# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Приведим подобные. Выд. полн. кв.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases} \Rightarrow a-2b=x-2y.$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad |()^2 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2-ab=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$$

$1^0$ $a=b$

$\Rightarrow b\leq 0.$

$10b^2=25 \Rightarrow b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \wedge a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}.$

$y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

$2^\circ$. $a = 4b$.

$\Rightarrow b \geq 0$.

$25b^2 = 25 \Rightarrow b = 1 \wedge a = 4$.

$\Rightarrow x = 6;\ y = 2$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+8x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$$

I $x^2+8x = t \geq 0$

т.к $x^2+8x > 0 \Rightarrow$ избавимся от модуля

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}t} \leq t.$$

$$t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5} \leq t \ |:t, \text{ т.к } t \geq 0.$$

$$t^{\log_{12}13/12} - t^{\log_{12}5/12} \leq 1.$$

$$\frac{13}{12}^{\log_{12}t} - \frac{5}{12}^{\log_{12}t} \leq 1.$$

I $\log_{12}t = a$.

$$\left(\frac{13}{12}\right)^a - \left(\frac{5}{12}\right)^a \leq 1 \ |\cdot 12^a$$

$$13^a - 5^a \leq 12^a \ |:$$

$$13^a \leq 12^a + 5^a \ |:12^a.$$

$\Rightarrow \left(\frac{13}{12}\right)^a - \left(\frac{5}{12}\right)^a \leq 1$; Заметим, что

$f(x) = \left(\frac{13}{12}\right)^a - \left(\frac{5}{12}\right)^a$ — монотонно убыв. $\Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Возможен подбор.

Заметим, что $a = 2$ - подходит.

$\Rightarrow a \in (-\infty; 2)$.

$\Rightarrow \log_{12} t \le 2$.

$\Rightarrow t \in (0; 144]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 18x > 0 \\ x^2 + 18x - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -18) \\ x \in (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6]. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

№1

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow (1)$$

$$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha + 4\beta) = -\frac{4}{5} \rightarrow (2)$$

Из (2): $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} 2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}. \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \tan 2\beta = \pm\frac{1}{2}$$

$1^0$ $\tan 2\beta = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Big| \cdot \sqrt{5}$.

$2 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = \frac{2 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha}$; $\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}$

$\frac{4 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha} - \frac{1 - tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} = \cancel{0}\, 1$

$\exists\, tg \alpha = t. \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

$\frac{4t}{1 - t^2} - \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 1$.

$4t + 4t^3 \cancel{+} 1 + 2t^2 - \cancel{2t^4} = \cancel{2}1 - t^4$

33 - $4t^3 + 2t^2 + 4t + 2 = 0$

$2t^3 + t^2 + 2t + 1 = 0$.

$: 4x$

$-12x - 11 = 0$. $t^2(2t + 1) + (2t + 1) = 0$.

$\Rightarrow x = -\frac{12}{..} \cdot \frac{11}{4}$ $t = -\frac{1}{2}$; $t = \pm 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$2^0$ $\tan 2\beta = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Big| \cdot \sqrt{5}$.

$-6 + 12 + 36 - 11$ $2 \sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$. Аналогично.

$6 + 1 = 0$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4t}{1-t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = -1.$$

$$4t + 4t^3 + 1 - 2t^2 + t^4 = t^4 - 1$$

$$\Rightarrow 4t + 4t^3 - 2t^2 = 0.$$

$$\Rightarrow \underline{t = 0; -2}$$

Ответ: $0; -2; -\frac{1}{2}$

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\begin{cases} ax+b \ge (12x+11)/(4x+3). \\ ax+b \le -8x^2-30x-17. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{4ax^2+4bx+3ax+3b-12x-11}{4x+3} \ge 0. \quad (1) \\ 8x^2+ax+30x+b+17 \le 0. \quad (2) \end{cases}$$

Т. (1) заметим, что зн-ль $4x+3 \le 0$ $\Rightarrow x \ne -\frac{3}{4}$.

