МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} & (2) \end{cases}$$

Из (2):

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

Из (1): $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1$$

$$\mp 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \underbrace{1+\sin 2\alpha}_{\geq 0} \quad \Big| \Rightarrow \cos 2\alpha \geq 0 \qquad (3)$$

$$4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = 1+\sin 2\alpha$$

$$16-16\sin^2 2\alpha = 1+2\sin 2\alpha+\sin^2 2\alpha$$

$$17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} \end{array}\right. \quad \Big| \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \sqrt{1-\frac{225}{289}} = \frac{8}{17}$$

Из (3)

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n \\ 1-2\sin^2\alpha = \frac{8}{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ \text{[redacted]} \\ \sin^2\alpha = \frac{9}{34} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ \text{[redacted]} \\ tg\alpha = \pm\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Ответ. $\pm\frac{3}{5}$; -1.

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $t = 26x - x^2$

$$|-t|^{\log_5 12}+t \geqslant 13^{\log_5 t}$$

(т.к. есть запись $\log_5 t \Rightarrow t>0$)

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

~~$\left(f(x)=5^x \uparrow\uparrow \Rightarrow \text{если } x_1 \geq x_2, \text{ то } 5^{x_1} \geq 5^{x_2}\right)$~~

~~$5^{t^{\log_5 12}+t} \geq 5^{13^{\log_5 t}}$~~

~~$\left(a^{m^n}=a^{n^m}\right)$~~

$f(t)=t^{\log_5 12}+t$ $\quad$ ($t^a \uparrow\uparrow$, $t \uparrow\uparrow \Rightarrow f(x)\uparrow\uparrow$)

$g(t)=13^{\log_5 t}$ $\quad$ ($\log_5 t \uparrow\uparrow$, $13^t \uparrow\uparrow \Rightarrow 13^{\log_5 t}\uparrow\uparrow$)

$f'(t) = \log_5 12\, t^{\log_5 12-1}+1 = \log_5 12 \cdot t^{\log_5 \frac{12}{5}}+1$

$g'(t) = \log_5 t \cdot \ln 13$

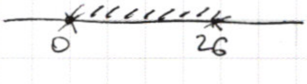
$F(t)=g(t)$ при $t=25$

от 0 до 25 : $g(t)\uparrow\uparrow$ медленнее $F(t) \Rightarrow F(t)\geq g(t)\ \forall t\in(0,25]$

от 25 до $+\infty$: $F(t)\uparrow\uparrow$ медленнее $g(t) \Rightarrow F(t) < g(t)\ \forall t\in(25,+\infty)$

Значит, $t\in(0,25]$:

$$\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ 26x-x^2\leq 25 \end{cases}$$



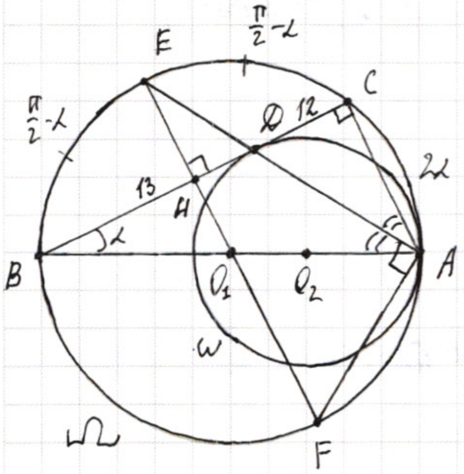
$$\begin{cases} x\in(0,26) \\ x^2-26x+25\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(0,26) \\ (x-25)(x-1)\geq 0 \end{cases}$$

Ответ. $x\in(0,1]\cup[25,26)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 4.

Дано: $\omega \cap \Omega = A$, AB – диаметр Ω, BC – хорда Ω

$D = BC \cap \omega$; $E = AD \cap \Omega$; $FE \perp BC$, $F \in \Omega$,

$CD = 12$, $BD = 13$

Найти: R_ω, R_Ω, $\angle AFE$, $S(\triangle AEF)$

Решение:

1) Пусть $\angle ABC = \alpha$; O_1, O_2 – центры окружностей Ω и ω.

