(x^2+18x) \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+24)(x-6) \leq 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-24;6] \\ x \in (-\infty;-18) \cup (0;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-24;18) \cup (0;6]$ $\quad$ Ответ: $[-24;18) \cup (0;6]$.

① $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$tg\,\alpha - ?\quad \cos\alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

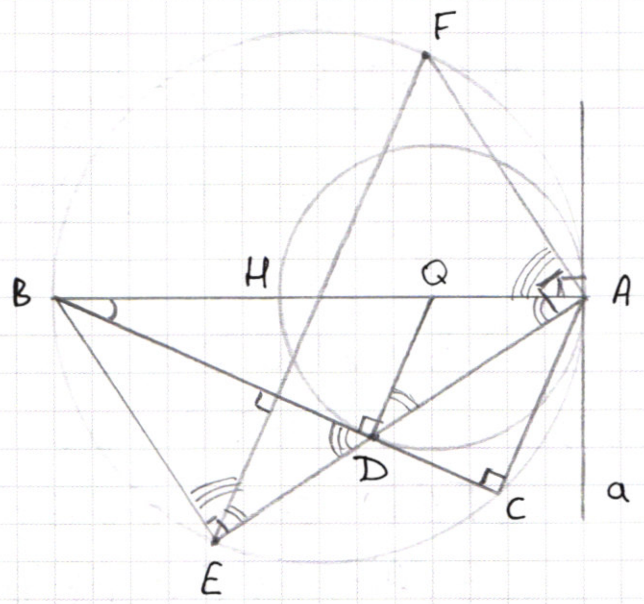
$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=12+9+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(2y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=5xy+2+\frac{1}{2} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ Дано:
$CD = 8$
$BD = 17$

r - ?
R - ?
$\angle AFE$ - ?
S_{AFE} - ?



1) Пусть a - кас. к обеим окр-тям в т. A
$\Rightarrow BA \perp a$ (как диаметр)
$\Rightarrow QA \perp a$ (как радиус), где Q - центр ω
$\Rightarrow Q \in AB$

2) $H = BQ \cap \omega$
$\Rightarrow BH \cdot AB = BD^2$ (по св-ву сек. и касат. к окр-ти)
$BH = AB - AH = 2R - 2r$; $AB = 2R \Rightarrow 2R(2R - 2r) = 17^2$

3) $\triangle BDQ \sim \triangle BCA$ (по признаку подобия по 2 углам)
($\angle BDQ = 90°$ как угол между касательной и радиусом)
($\angle ACB = 90°$ т.к. AB - диаметр)

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BQ}{AB}$

$\dfrac{17}{17+8} = \dfrac{2R - r}{2R}$

$\begin{cases} 4R(R-r) = 17^2 \\ 34R = 50R - 25r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4R^2 - 4Rr - 289 = 0 \\ 16R = 25r \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = \cancel{\tfrac{25}{16}R}\ \frac{16}{25}R \\ 4R^2 - 4R^2\frac{16}{25} - 289 = 0 \end{cases}$$

$$4R^2 \cdot \frac{9}{25} = 289$$

$$R^2 = \frac{289 \cdot 25}{36}$$

$$R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$$

$$r = \frac{\cancel{16}^{8} \cdot 17 \cdot \cancel{5}}{\cancel{25}_{5} \cdot \cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$$

4) $\angle EDB + \angle BDQ + \angle QDA = 180°$ (как смежные)

$\Rightarrow \angle EDB + \angle QDA = 90°$

$\angle FED = 90° - \angle EDB$ (по свойству прямоуг. Δ)

$\angle BEA = \angle BEF + \angle FED = 90°$ (AB – диаметр

$\Rightarrow \angle BEF = \angle EDB$

$\angle FAB = \angle BEF = \angle EDB$

(вписанные углы, ~~опт~~ опир. на дугу BF)

ΔAQD – р/б (т.к. $AQ = DQ = r$)

$\Rightarrow \angle QAD = \angle QDA$ (по св-ву р/б Δ)

$\Rightarrow$ ~~$\angle QA$~~ $\angle EAF = \angle QAD + \angle FAB = \angle EDB + \angle QDA = 90°$

$\angle EAF$ вписанный $\Rightarrow EF = 2R$ диаметр

5) $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2}$ (по т. Пифагора)

$$AD = \sqrt{64 + \left(\frac{85 \cdot 2}{6}\right)^2 - 625} = \sqrt{\frac{28900 - 20196}{36}} =$$

$$= \sqrt{\frac{8704}{36}} = \frac{16\sqrt{17}}{6}\sqrt{2} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$$

