



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 8$ ,  $BD = 17$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 24$ ,  $1 \leq y \leq 24$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

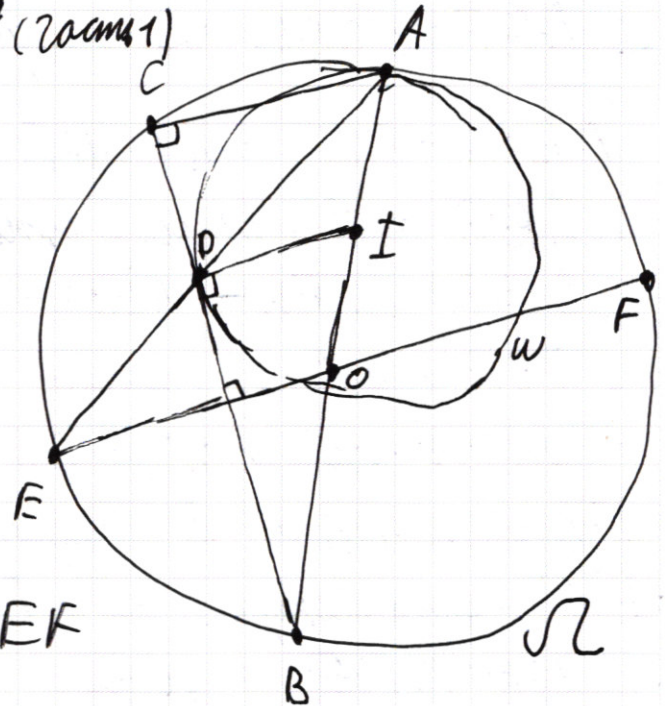
выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $ABCD$ , вершина  $A$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $AD$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BD = 2$ ,  $CD = 3$ . Найдите длину ребра  $BC$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$I$  - центр.  $\omega$   
 $d$  - диаметр  $\Omega$   
 $d = AB$   
 $r$  - радиус  $\omega$   
 $R$  - радиус  $\Omega$   
 $O = AB \cap EF$   
 1)  $ID \perp CB$  н.н.  $ID$  - рад.  $\omega$   
 $CB$  - кас.  $\omega$   
 $\angle BCA = 90^\circ$  (описывается  
на диаметр)



н.н.  $CA \perp BC$   
 $ID \perp BC \Rightarrow AC \parallel ID \parallel EF$   
 $EF \perp BC$

$\triangle BDI \sim \triangle BCA$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BA} \quad \frac{17}{25} = \frac{BA - IA}{BA} = \frac{d - r}{d}$$

$$17d = 25d - 25r \quad 8d = 25r \quad d = \frac{25}{8}r$$

$\triangle BCA$  - прям.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  по т. Пифагора  $BC^2 + CA^2 = AB^2$

~~$(17+8r)^2 +$~~   
 $\triangle BDI: BD^2 + DI^2 = BI^2$

$$17^2 + r^2 = (d - r)^2$$

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{17}{8}r\right)^2$$

$$289 = \frac{289 - 64}{64} r^2$$

$$r^2 = \frac{289 \cdot 64}{225}$$

$$d = \frac{25}{8} \cdot r = \frac{25}{8} \cdot \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{5 \cdot 17}{3} = \frac{85}{3}$$

$$r = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$$

$$R = \frac{d}{2} = \frac{85}{6}$$



# №4 (задача 2)

Пусть  $\angle DAC = \alpha$

$\angle IDA = \angle DAC = \alpha$  (накр. лежащие при  $CA \parallel DI$ )

$\angle EAB = \angle ADI = \alpha$  ( $\triangle DAI$  р/с -  $DI = IA$  рад. r)

$\angle AEF = \angle CAE = \alpha$  (накр. лежащие при  $CA \parallel EF$ )

$\triangle EOA$  - р/с  $\Rightarrow AO = EO$

$\angle AEB = 90^\circ$  (впис., опир. на диаметр.)

$\angle OEB = \angle AEB - \angle AEF = 90^\circ - \alpha$

$\angle ABE = 90^\circ - \alpha$  (сумма углов)

$\Rightarrow \triangle EOB$  - р/с  $\Rightarrow EO = OB$

$EO = OA = OB \Rightarrow O$  - центр  $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$  - диаметр.  $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$  (опир. на диам.)

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

~~$AC = \sqrt{AD^2 - CD^2}$  по м.~~

$AC^2 + CB^2 = AB^2$  по м. Пифаг.