2) По лемме Архимеда: AD – биссектриса $\angle BAC \Rightarrow \smile BE = \smile EC$

AB – диаметр $\Rightarrow \smile BEA = \pi$

$\angle CBA$ – вписанный $\Rightarrow \smile CA = 2\alpha$

$\Rightarrow \smile BE = \smile EC = \frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

3) По св-ву биссектрисы в $\triangle BAC$: $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{12}{13}$

$\angle BCA = \frac{1}{2} \smile BFA = \frac{1}{2}(2\pi - \smile BEA) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$

4) E – середина $\smile BC$, $FE \perp BC \Rightarrow$ по св-ву хорды $\perp$ хорде и проходящей через её середину $O_1 \in FE$

(пусть $H = BC \cap FE$)

$R_\Omega = BO_1 = \frac{BH}{\cos\alpha} = \frac{BC}{2\cos\alpha} = \frac{25}{2\sqrt{1-\frac{144}{169}}} = \frac{25}{2 \cdot \frac{5}{13}} = \frac{65}{2}$

По теореме о квадрате отрезка касательной:

$BD^2 = (2R_\Omega - 2R_\omega) \cdot 2R_\Omega$

$13^2 = (65 - 2R_\omega) \cdot 65$

$65 - 2R_\omega = \frac{13}{5}$

$2R_w = \frac{65\cdot 5 - 13}{5} = \frac{325-13}{5} = \frac{312}{5}$

$R_w = \frac{156}{5}$

5) $\angle AFE = \frac{1}{2} \cup ACE$ (т.к. вписанный)

$\angle AFE = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ $\quad (\angle AFE < \frac{\pi}{2})$

$\sin\angle AFE = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

6) В $\triangle AEF$:

AO_1 – медиана, т.к. $EO_1 = O_1F = R_\Omega$ $\Big| \Rightarrow S(\triangle AEO_1) = S(\triangle AFO_1)$

$\angle AO_1F = \cup AF = (\pi - \cup ACE) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

т.к. центральный

$S(\triangle AEF) = S(\triangle AEO_1) + S(\triangle AFO_1) = 2S(\triangle AFO_1) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot AO_1\cdot O_1F\cdot \sin\angle AO_1F =$

$= R_\Omega^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = R_\Omega^2\cdot\cos\alpha = \frac{65^2}{4}\cdot\frac{5}{13} = \frac{6525}{4} = \frac{2225}{4}$

Ответ. $\frac{65}{2}$; $\frac{156}{5}$; $\arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$; $\frac{2225}{4}$

№5.

$F(ab) = F(a) + F(b)$

$F(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad x \in [4, 28],\ \in \mathbb{Z},\ y \in [4, 28],\ \in \mathbb{Z}$

$F(2) = 0$

$F(2\cdot 1) = F(2) + F(1)$

$0 = F(1) + 0$

$F(1) = 0 \Rightarrow \forall f\left(\frac{x}{y}\right)$: $F\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{x}{y}\right) + F\left(\frac{y}{x}\right)$

$F\left(\frac{x}{y}\right) = -F\left(\frac{y}{x}\right)$

если $x = y$, то $F\left(\frac{x}{y}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

если $x \neq y$, то одно из них < 0.

Значит, кол-во таких $= \underbrace{24\cdot 23}_{\text{кол-во пар}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{из них отриц.}} = 23\cdot 12 = 276$.

Ответ. 276.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\underbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}_{f(x)} \geq ax+b \geq \underbrace{18x^2-51x+28}_{g(x)}$, (a,b)-? , $\forall x \in (\frac{2}{3}, 2]$

$g(\frac{2}{3}) = 18 \cdot \frac{4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28 = 36 - \frac{102}{3} = \frac{6}{3} = 2$

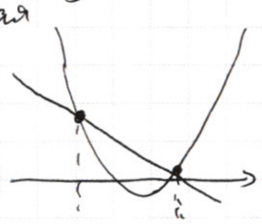
$g(2) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = 72 + 28 - 102 = -2$

$g(x)$ − парабола ветвями вверх $\xRightarrow{\text{в осях } (x,y)}$ вып. $\underbrace{ax+b}_{\text{прямая}} \geq g(x)$ $\forall x \in [\frac{2}{3}, 2] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ax+b \geq g(x)$ для $x = \frac{2}{3}$ и $x = 2$.

Посмотрим на крайнее положение прямой $ax+b$. $(\frac{2}{3}, 2) \in ax+b$

$(2, -2) \in ax+b$



− крайнее положение

$$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Рассмотрим положение прямой $y = -3x+4$ относительно $f(x)$.

