МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

1) $\underline{tg\alpha=0} \Rightarrow \sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \to \cos(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\alpha = 0$

$\sin 4\beta = 2(-\frac{1}{\sqrt5})\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{4}{5}$ - подходит

2) $\cancel{2\alpha+2\beta=\gamma} \Rightarrow$ а) $\overset{2\alpha+2\beta}{\gamma} = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$. Пусть $\sin\gamma = +\frac{1}{\sqrt5}$; $\cos\gamma = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \sin(2\alpha + 2(-\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - 2\alpha)) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sin(2\alpha - 4\alpha - \underbrace{2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}}_{2\gamma}) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\gamma = \pm\frac{4}{5}$; $\cos 2\gamma = \pm\frac{3}{5}$

$-\sin(2\alpha+2\gamma) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$; $-\left(\sin 2\alpha\cdot(\pm\frac{3}{5}) + \cos 2\alpha\cdot(\pm\frac{4}{5})\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(1\pm\frac{3}{5}) \pm \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$. I) „+, +":

$\sin 2\alpha\cdot\frac{8}{5} + \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$; $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha}$; $\overset{2}{\cancel{2}}\cos^2\alpha + \cancel{4}\cos\alpha\sin\alpha = 0$

$tg\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \Rightarrow \underline{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

II) „+, −": $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{5}}\sin 2\alpha - \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{5}}\cos 2\alpha = -\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{5}}$; $2\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\cancel{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha$

$\cancel{4}\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \to \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0\\ tg\alpha = -2\end{array}\right.$

$\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

III) „−; +": $\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{5}}\sin 2\alpha + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{5}}\cos 2\alpha = -\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{5}}$; $\cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha}) =$
$= -2(\cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha})$

$2\cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \to tg\alpha = -2$

IV) „−, −": $\frac{2}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$; $\overset{1}{\cancel{2}}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cancel{\cos^2\alpha} + \overset{1}{\cancel{2}}\sin^2\alpha = -2\cancel{\cos^2\alpha} - \overset{1}{\cancel{2}}\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 0 \to \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \to tg\alpha = 0\\ tg\alpha = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$

прод. на ~~листе~~ 2 стр

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

б) $2\alpha+2\beta=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}=\pi+\gamma$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin(2\alpha+2(\pi+\gamma-2\alpha))=\sin(-2\alpha+2\pi+2\gamma)=\sin(2\gamma-2\alpha)$

$-\frac{4}{5}=\sin2\alpha+\left(\pm\frac{4}{5}\right)\cdot\cos2\alpha-\left(\pm\frac{3}{5}\right)\cdot\sin2\alpha$

$\sin2\alpha\left(1\pm\frac{3}{5}\right)\pm\frac{4}{5}\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$ – то же уравнение, что в а)

$\Rightarrow$ все решения, что есть – $tg\alpha=-2$; $tg\alpha=-\frac{1}{2}$; $tg\alpha=0$

Ответ: $-2;-\frac{1}{2};0$

№2

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$; $\begin{cases} (x-2y)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)=25 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \ (1) \\ x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \ (2) \end{cases}$ (1): $|x-2|\leq5$, $|y-1|\leq\frac{5}{3}$

$\Rightarrow -3\leq x\leq7$; $-\frac{2}{3}\leq y\leq\frac{8}{3}$

(2): $x>2y$; $\left[\begin{array}{l} x\leq2;\ y\leq1 \\ x>2;\ y>1 \end{array}\right.$

Сделаем замену: $a=x-2$; $b=y-1$ $\Rightarrow \begin{cases} a+\cancel{2}-2\cancel{y}^{b}-\cancel{2}=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2\cdot9=25 \end{cases}$, $\boxed{a>2b}$; $\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $-5\leq a\leq5$, $-\frac{5}{3}\leq b\leq\frac{5}{3}$

$9b^2-4b^2+5ab=25$; $\cancel{5}^{1}b(b+a)=\cancel{25}^{5}$; $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ удовл. условию:

$\begin{cases} 4-2=\sqrt{4}=2 \text{ – верно} \\ 4^2+9=25 \text{ – верно.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

$a,b=0$ не подходит т.к. $\sqrt{ab}=0\to a=2b\Rightarrow0\to$ $25=0$ – неверно.