$AC = \sqrt{\left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2} = \frac{40}{3}$

$\text{ctg } \alpha = \frac{AC}{CD} = \frac{40}{3} = \frac{5}{3}$

$\text{tg } \angle AFE = \text{tg}(90^\circ - \alpha) = \text{ctg } \alpha = \frac{5}{3}$

$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \text{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{25}{9} = \frac{34}{9}$

$\sin^2 \alpha = \frac{9}{34}$

$\sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$S_{AFE} = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{EF^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$= \frac{85^2}{9 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{85^2 \cdot 3 \cdot 5}{34 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{12^2 \cdot 5^2 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2125}{12}$

Ответы:

1)  $R = \frac{85}{6}$  радиус  $\Omega$

2)  $r = \frac{136}{15}$  радиус  $\omega$

3)  $\angle AFE = \arctg \frac{5}{3}$

4)  $S_{AFE} = \frac{2125}{12}$

№2 (задача 2)

~~$y = v + 1 = 1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$ , при этом  $x =$~~

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ w = v = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ u = 1 \\ w = 4v = 4 \end{cases}$$

одн.  
замеча  
(=)

$$\begin{cases} x = 2 + w = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1 + v = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = 2 + w = 4 + 2 = 6 \\ y = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

Ответ:  $(6; 2), (2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}})$ .



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2 (задача 1)

ОДЗ:  $x \geq 2y$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x-2) - 2(y-1))^2 = x(y-1) - 2(y-1) \\ (x-2)^2 - 4 + 9(y-1)^2 - 9 - 12 = 0 \\ x-2 \geq 2(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2) - 2(y-1) = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \\ x-2 \geq 2(y-1) \end{cases}$$

делаем замену  
переменных

$$w = x - 2$$

$$v = y - 1$$

$$\begin{cases} (w - 2v)^2 = wv \\ w^2 + 9v^2 = 25 \\ w \geq 2v \end{cases}$$

$$\begin{cases} w^2 - 5wv + 4v^2 = 0 \\ w^2 + 9v^2 = 25 \\ w \geq 2v \end{cases} \rightarrow \text{по т. Виета}$$

$v$  и  $4v$  - корни ~~отсюда~~

$$(w-v)(w-4v) = 0$$

$$\begin{cases} w = v \\ w = 4v \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 + 9v^2 = 25 \\ v \geq 2v \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{где} \\ w=v \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 16v^2 + 9v^2 = 25 \\ 4v \geq 2v \end{cases} \leftarrow \begin{matrix} \text{где} \\ w=4v \end{matrix}$$

$$\begin{cases} v = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}, w = v \\ \cancel{v \leq 0} \Leftrightarrow \\ v = \pm 1 \\ \cancel{v \leq 0}, w = 4v \\ v \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = -\sqrt{\frac{5}{2}}, w = v \\ v = +1, w = 4v \end{cases}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5. (задача 1)

$$f(2) = \left[ \frac{2}{4} \right] = 0$$

$$1) f(2x) = f(2) + f(x) = f(x)$$

$$f(3) = \left[ \frac{3}{4} \right] = 0$$

$$f(x^2) = 2f(x) \quad f(2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$2) f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$3) f\left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) = f(x^2) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\parallel f(x) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

Найдём значения всех  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \in [1; 24]$

$$f(2) = 0 \quad \text{так как } x \text{ простое} \quad \text{отм. } f(x)$$

$$f(3) = 0$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 0$$

$$f(18) = 0$$

$$f(5) = \left[ \frac{5}{4} \right] = 1$$

$$f(6) = f(2) + f(3) = 0$$

$$f(20) = f(5) = 1$$

$$f(7) = \left[ \frac{7}{4} \right] = 1$$

$$f(8) = 3 \cdot f(2) = 0$$

$$f(21) = f(7) = 1$$

$$f(9) = f(3) + f(3) = 0$$

$$f(22) = f(11) = 2$$

$$f(11) = 2$$

$$f(10) = f(5) + f(2) = 1$$

$$f(24) = 0$$

$$f(13) = 3$$

$$f(12) = f(3) + 2f(2) = 0$$

$$f(11) = 0$$

$$f(14) = 1$$

$$f(15) = f(5) + f(3) = 1$$

~~$$f(15) = 1$$~~

$$f(16) = 0$$

$$f(17) = 4$$

$$f(19) = 4$$

$$f(23) = 5$$



№5 (задача 2)

Распределение  $X$  по зн.  $f(x)$  на множестве  $\Omega$ .

$f(x)$	$f(x)=0$	$f(x)=1$	$f(x)=2$	$f(x)=3$	$f(x)=4$	$f(x)=5$
	$m_0 =$	$m_1 =$	$m_2 =$	$m_3 =$	$m_4 =$	$m_5 =$
$X$	$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24\}$	$\{5, 7, 14, 15, 10, 20, 21\}$	$\{11, 22\}$	$\{13\}$	$\{17, 19\}$	$\{23\}$
кол. зн. $\Omega$	11	7	2	1	2	1

Если в паре  $(x; y)$  будет 2 числа из 1 мн. то  $f(x) = f(y)$  не подк.