$\Rightarrow$ числитель дроби $\le 0$.

$$4ax^2+4bx+3ax-12x+3b-11 \ge 0$$

Т. $a=0 \Rightarrow 4bx - 12x + 3b - 11 \ge 0$

$4x(b-3)+3b-11\geq 0$

Заметим, что $4x<0$. $x\,v=-\frac{11}{4}$.

~~$\Rightarrow 1^0$. $b<3$:~~

~~$\Rightarrow 3b-11\geq$~~

$-11b+33+3b-11\geq 0$

$-8b+22\geq 0$

$\Rightarrow b\leq\frac{11}{4}$.

4 $x=-\frac{3}{4}$.

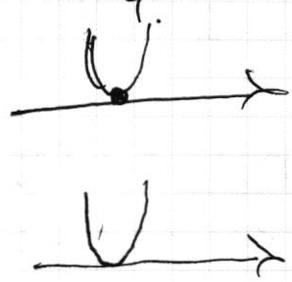
$\Rightarrow -3b+9+3b-11\geq 0$

$-2\geq 0$

$\varnothing$.

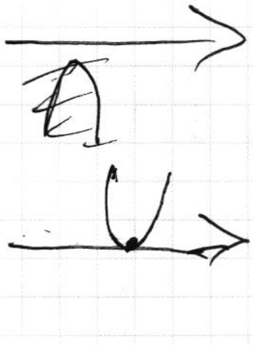
$\Rightarrow$ При $a=0$: $b\leq\frac{11}{4}$.

$2.1^0$. $a\neq 0$.



(1). $\begin{cases} D\geq 0. \\ D\geq 0. \end{cases}$ (2)

$2,2^0$.



$-(1) \Rightarrow \begin{cases} a,b\in R \\ D_a\geq 0. \end{cases}$

$-(2)$

Ответ: из $2.1^0 \Rightarrow a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0.$$

$$\Rightarrow f(x) < f(y).$$

$$f(1\cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0.$$

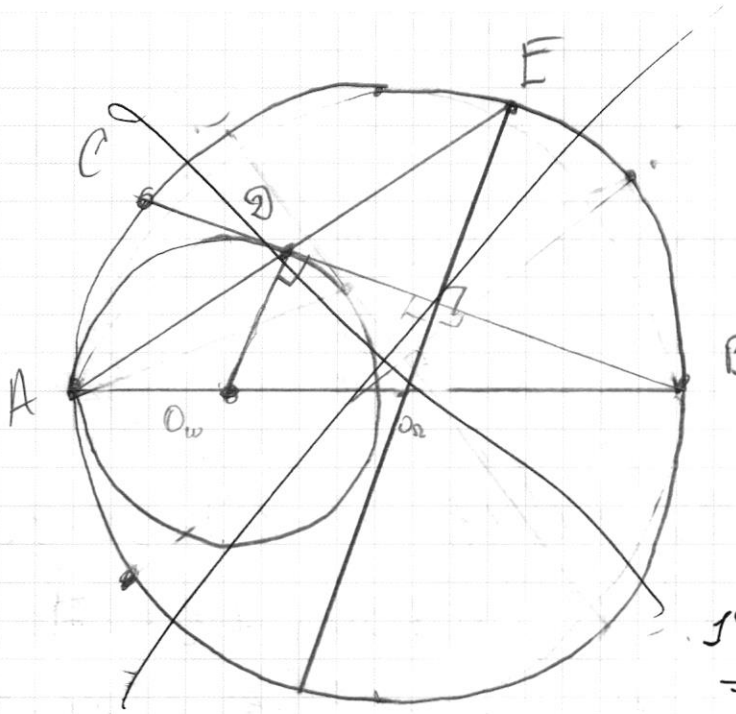
$$f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$$

| X | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 |

| x | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0. |

$$\Rightarrow n = 16\cdot 7 + 2\cdot 5 + 4 + 3 + 2\cdot 1 + 0 = 131$$




$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,2\beta = \frac{1}{2} \\ tg\,2\beta = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$1^\circ$ $tg\,2\beta = \frac{1}{2}.$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{cy}$