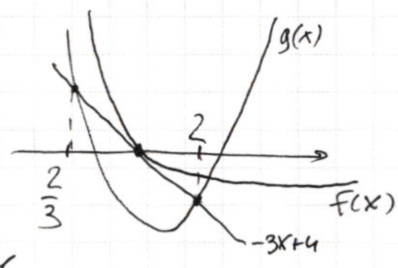
$$\begin{cases} y = -3x+4 \\ y = \frac{8-6x}{3x-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x+4 \\ \frac{8-6x}{3x-2} = -3x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x+4 \\ 9x^2 - 24x + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (3x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x+4 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

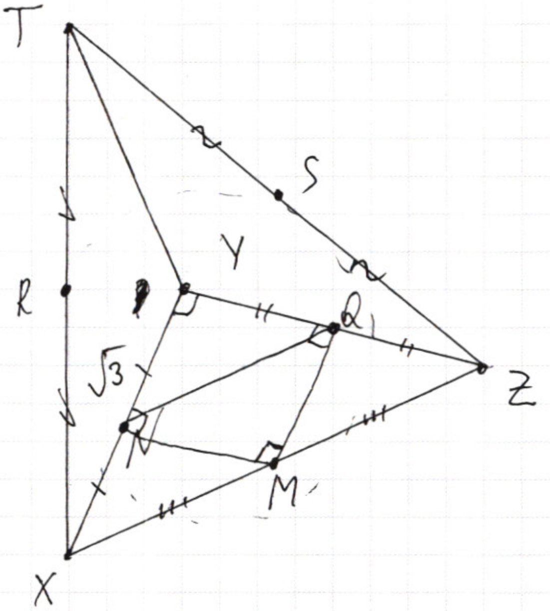
$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = 0 \end{cases}$ − одна точка пересечения $\Rightarrow$ $y = -3x+4$ − кас-ая к $f(x)$.

Значит, мы не сможем получить верное нер-во при других (a, b), кроме $(-3, 4)$, т.к. данно $F(x) \geq ax+b \geq g(x)$ $\forall x \in (\frac{2}{3}, 2]$, а если изменять угол наклона или положение прямой, то либо будут точки выше $F(x)$ или ниже $g(x)$.



Ответ. $(-3, 4)$.

№7.



Дано: $TXYZ$ − пирамида, $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$, Y и середины рёбер кроме TY лежат на одной сфере

Найти: XZ, наименьший $R_{опис.}$

Решение:

1) Пусть M, N, Q, R, S − середины XZ, XY, YZ, TX и TZ соотв.

2) $MNYQ \in$ сфере; лежат в одной плоскости $\Rightarrow$

$\Rightarrow MNYQ$ − вписанный.

Также $MN \parallel YQ$, $MQ \parallel YN$ (ср. линии в $\triangle XYZ$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow MNYQ$ − пар-мм.

Значит, $MNYQ$ − квадрат, NQ − ср. линия $= \frac{1}{2}XZ$ − диагональ квадрата.

3) $XZ = 2NQ$

$YN = \frac{1}{2}XY = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow NQ = YN \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow XZ = \sqrt{6}$

Ответ. $\sqrt{6}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \Leftarrow \cos 2\beta = -\frac{1}{17}\cdot(-\sqrt{17}) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

если „+":

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin 2\alpha = -1 \pm 4\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \qquad 289 - 225$ $\quad \cancel{\in[-1;1]} \quad \cancel{1+\cos^2 = \frac{1}{tg^2}}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1}$

$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} + 4\cos 2\alpha = -1$ $\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = -(1+\cos^2)(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}$

$\cancel{1} - \cos^2 2\alpha = \cancel{1} + 8\cos 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha$

$\sin 2\alpha \pm 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1$

$17\cos^2 2\alpha + 8\cos 2\alpha = 0$

$\pm 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1 - \sin 2\alpha$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}\end{array}\right.$ $\qquad \left[\begin{array}{l}2\alpha = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 1 - 2\sin^2\alpha = -\frac{8}{17}\end{array}\right. \rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4}$

$16 - 16\sin^2 2\alpha = 1 + 2\sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha$

$1 + \sin 2\alpha > 0$

$2\sin^2\alpha = \frac{25}{17}$

$17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha = -\frac{15}{17}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}tg\alpha = \pm\frac{5}{3} \\ tg\alpha = \pm 1\end{array}\right.$ $\qquad \sqrt{2}\sin\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \rightarrow (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$x=1 \Rightarrow t=25$