Если в паре  $x$  и  $y$  из разных множеств, то в зависимости от их порядка  $(x; y) =$  выполняется условие  $f(x) < f(y) \Leftrightarrow f(y) \neq f(x)$

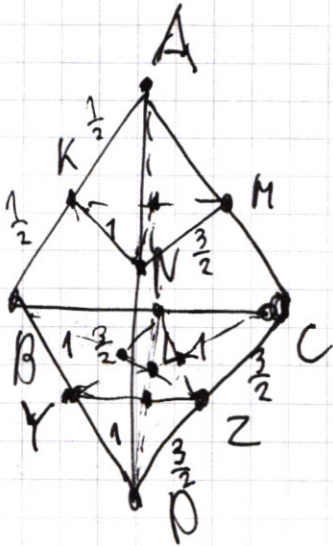
то есть если подсмотрим  $(x; y)$ , не подсмотрим  $(y; x)$  и наоборот.

$$A_{24}^2 - A_{11}^2 - A_7^2 - A_2^2 - A_2^2 = 24 \cdot 23 - 11 \cdot 10 - 7 \cdot 6 - 2 \cdot 2 = 396$$

$\uparrow$  всего пар.     $\uparrow$  2 элем в  $m_0$      $\uparrow$  2 элем в  $m_1$      $\uparrow$  2 элем в  $m_2$      $\uparrow$  2 элем в  $m_4$

$\Rightarrow$  всего подсмотрим  $\frac{396}{2} = 198$  пар.

Ответ: 198 пар.



$$\triangle NKM = \triangle LZY$$

$$t + 5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$\log_5 5^{\log_{12} t} = \log_{12} t$$

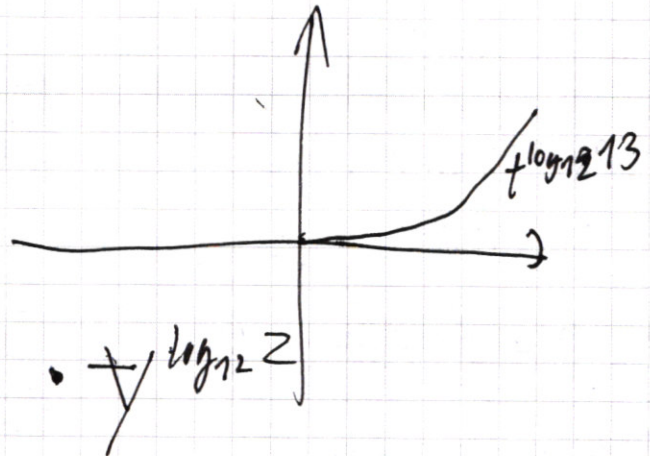
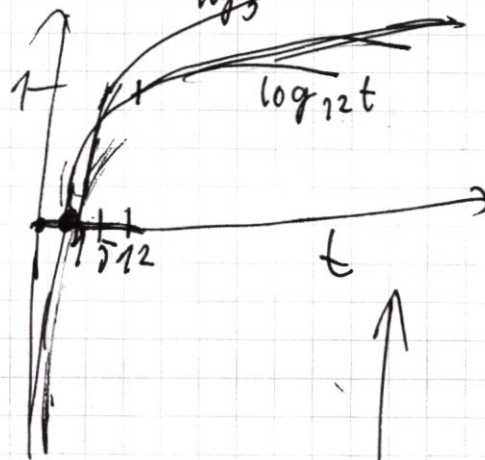
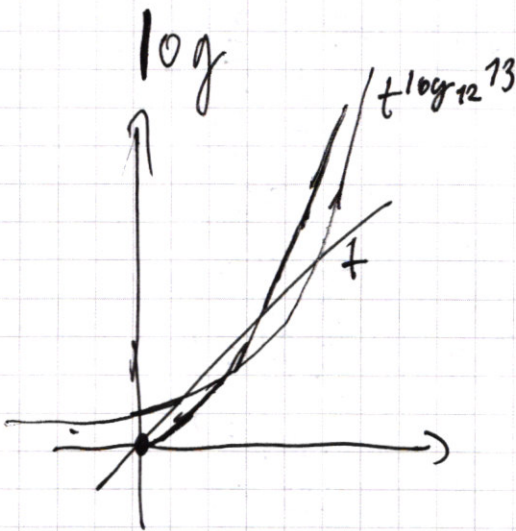
$$5^{\log_{12} t} \geq t (t^{\log_{12} 13} - \log_{12} 12 - 1)$$

$$\log_2 4 - \log_2 2 =$$

$$t (t^{\log_{12} (\frac{13}{12})} - 1)$$

$$\log_{12} t \geq \log_5 t + \log_5 (t^{\log_{12} (\frac{13}{12})} - 1)$$

$$\log_{12} (5^{\log_{12} t}) \geq$$



$$x^{\log_{12} y}$$

$$y^{\log_{12} z}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

м.