$\sin2\alpha + \frac{1}{2}\cos2\alpha = -\frac{1}{2}.$

$\tan\alpha = t$

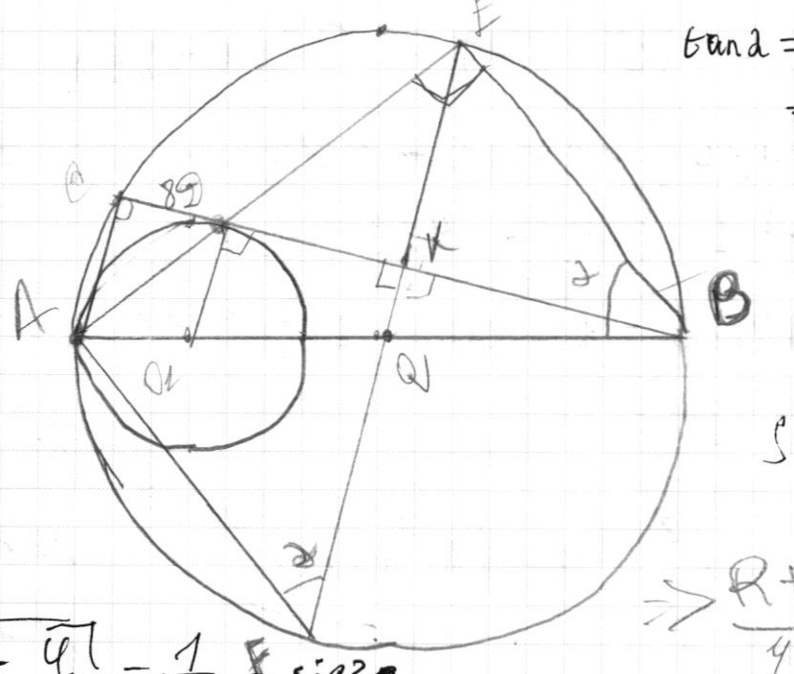
$\Rightarrow \sin2\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$

$\cos2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

подст.

$\tan\alpha = 0; -2; -\frac{1}{2}$

$\sin^2\beta = 1 - \frac{4}{5}.$




$\Rightarrow \frac{R+r}{r} = \frac{17}{8}.$

$\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5} = \sin2\beta$

$\frac{\sin2\beta}{\cos2\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin2\beta = \frac{\cos2\beta}{2}.$

$8R - 9r = 0.$

$R = \frac{9}{8}r \Rightarrow AB = \frac{9}{4}r$

$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1 \,|\, : \cos^2 2\beta$

$tg^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta} - 1$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \,|\, : \cos^2 x.$

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$

$\frac{5}{2} - 1$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a=0 \wedge b \le \frac{11}{3}$.

$\begin{cases} 4ax^2+x(4b+3a-12)+3b-11\le 0 \\ 8x^2+x(a+30)+b+17\le 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} D1\le 0 \\ D2\le 0 \end{cases}$

$D=(4b+3a-12)^2+44a(11-3b)$.

$D2=(a+30)-32(b+17)$.

$D1=16b^2+9a^2+144+24ab-72a-192b+$

$+\cancel{16a(11-3b)}\ +176a-42b=$

$=16b^2+24ab-104a-120b+144+9a^2\le 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\ge (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}t}$

$x^2+18x=t$

$t>0$; $t\in(0;144)$

$5^{\log_{12}t}+t\ge t^{\log_{12}13}$

$x^2+18x>0$

$x^2+18x<144$.

$x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

$5^{\log_{12}t}+t\ge t^{\log_{12}13}$

$$-\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \Rightarrow a^2-4ab-ab+4b^2$$

$$\Rightarrow a(a-4b)-b(a-4b).$$

$\cancel{-13b^2+5ab-25=0}$. $5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5.$

$\cancel{13b^2-5ab+25=0}$

$b^2+ab-5=0$

$b_1+b_2=-a.$

$b_1 \cdot b_2=-5.$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \qquad a \geq 2b.$$

$1^0$ $a=b$

$\Rightarrow 10b^2=25. \Rightarrow b^2=\frac{5}{2} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$2^0$ $a=4b$

$\Rightarrow 25b^2=25$

$\Rightarrow b=\pm 1$

$\Rightarrow a=4; -4.$

$b=1$
$\Rightarrow a=4.$

$\cancel{b=-1}$
$\cancel{a=-4.}$

$a \geq b$.