$t=26x-x^2 \quad \geq 0 \quad x(x-26)<0$

$x\in(0,26)$

$|t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$\cancel{12^t\cdot 5^t \geq t^{13}}$

$\cancel{60^t \geq t^{13}}$

$\underbrace{t^{\log_5 12}+t}_{f(x)} \geq \underbrace{13^{\log_5 t}}_{g(x)}$ $\quad f(x)=t^{\log_5 12}+t \quad \nearrow\nearrow$

$f'(x)=\log_5 12\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}+1$

$g(x)=13^{\log_5 t}$

$g'(x)=\ldots\log_5 t\cdot\ln 13$

~~рав-во при $t=25$.~~

рав-во в т. $t=25$

$60^{25} \vee 25^{13}$

$12^{25}\cdot 5^{25} \vee 25^{25}$

$12^{25} \vee 5$

рав-во при $t=25$.

$(12^2+5^2=13^2)$

$12^t\cdot 5^t \geq t^{13}$

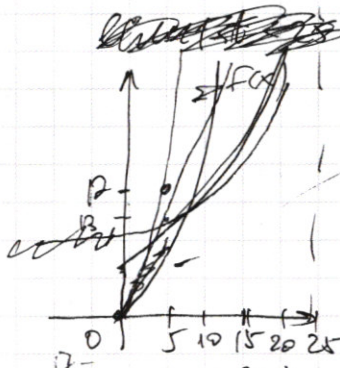
рав-во при

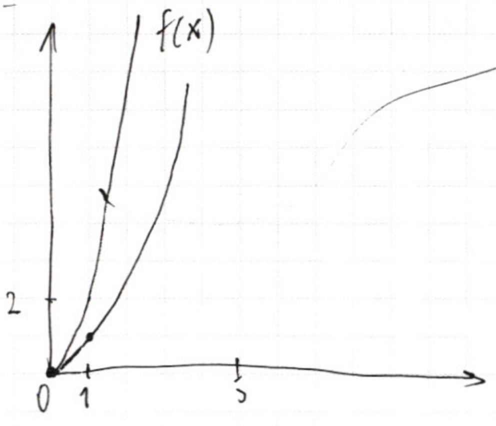
$t=25$

проверим:

$12^{25}\cdot 5^{25} \geq 25^{13}$

$12^{25}=5^{144}$





$t=1.$

$1+1 \geq 1$ — верно

$f(x)>g(x)$

$t=\frac{1}{5} \qquad \frac{1}{25}$

$\frac{1}{12}+\frac{1}{5} \geq \frac{1}{13}$

$t\in(0,25]$

$26x-x^2 \leq 25$

$x^2-26x+25\geq 0$

$(x-25)(x-1)\geq 0$

$x\in(-\infty,1]\cup[25,+\infty)$

$x\in(0,1]\cup[25,26)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$f(x)$ $g(x)$

$f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{(-6x+4)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$

$g(x)$ — парабола с в в т. $\left(\frac{51}{36}, g\left(\frac{51}{36}\right)\right)$

$\frac{51^2}{72}-\frac{51^2}{36}+28=-\frac{51^2}{72}+28=\frac{28\cdot 72-51^2}{72}<0$