6) $BD \cdot CD = AD \cdot DE$ (по св-ву хорд окр-ти)

$$17 \cdot 8 = \frac{16\sqrt{17}}{6}\sqrt{2} \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \cancel{\frac{3\sqrt{2}}{2}}\ \frac{3\sqrt{34}}{2}$$

$$AE = AD + DE = \cancel{\frac{136}{6}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{145}{6}\sqrt{2}}\ \frac{25}{6}\sqrt{34}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $\angle AFE = \arcsin \frac{EA}{EF} = \cancel{\arcsin \frac{145\sqrt{2}\cdot 6}{6\cdot 2\cdot 85}} = \cancel{\frac{145}{170}\sqrt{2}} =$

$\cancel{= \frac{29}{34}} = \arcsin \cancel{\frac{29}{34}\sqrt{2}}\ \frac{25\sqrt{34}\cdot 6}{6\cdot 2\cdot 85} = \arcsin \frac{5\sqrt{34}}{34}$

8) $FA = \sqrt{EF^2 - AE^2} =$ (по т. Пифагора)

$\cancel{= \sqrt{\frac{289\cdot 25}{9} - \frac{145^2}{18}} = \frac{5}{3}\sqrt{289\cdot 2 - 29\cdot 29}}$

$= \sqrt{\frac{4\cdot 289\cdot 25}{36} - \frac{625\cdot 34}{36}} = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{4\cdot 289 - 25\cdot 34}{1}} =$

$= \frac{5}{6}\sqrt{306} = \frac{15}{6}\sqrt{34}$

9) $S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot EA = \frac{1}{2}\cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{6}_{3}}\sqrt{34}\cdot \frac{25}{6}\sqrt{34} = \frac{125\cdot 17}{18} =$

$= \frac{2125}{18}$

Ответ: $r = 9\frac{1}{15}$; $R = 14\frac{1}{6}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$;
$S_{AFE} = \frac{2125}{18}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

(6) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11 \ge 0 & (1) \\ 8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11 \ge 0$

$D = 16b^2+9a^2+144+24ab-96b-72a-16a(3b-11) =$

$= 16b^2+9a^2+144-24ab-96b+104a =$

$= (-4b+3a+12)^2+32a$

(5) $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad 1 \le x, y \le 24$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow f(1) = 0 \qquad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f(1) = 0$

$\Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$

$x = 2^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 5^{k_3} \cdot 7^{k_4} \cdot 11^{k_5} \cdot 13^{k_6} \cdot 17^{k_7} \cdot 19^{k_8} \cdot 23^{k_9}$

$y = 2^{t_1} \cdot 3^{t_2} \cdot 5^{t_3} \cdot 7^{t_4} \cdot 11^{t_5} \cdot 13^{t_6} \cdot 17^{t_7} \cdot 19^{t_8} \cdot 23^{t_9}$

$k_i, t_i \in \mathbb{Z} \qquad k_i, t_i \ge 0$

$f(y) > f(x)$

$\cancel{\underbrace{f(2) + f(2) + \ldots + f(2)}_{k_1} + \underbrace{f(3) + \ldots + f(3)}_{k_2} + \ldots + f(23) + \ldots + f(23)}$

$f(2) \cdot t_1 + f(3) \cdot t_2 + \ldots + f(23) \cdot t_9 >$

$> f(2) \cdot k_1 + f(3) k_2 + \ldots + f(23) \cdot k_9$

$0 \cdot (t_1 - k_1) + 0(t_2 - k_2) + 1(t_3 - k_3) + 1(t_4 - k_4) + 2(t_5 - k_5) +$

$+ 3(t_6 - k_6) + 4(t_7 - k_7) + 4(t_8 - k_8) + 5(t_9 - k_9) > 0$

~~При $k_6 > 0$, $k_7 > 0$, $k_8 > 0$ или $k_9 > 0$~~

$k_6, k_7, k_8, k_9, t_6, t_7, t_8, t_9 \in [0; 1]$; $k_5, t_5 \in [0; \overset{1}{\cancel{2}}]$; $k_4, t_4 \in [0; 3]$

$k_3, t_3 \in [0; 4]$

~~$\Rightarrow f(y) > 0$ при x~~

$\Rightarrow f(y) > f(x)$ при $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24\}$