$$\sin(2(\alpha + \beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} =$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \cos(2\alpha + 2\beta) +$$

$$+ \sin 2\alpha = \textcircled{1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cdot \sqrt{\frac{4}{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\textcircled{2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta + \sin 2\alpha (1 - \sqrt{\frac{4}{5}}) = -\frac{4}{5}$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(2) = \left[ \frac{2}{4} \right] = 0$$

$$f(p) = \left[ \frac{p}{4} \right]$$

$$(x; y) \quad f\left(\left(\frac{x}{y}\right)\right) < 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f(5) = 1$$

$$f(7) = 1$$

$$f(11) = 2$$

$$f(13) = 3$$

$$f(17) = 4$$

$$f(19) = 4$$

$$f(23) = 5$$

$$f(2) = f(2) + f(1)$$

$$0 = 0 + f(1) \quad f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$f(24) = 0$$

$$f(22) = 2$$

$$f(21) = 1$$

$$f(20) = 1$$

$$f(10) = 1$$

$$f(19) = 4$$

$$f(23) = 5$$

$$f(16) = 0 \quad f(18) = 0$$

$$f(14) = 1$$

$$f(12) = 0 \quad f(15) = 1$$

$$f(8) = 3f(2) = 0$$

$$f(9) = 2f(3) = 0$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) = f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) - f(4) = 0$$

$$f(2x) = f(2) + f(x) = f(x)$$

$$f(3x) = f(x)$$

$$f\left(\frac{1}{x} \cdot x^2\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x^2)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - f(x^2) = f(x) - 2f(x) = -f(x)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$f(x) + (-f(y)) < 0$$

$$f(x) + f(y) < 0$$

$$f(x) < f(y)$$

	0	1	2	3	4	5
$f(1)$	$f(2)$	$f(5)$	$f(11)$	$f(13)$	$f(19)$	$f(23)$
$f(3)$	$f(4)$	$f(7)$	$f(22)$		$f(17)$	
$f(6)$		$f(14)$				
$f(8)$	$f(18)$	$f(15)$				
$f(9)$	$f(16)$	$f(20)$				
$f(24)$	$f(12)$	$f(10)$				
		$f(21)$				
$S_0 = 11$		$S_1 = 7$	$S_2 = 2$	$S_3 = 1$	$S_4 = 2$	$S_5 = 1$

$$100 + 56 + 42 = 198$$

$$S_0 \cdot S_1 + S_2 \cdot (S_1 + S_0) + S_3 \cdot (S_2 + S_1 + S_0) + S_4 \cdot (S_2 + S_1 + S_3 + S_0) + S_5 \cdot (S_1 + S_2 + S_0 + S_3 + S_4) = 11 \cdot 7 + 2 \cdot 18 + 20 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 23 = 77 + 36 + 20 + 42 + 23 = 198$$

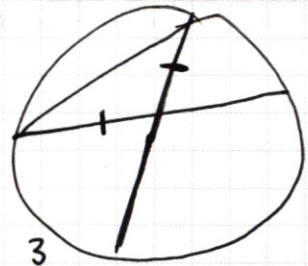




$$\triangle APB \sim \triangle AOB$$

$$\angle EFA =$$

$$\frac{CB}{DB} = \frac{CA}{BA}$$



$$\cos F =$$

$$AC = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 17^2}{9^2} - 25^2} = \frac{40}{3}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 625 \\ \hline 5625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 17 \\ \hline 51 \\ \times 25 \\ \hline 85 \\ \times 85 \\ \hline 1 \quad 425 \\ + 425 \\ \hline 680 \\ \times 725 \\ \hline 5625 \\ \hline 1600 = 40^2 \end{array}$$

$$\cos \alpha =$$

24

$$\sin \angle EFA = \cos$$

$$\operatorname{tg} \angle AFE = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{AC}{CP} = \frac{40}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$C_{24}^2$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3}$$

$$C_{11}^2 \cdot C_2^2 \cdot C_2^2 \cdot C_{2^2}^2$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{8} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{AFE} = EA \cdot AF = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot EF \cdot \cos \alpha \cdot EF = \frac{1 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}{2 \cdot 8} \cdot \frac{25 \cdot 17^2}{9} =$$

$$= \frac{\sqrt{15} \cdot 25 \cdot 17^2}{16 \cdot 9} = \left(\frac{85}{12}\right)^2 \sqrt{15}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 17 \\ \hline 875 \\ + 125 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 17 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\frac{24! \cdot 2}{22! \cdot 2 \cdot 11!}$$

$$\frac{155 \cdot 1}{12 \cdot 2 \cdot 84} \cdot \frac{5^2 \cdot 17^2}{9 \cdot 3}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 0$$

$$\begin{cases} x-2 = \frac{2(y-1)}{2} = y-1 \\ x-2 = 4(y-1) \end{cases}$$

$$x = y+1 \quad y = x-1$$

$$x = 4y - 4 + 2 = 4y - 2$$

$$y \leq 0$$

$$\begin{cases} x-2 = 4(y-1) \\ x-2 = y-1 \end{cases}$$

$$y = \frac{x+2}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$$16 + 9 \cdot (8; 2)$$

$$\begin{cases} y = x-1 \\ y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + 9(x-2)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 36x + 36 = 25$$

$$10x^2 - 40x + 40 = 25$$

$$2x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$D = 16 - 6 = 10$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