$b=-2-2a$

$2=\frac{2}{3}a-2-2a$

$4=-\frac{4}{3}a$

$a=-3$

$b=-2+6=4$

$g(x)=18x^2-51x+28$

$D=51^2-72\cdot 28=\sqrt{585}=$

$=5\cdot 117$

$\frac{51}{36} \vee \frac{4}{3}$

$153 \vee 144$

$x_{1,2}=\frac{51\pm\sqrt{585}}{36}$

$24\leq\sqrt{585}\leq 25$

$-\frac{585}{72}<-6$

$\frac{2}{3} \vee \frac{51-\sqrt{585}}{36}$

$72 \vee 153-3\sqrt{585}$

$3\sqrt{585} \vee 81$

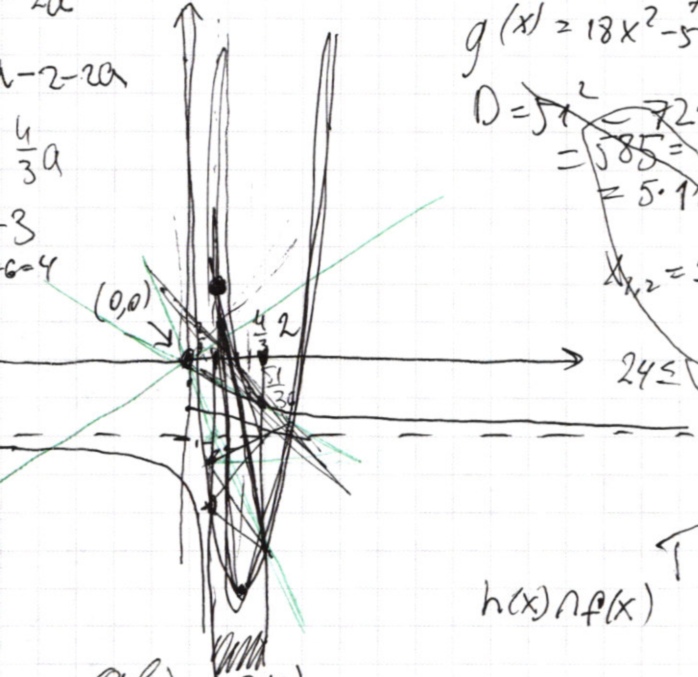
$\sqrt{585} \vee \frac{81}{3}$

$\frac{51+\sqrt{585}}{36} \vee 2$

$51+\sqrt{585} \vee 72$

$\sqrt{585} \vee 21$

24 · 24 = 96; 72 · 28 = 576; 1440 + 576 = 2016; 2601 − 2016 = 585

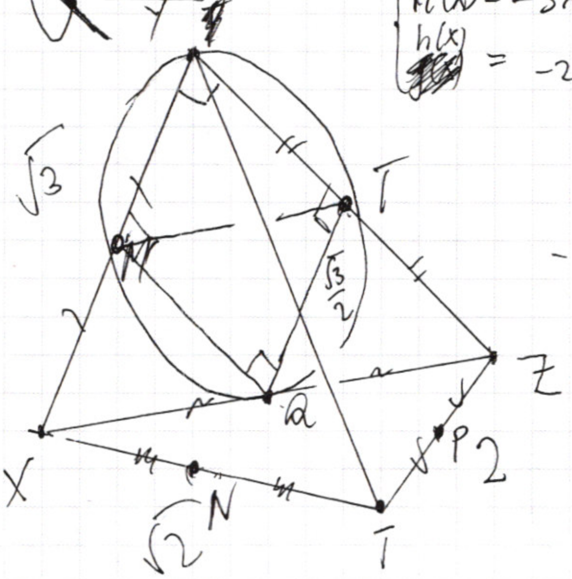


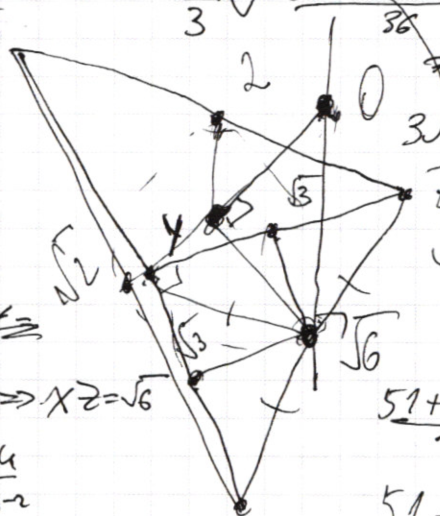
$(a,b)=(-3,4)$

$h(x)=-3x+4$

$h(x)=-2+\frac{4}{3x-2}$

$h(x)\cap f(x)$





$MT=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow XZ=\sqrt{6}$

$-3x+4=-2+\frac{4}{3x-2}$

$-3x+6=\frac{4}{3x-2}$

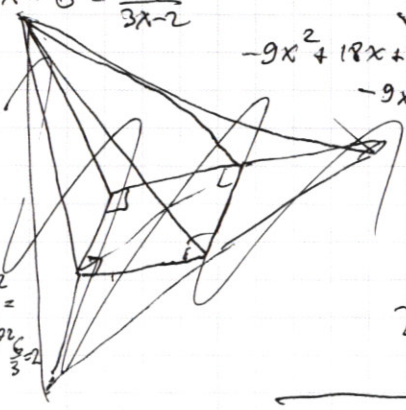
$-9x^2+18x+6x-12=4$

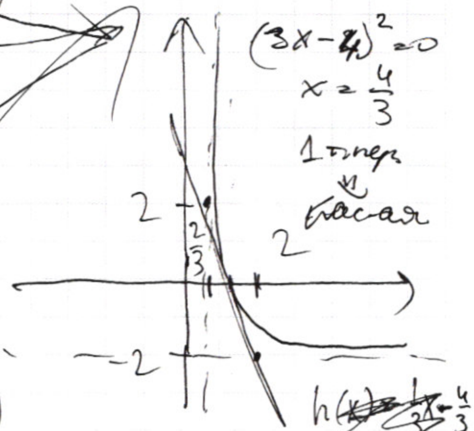
$-9x^2+24x-16=0$

$(3x-4)^2=0$

$x=\frac{4}{3}$

1 пер. ⇓ касая





$g\left(\frac{2}{3}\right)=2\cdot 4-\frac{102}{3}+28=36-\frac{102}{3}=\frac{108-102}{3}=\frac{6}{3}=2$

$g(2)=18\cdot 4-102+28=$

$=72+28-102=-2$

$h(x)=ax+b$, $\left(\frac{2}{3},2\right)\in h(x)$ $(2,-2)\in h(x)$

$\begin{cases} 2=\frac{2}{3}a+b \\ -2=2a+b \end{cases}$

~~$2=\frac{2}{3}a-2a-2$~~

~~$\frac{4}{3}a=-4$ $a=-\frac{1}{3}$~~

~~$b=-2+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$~~

$h(x)=-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

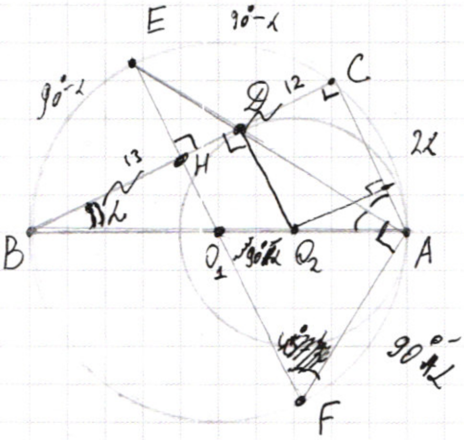
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AC}{AB} = \frac{C\mathcal{D}}{B\mathcal{D}}$

$\sin\angle = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos\angle = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\angle = \arcsin\frac{12}{13}$