$b=a. \quad -a \geq 0.$

$b=-\sqrt{\frac{5}{2}}.$

$\Rightarrow a=-\sqrt{\frac{5}{2}}.$

$\cancel{-\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}<0.}$

$\cancel{a=\sqrt{\frac{5}{2}};\ b=\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$\cancel{\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}<0}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$\underline{x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25.$

$a \geq 2b$

$x-2=a.$

$y-1=b.$

$a-2b=x-2y$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$

$(6;2)\ (2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab, \ a\geq 2b \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$

$5b^2-5ab=25$

$5b^2.$

$b^2+ab-5=0$

$\cancel{D=a^2+20}$

$b^2+ab-5=0.$

$b^2+5ab-ab-5=0.$

$b^2+ab-5=0$

$\cancel{b(b-a)+5(ab-1)}=0.$

$D=a^2+20.\geq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4t^3+2t^2+4t-2=0$

$2t^3+t^2+2t-2=0.$

$-1.$

$\cancel{2k-2+1-2}$

$t^2(2t+1)+2(t-1).$

Дальше из

N $-\frac{11}{4}=\frac{11}{4}.$

Чтобы прямая лития прев. крит. точки (П), чтобы выпл. н-о.

$-\frac{3}{4}a+b=1$ $\qquad a=-2.$

$-\frac{11}{4}a+b=$ $\qquad b=-\frac{3}{2}$

Найдём П пл-и прямой.

$a=-2; b=-\frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 5 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0.$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

$f(1 \cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0.$

$f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0.$

$\Rightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

| X | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 |

| X | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 5 | 0 |

$\Rightarrow n = 16 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 4 + 3 + 2 \cdot 1 + 0 = \underline{131}$

$2\sin 2\alpha + \frac{4\cos 2\beta}{\sqrt{5}} = \cancel{\frac{2}{\sqrt5}}, \ -\frac{4}{5}.$

$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta$

$\cancel{2\sin 2\alpha + \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \sin^2\alpha} +$

№2.

$x \geq 2y$

$\Rightarrow y \leq \frac{x}{2}.$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 12 + 4 + 9?$$

$$(x-2)^2 + (3y - 3)^2 = 25.$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - 2y - x + 2.$$

$\exists\ x - 2 = a.$

$y - 1 = b/2. \Rightarrow \ \cancel{x-2} = a$, $2y - 2 = b. \Rightarrow x - 2y = a - 2b.$

$\cancel{y \leq b+1}$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 - 9b^2 = 25. \end{cases}$$

$\Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = ab.$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$tg\alpha = ?$ ; определен; $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$.

$-\ldots \leq 3\ 2$.

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cdot\underset{1-2\sin^2 2\beta}{\cos 4\beta} + \cos 2\alpha\cdot\underset{2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta}{\sin 4\beta} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha - 2\sin^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$= 2/\sqrt{5}$

$2\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta(\sin 2\beta\cdot\sin 2\alpha - \cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{4}{5}$.

$$\begin{cases} 2\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$a^2-9ab+9b^2=0$

$D=9b^2$

$a_{1,2}=5b$

$a=4b$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \cos 2\beta=\mp\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\rightarrow \tan 2\beta=\pm\frac{1}{2}$

$1^0\ \tan 2\beta=\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow y=1-5\sqrt{10}$ $10b^2=25$

$x=2-5\sqrt{10}$ $b=-\frac{5}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta=\frac{1\cos 2\beta}{2\cancel{\cos 2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$a=\frac{-5}{\sqrt{10}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta-\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}\Big|\cdot\sqrt{5}$.