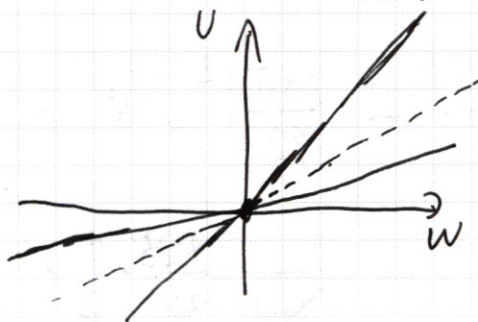
$$w - 2v$$

$$w^2 + 9v^2 = 25$$

$$(w^2 - 4v)(w - v) = 0$$

$$w - 2v \geq 0$$

$$w \geq 2v$$



$$v^2 + 9v^2 = 25$$

$$v^2 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$



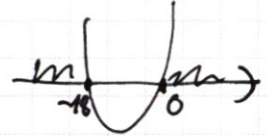
$$5^{\log_{12}}$$

ic

$$x^2 + 18x \geq -5 \log_{12}(x^2 + 18x) + |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$$

$$(x^2 + 18x) > 0$$

$$x(x + 18) > 0$$



$$x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty)$$

$$x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty)$$

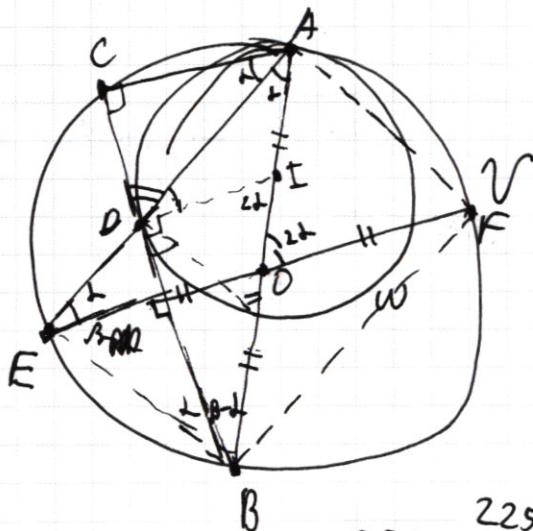
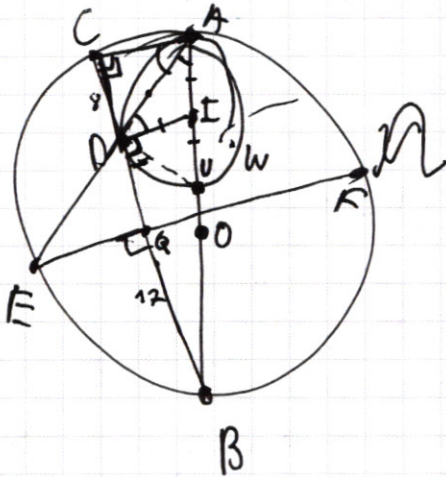
$$\frac{BD}{BI} =$$

$$t = x^2 + 18x > 0$$

$$t \geq \frac{1}{2} t^{\log_{12} 13} - 5 \log_{12} t > 0$$

$$\log_{12} t \geq \log_{12} 1$$

$$t + 5 \log_{12} t \geq t^{\log_{12} 13}$$



$$289 = \frac{225}{64} v^2$$

$$r^2 + 17^2 = (R - r)^2$$

$$r^2 + 17^2 = \frac{17^2}{8^2} r^2$$

$$r^2 = \frac{289 \cdot 64}{225}$$

$$r = \frac{17 \cdot 8}{15}$$

$$R - r = \frac{25 - 8}{8} r = \frac{17}{8} r$$

$$17^2 = \frac{17^2 - 8^2}{8^2} r^2$$

$$R = \frac{25 \cdot 17 \cdot 8}{3 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 17}{3}$$

$$EQ \cdot QF = QC \cdot QB$$

$$ID \cdot CB \Rightarrow ID \parallel EF \parallel CA$$

$$CA \parallel B$$

$$BA \cdot BC = BA^2$$

$$BA^2 = 17^2 = 289$$

$$BO^2 = BU \cdot BA$$

$$\triangle BDI \sim \triangle BCA$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BI}{BA}$$