$a=\frac{5-b^2}{b}$, $25=9b^2+\frac{25+b^4-10b^2}{b^2}$ $|\cdot b^2\neq0$

$25b^2=9b^4+25+b^4-10b^2$; $\cancel{10}^{2}b^4-\cancel{35}^{7}b^2+\cancel{25}^{5}=0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=1 \\ b^2=+\frac{5}{2} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} b=\pm1 \\ b=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$, $\frac{5}{2}<\frac{25}{9}\to \pm\frac{\sqrt{10}}{2}\in\left[-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right]$

Прод. на ~~листе~~ 3 стр

$b=-1 \to a=\frac{5-1}{-1}=-4$; $a-2b=-4+2<0$ → не подходит.

$b=1$ подошло (проверено ранее)

$b=\frac{\sqrt{10}}{2}$; $a=\frac{5-\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}=b$

$a-2b<0$ – не подходит.

$$b=-\frac{\sqrt{10}}{2} \to a=b=-\frac{\sqrt{10}}{2},\ a-2b=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{\frac{\sqrt{10}}{2}\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)} \text{ – верно}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}$$

$\frac{5}{2}+9\cdot\frac{5}{2}=\frac{50}{2}=25$ – верно → подходит.;

$a=b=-\frac{\sqrt{10}}{2} \to x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$; $y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

№3

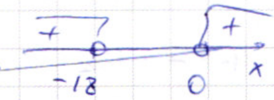
$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$, $x^2+18x>0$ → модуль можно опустить.

пусть $t=x^2+18x$, $t>0$

→ $5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$ (*)

$5^{\log_{12}t}+t$ растет ~~быстрее~~ медленнее, чем $t^{\log_{12}13}$; все ф-ции растут монотонно.

~~неравенство верно при всех $t>0$ => $x(x+18)>0$ =>~~



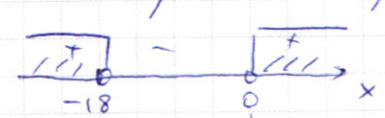
$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$ – условие $t>0$ исп. св-ва: $a^{\log_a b}=b$; $a\log_b c=\log_b c^a$

$t\uparrow$ при $x>0$; $t\downarrow$ при $x\in(-\infty,-18)$

~~при $t\geq 1$ (*) очевидно верно.~~ при $t=12^2$: $5^{\log_{12}t}+t=t^{\log_{12}13}$:

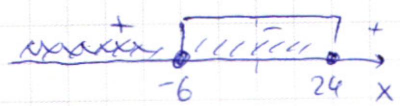
$5^2+144=12^{\log_{12}13^2}$; $25+144=169$, при $t>144$ нерав-во неверно,

=> $t\in(0;144]$; $\begin{cases} x^2+18x>0 & (1)\\ x^2+18x-144\leq 0 & (2)\end{cases}$ → (1):



из-за монотонности роста

(2):



=> $x\in(0;24]$

Ответ: $x\in(0;24]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$, $a,b\in\mathbb{R}$; $a,b>0$; $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$;

$f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$ – для $p\in[1;24]$

$f(4)=f(2\cdot 2)=0$; $f(6)=f(2\cdot 3)=0$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(12)=0$;

$f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(18)=0$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$

$f(24)=0$

$f\left(\frac{1}{c}\right)=-f(c)$ – из свойства мультипликативности, т.к. $f(a^k)=k f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. Если $f(x)=0$, подойдет $\forall y: f(y)\neq 0$:

$y\in\{5;7;11;13;17;19;23;10;14;15;20;21;22\}$ – 13 шт.

$f(x)=0$ при $x\in\{1;2;3;4;6;8;9;12;16;18;24\}$ – 11 шт.

$n_1=11\cdot 13=143$ – кол-во пар в этом случае

Если $f(x)=1$, то $\overset{f(y)>1}{y}\in\{11;13;17;19;23;22\}$, $x\in\{5;7;10;14;15;20;21\}$

$n_2=6\cdot 7=42$

Если $f(x)=2$, то $x\in\{11;22\}$; $y\in\{13;17;19;23\}$ $\to n_3=2\cdot 4=8$

Если $f(x)=3$, то $x=13$; $y\in\{17;19;23\}$ $\to n_4=3$

Если $f(x)=4$, то $x\in\{17;19\}$ $\to$ $y=23$ $\to n_5=2$

Если $f(x)=5$, то $\nexists\, y\in[1;24]: f(y)>f(x)$.