$\frac{BH}{O_1B} = \cos\angle \Rightarrow O_1B = \frac{25\cdot13}{2\cdot5} = \frac{65}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\angle}{2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt2}\left(\sin\frac{\angle}{2}+\cos\frac{\angle}{2}\right)$

$\sqrt{\frac{1-\cos\angle}{2}} + \sqrt{\frac{1+\cos\angle}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt2}\left(\sqrt{\frac{4}{13}}+\sqrt{\frac{9}{13}}\right) = \frac{1}{\sqrt2}($

$\underline{O_2A} = \frac{C\mathcal{D}}{\sin(90°-\angle)} = \frac{12}{\cos\angle} = \frac{144+12}{5} = \frac{156}{5}$

$S(\triangle AEF) = 2S(\triangle AO_1F) = 2\cdot\frac12 AO_1\cdot O_1F\cdot\sin\angle AO_1F =$

$= \left(\frac{65}{2}\right)^2\cdot\sin(90°+\angle) = \frac{65^2}{2^2}\cdot\cos\angle = \frac{65^2\cdot5}{4\cdot13} = \frac{65\cdot25}{4}$

$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 25 \\ \hline 325 \\ +\,190\ \ \\ \hline 2225 \end{array}$

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$4 \le x \le 28$ $\qquad f(2)=0$ $\quad f(5) = 1$ $\quad f(17) = 4$

$4 \le y \le 28$ $\qquad f(3)=0$ $\quad f(7) = 1$ $\quad f(19) = 4$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $\qquad f(11) = 2$ $\quad f(23) = 5$

$f(13) = 3$

$f(2) = f(1)+f(2)$

$f(1) = 0.$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = -f\left(\frac{b}{a}\right)$ $\qquad \underbrace{f\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\right)}_{0} = f\left(\frac{a}{b}\right)+f\left(\frac{b}{a}\right)$

$f\left(\frac{5}{7}\cdot7\right)$

$f\left(\frac{5}{7}\right) = f(5)-f(7) < 0$

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14

$[4, 28] \leftrightarrow [4, 28]$

Кол-во пар, где разные (не (a,a)), надвое

$\frac{24\cdot23}{2} = 12\cdot23$

$(a,b)>0 \Rightarrow (b,a)<0$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 12 \\ \hline 46 \\ +\,23\ \ \\ \hline 276 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)