$$\frac{17}{25} = \frac{BU}{R} = \frac{R - r}{R}$$

$$17R = 25R - 25r$$

$$8R = 25r$$

$$R = \frac{25}{8} r$$

$$r^2 + 17^2 = (R - r)^2$$

$$r^2 + 17^2 = \frac{17^2}{8^2} r^2$$

$$r^2 = \frac{289 \cdot 64}{225}$$

$$r = \frac{17 \cdot 8}{15}$$

$$R - r = \frac{25 - 8}{8} r = \frac{17}{8} r$$

$$17^2 = \frac{17^2 - 8^2}{8^2} r^2$$

$$R = \frac{25 \cdot 17 \cdot 8}{3 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 17}{3}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$x^2$$

$$x \geq 2y$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y + 2 = 0$$

$$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 4 - 9 = -5$$

$$(x-2)^2 + (3(y-1))^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = \frac{25}{9}$$

$$y-1 = \pm \frac{5}{3}$$

$$y = 2 \pm \frac{5}{3}$$



$$(x-2y)^2 = x(y-1) - 2(y-1) = (x-2)(y-1)$$

//

$$(w-2v)^2 = wv$$

$$w^2 - 4wv + 4v^2 = wv$$

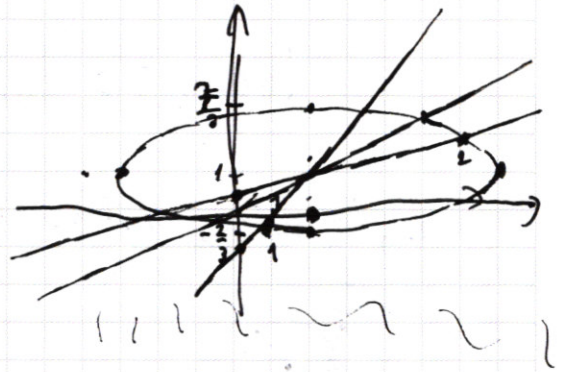