$y \notin \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24\}$

$\Rightarrow \quad 11 \cdot (24 - 11) = 11 \cdot 13 = 143$ случая

$f(10) = f(5) = f(15) = f(20) = 1$

$f(7) = f(14) = f(21) = 1$

$f(22) = f(11) = 2 \qquad f(13) = 3$

$f(17) = 4 \qquad f(19) = 4$

$f(23) = 5$

Ответ:

$143 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 198$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

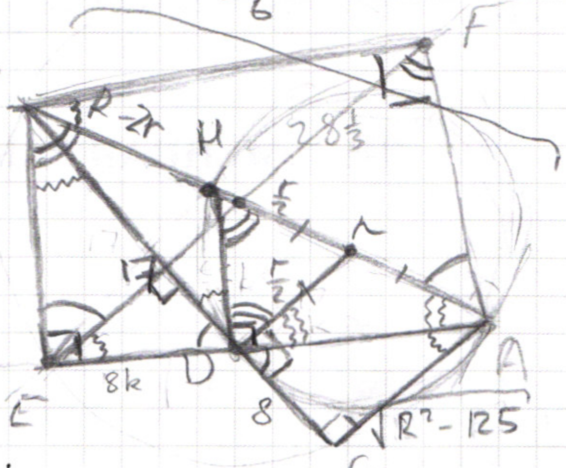
16 17 18 19 20 21 22 23 24

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha + 2\beta)$

$\frac{85}{6}$



$x^a \geq x^b - x^c$

$x > 0$

$\cancel{x^a}(1 - x^{b-a} + x^{c-a}) > 0$

$x^2 \geq x^4 - x^8$

$x^2 + x^8 \geq x^4$

$\frac{289 \cdot 25 - 625 \cdot 36 +}{36}$

$+ 64 \cdot 36$

$289 \times 4 = 1156$

$1156 - 850 = 306$

$34 \times 25 = 170 + 68 = 850$

$BD \cdot CD = AD \cdot DE = 17 \cdot 8$

$\frac{17}{k^2} = \frac{8}{x}$

$8k$

$x = k^2 \frac{64}{17}$

$\frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{9+16}{6} = \frac{25}{6}$

$17^2 = R(R-2r)$

$\frac{R-r}{R} = \frac{17}{25}$

$561 \times 36 = 3366 + 1683 = 20196$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta \cos 2\alpha -$

306	2
153	3
51	3
17	17
1	

$125 \times 17 = 875 + 125 = 2125$

$289 \times 25 = 1445 + 578 = 7225$

$7225 \times 4 = 28900$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \frac{2}{\sqrt{5}} 2\sin\beta\cos\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos^2\beta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin^2\beta + 2\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\beta\cos\beta$

$4 + 4 = 8$

$2 + 2 \neq 3$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

8704	2
4352	2
2176	2
1088	2
544	2
272	2
136	4
34	2
17	17
1	

$x, y \in \mathbb{N}$

$1 \leq x, y \leq 24$

$-f(y) =$

$f\left(\frac{x}{y}\right)^{<0} = f(x) - f(y) < 0$

$625 - 64 = 561$

$561 \times 36 = 3366 + 561 = \ldots 76$

$561 \times 36 = 3366 + 1683 = 20196$

$= a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} a_4^{k_4} a_5^{k_5}$

$\frac{8}{3}\sqrt{34} +$

$28900 - 20196 = 8704$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1 = \log_{12} 12$

$0 = \log_{12} 1$

$$t^{\log_{12} 12} - t^{\log_{12} 13} + t^{\log_{12} 5} \geq 0$$

$$\cancel{t^{\log_{12} 13}}\left(t^{\log_{12} \frac{12}{13}} - 1 + t^{\log_{12} \frac{5}{13}}\right) \geq 0$$

$$\left(t^{\log_{12} \frac{12}{13}} + t^{\log_{12} \frac{5}{13}}\right) \geq 1$$

$$5^t + 12^t \geq 13^t$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17 \qquad x \in \left[-\frac{4}{4}; -\frac{3}{4}\right]$$

$$ax+b \geq \frac{12x+11}{4x+3} \qquad (12+1)^t$$

$$4ax^2 + 4bx + 3b + 3ax - 12x - 11 \geq 0$$

$$4ax^2 + x(4b+3a-12) + 3b - 11 \geq 0$$

$$D = (4b+3a-12)^2 - 16a(3b-11) =$$

$$= 16b^2 + 9a^2 + 144 + \underline{24ab} - 96b - 72a - \underline{48ab} + 176a =$$

$$= 16b^2 + 9a^2 + 144 - 24ab - 96b + 104a$$

$\frac{12}{24}$ $\frac{12}{6}$