$2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$\exists\ \tan\alpha=t$

$\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow \frac{4t}{1-t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1.$

~~$\frac{4t+4t^3-1}{(1-t^2)(1+t^2)}$~~

$t\neq\pm1.$

$4t+4t^3-1+2t^2\cancel{-t^4}=1\cancel{-t^4}$

черновик ☑ чистовик ☐

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} - \cancel{\ldots} t^{\log_{12} 13} \le 6.$

$t^{\log_{12} 13} - 5^{\ldots} \le t.$

$t^{\log_{12} 13} - \ldots t^{\log_{12} 5} \le t \quad |:t$

$t > 0$

$t^{\log_{12} 13/12} - t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \le 1.$

$\frac{13}{12}^{\log_{12} t} - \frac{5}{12}^{\log_{12} t.} \le 1$

$\exists \log_{12} t = a.$

$\frac{13}{12}^{a} - \frac{5}{12}^{a} \le 1. \quad |\cdot 12^{a}.$

$13^{a} - 5^{a} \le 12^{a}$

$13^{a} \le 12^{a} + 5^{a} \quad |:12^{a}$

$(1) \to \left(\frac{13}{12}\right)^{a} - \left(\frac{5}{12}\right)^{a} \le 1$

(1) - мон. ↘ => 1 р. => Подбор.

=> $a = 2$ - подходит.

=> $a \in (-\infty; 2)$

$\log_{12} t \le 2.$

=> $t \le 144$ ; $> 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x > 0$. $\quad + \; -18 \; - \; 0 \; +$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x = t$ $\quad -18 \quad 0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$ $\quad t(t^{\log_{12}13-1}$ $\quad t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13} - t \;\Big|\; \log_{12}$ $\Rightarrow t$

$\log_{12}5 \cdot \log_{12}t \geq \cancel{\log_{12}13 \cdot \log_{12}t}$.

$\log_{12}5 \cdot \log_{12}t \geq \log_{12}t + \log_{12}\frac{13}{12} \cdot \log_{12}t$

$\log_{12}t\left(\log_{12}5 - 1 - \overbrace{\log_{12}\frac{13}{12}}^{\text{число}}\right) \geq 0$.

$\cancel{\log_{12}5 \cdot 12 \cdot \frac{13}{12}}$ $\quad \log_{12}\frac{5}{12} \Rightarrow \log_{12}\frac{5}{12}\cdot\frac{12}{13} =$

$= \log_{12}\frac{5}{13} < 0$

$\Rightarrow \log_{12}t \leq 0 \Rightarrow x^2+18x \leq 1$.

$\Rightarrow x^2+18x-1 \leq 0$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$D = 324 + 4 = 328 = 2\sqrt{82}$.

$328 \mid 4$, $32$, $8$, $82$.

$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{82}}{2} = -9 \pm \sqrt{82}$.

$82 \mid 2$, $41$.

$\Rightarrow x \in [-9-\sqrt{82}; -18) \cup [0; -9+\sqrt{82}]$

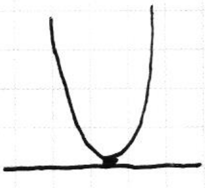
№6.

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$.

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

$$\begin{cases} ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3} \\ ax+b \le -8x^2-30x-17 \end{cases}$$

$\cancel{ax^2}$ $$\begin{cases} \frac{4ax^2+4bx+3ax+3b-12x-11}{4x+3} \cancel{\ge} 0 \quad \le 0 \\ 8x^2+x(a+30)+b+17 \le 0 \end{cases}$$



$4ax^2 + x(4b+3a-12)+3b-11 \le 0$.

1) $a=0$. $\cancel{8x}$

$4bx - 12x + 3b - 11 \le 0 \Rightarrow \cancel{8(4b-12)}$

$\le 0$ $\le 0$

$4x(b-3) - 11 + 3b \le 0$.

$3b - 11 \le 0 \Rightarrow b \le \frac{11}{3}$

$\cancel{4}$ $1^0$: $a=b$

$\Rightarrow \quad 10a^2=25$

$\Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}.$

Заметим, что т.к $a-2b>0 \Rightarrow$

$a=b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \rightarrow$ не имеют решения.

$2^0 \quad a=4b.$

$\Rightarrow \begin{cases} 25b^2=25 \\ 2b>0 \end{cases} \Rightarrow b=1 \wedge a=4.$

Ответ: $(4;1)$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\text{I} \begin{cases} y-1=b \\ x-2=a \end{cases} \Rightarrow -2b+a=x-2y$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad |()^2 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \\ a-2b\geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-4b)-b(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \\ a\geq 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+9b^2=25. \\ a\geq 2b. \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)