$$w^2 - 5wv + 4v^2 = 0$$

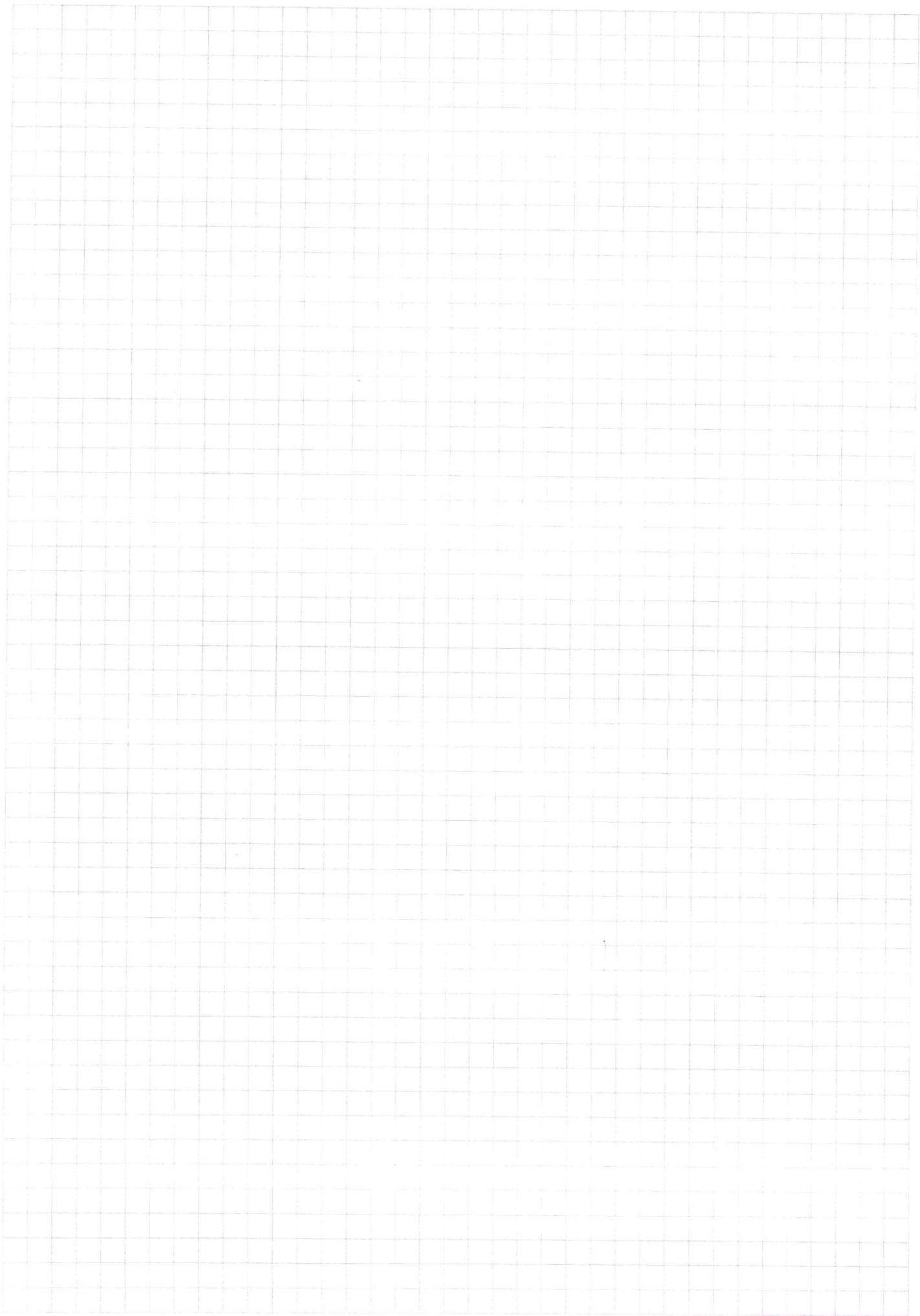
$$w \quad D = 25v^2 - 16v^2 = 9v^2$$

$$w_1 = \frac{5v + \sqrt{9v^2}}{2}$$

$$w_2 = \frac{5v - \sqrt{9v^2}}{2}$$

$$\begin{cases} x-2 = \frac{5(y-1) - 3|y-1|}{2} \\ x-2 = \frac{5(y-1) + 3|y-1|}{2} \end{cases}$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

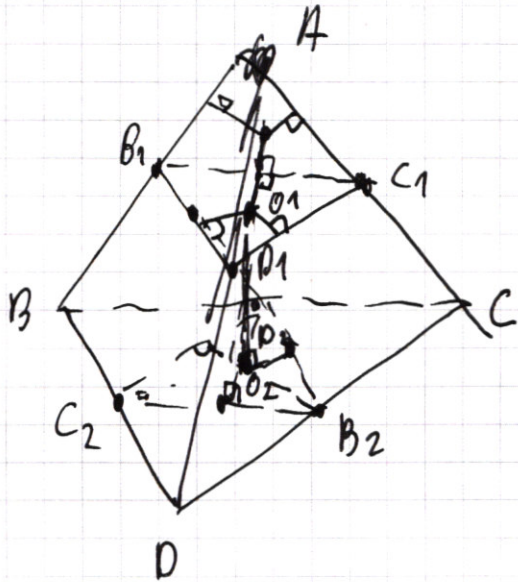
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$O_1 O_2 \perp ABCD$$

$$\angle B_1 C_1 D_1$$

$$x_p = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$$

$$12 \log_{12} t \quad \frac{\sqrt{7} \times 8}{136}$$

$$5 \log_{12} t + t \geq t \log_{12} 13$$

$$\log_2 8^{\log_{16} 2}$$

$$t^t \quad t=1 \quad 5^0 + 1 \geq 1^{\log_{12} 13}$$

$$D = 225 - 136 = 125 - 36 = 89$$

$$2 \geq 1 \quad t=1$$

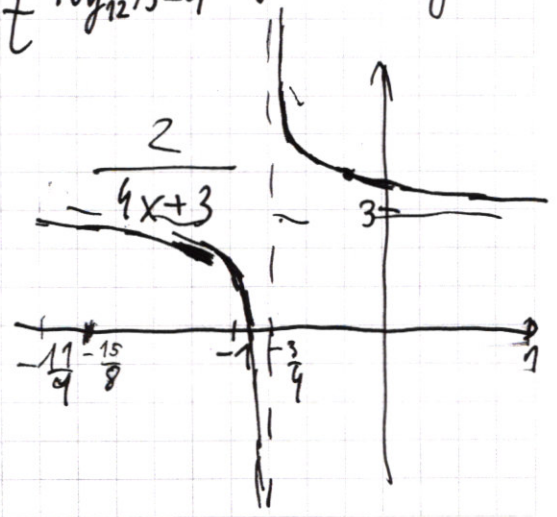
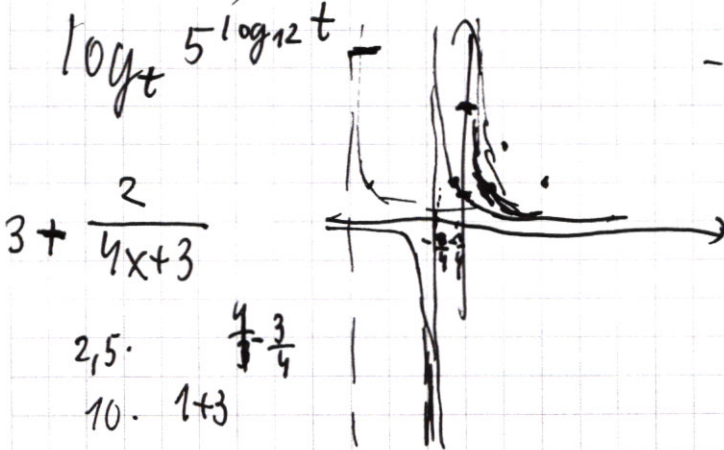
$$x = \frac{-89}{-36}$$

~~$$\log_t 5 \log_{12} t \cdot \log_t t \geq \log_t t \log_{12} 13$$~~

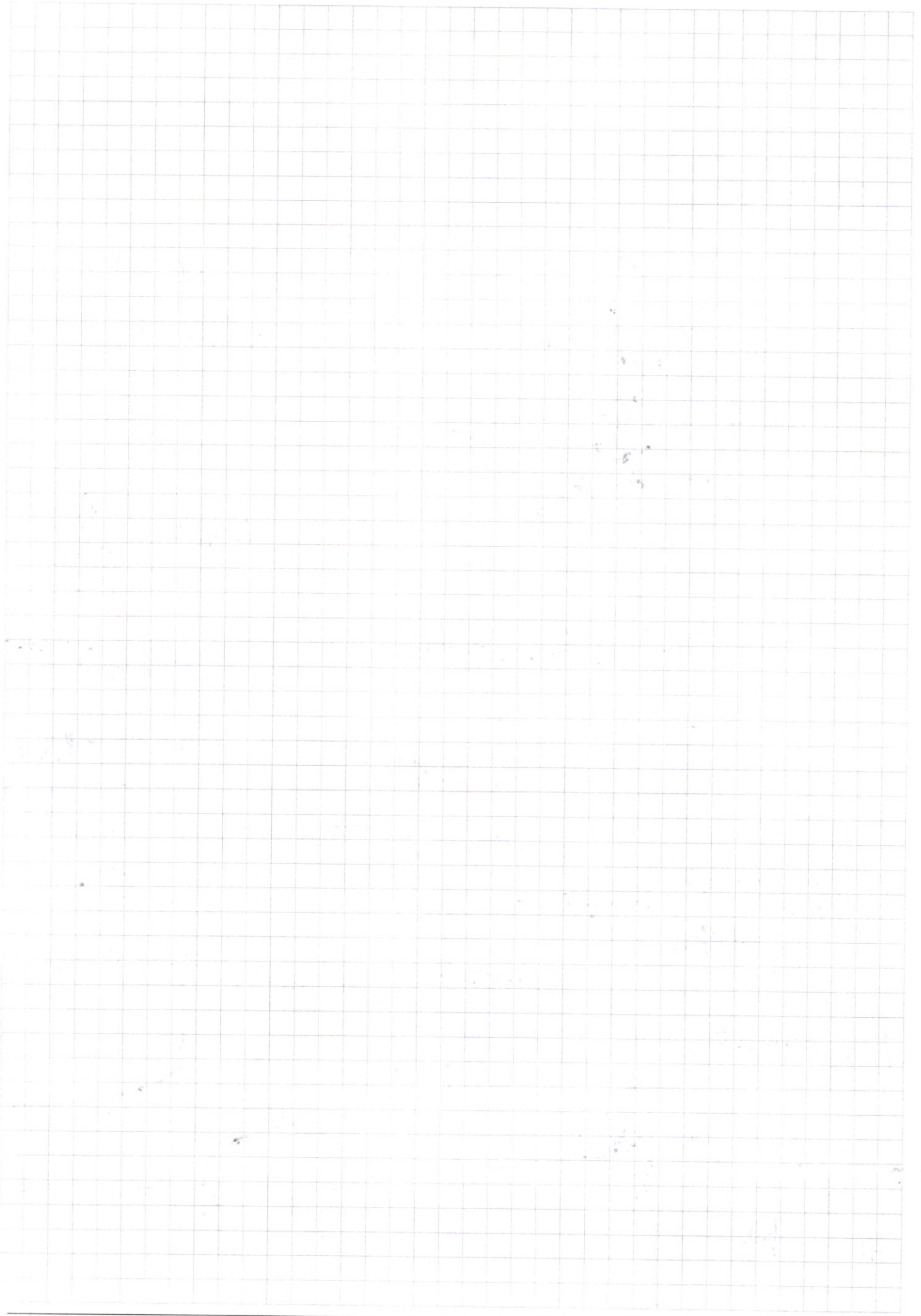
$$5 \log_{12} t \geq t \log_{12} 13 - 1$$

$$\log_2 4 + \log_2 2$$

$-\frac{3}{4}$ -ас.







черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)