$\Rightarrow n=n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=143+42+8+3+2=143+55=198$

Ответ: 198.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

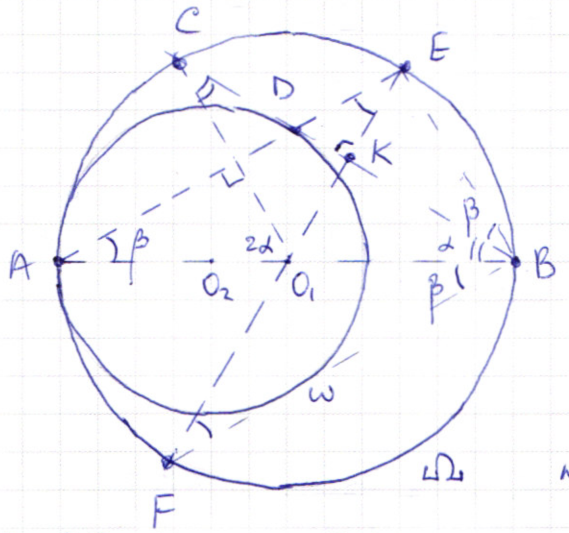
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) чет-к $AEBF$ вписан в Ω $\Rightarrow \angle FAE = \angle AEB$, но $\angle AEB = 90^\circ$, т.к. он опир. на диаметр $AB \Rightarrow$ EF – тоже диаметр.

$EF \perp BC \Rightarrow K = EF \cap BC$ – середина BC. $CK = BK = \frac{CD+BD}{2} = \frac{25}{2}$

по св-ву пересекающихся хорд

$AD \cdot DE = CD \cdot DB = 8 \cdot 17$

$AEBF$ – прямоугольник

$BO_2 = R + R - r = 2R - r$, R – радиус Ω; r – радиус ω

по т. Пифагора для ΔO_2DB:

$$\cancel{r^2} + 17^2 = (2R - r)^2 = 4R^2 + \cancel{r^2} - 4Rr$$

$$4R^2 - 4Rr - 17^2 = 0$$

$\angle CO_1B = \angle BO_1C = \alpha$, т.к. ΔO_1CB р/б.

$\angle ABF = \angle BAE = \angle O_1EA = \angle O_1FB = \beta$ по св-ву прямоугольника.

$\angle FEB = 90^\circ - \beta$; $\angle KEB + \angle KBE = 90^\circ \Rightarrow \angle KBE = \beta \Rightarrow \alpha + 2\beta = 90^\circ$ $(\angle B = 90^\circ)$

по т. синусов для ΔO_1CB: $\frac{25}{2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha} = \frac{R}{\cancel{\sin\alpha}}$

$\angle AFE = 90^\circ - \beta = \alpha + \beta$.

парал-м с $\perp$ми диагоналями и равными сторонами.

$CO_1 \parallel EB \perp AE \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \beta \Rightarrow CO_1BE$ – ромб, $EB = CO_1 = R \Rightarrow$

ΔO_1EB р/с $\Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ = \angle AFE$. ; $\alpha = \beta = 30^\circ$

$R\cos\alpha = \frac{25}{2} \Rightarrow R = \frac{25}{\sqrt{3}}$

Прод. на листе 6

№4, прод.

$$4Rr = 4R^2 - 17^2 \; ; \; r = \frac{4\cdot\frac{625}{3} - 289}{4\cdot\frac{25}{\sqrt3}} = \frac{1633\cdot\sqrt3}{300}$$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AF\cdot AE$, т.к. $\angle FAE = 90°$

$AF = 2R\cdot\sin\alpha = R = \frac{25}{\sqrt3}$; $AE = 2R\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{25}{\sqrt3}\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 25$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25^2}{\sqrt3} = \frac{625\sqrt3}{6}$

Ответ: $\angle AFE = 60°$; $R = \frac{25}{\sqrt3}$; $r = \frac{1633\sqrt3}{300}$; $S_{AEF} = \frac{625\sqrt3}{6}$

№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq \underbrace{-8x^2-30x-17}_{g(x)}$; $\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = f(x)$

$3 + \frac{2}{4x+3}$ уменьшается с ростом x. $y=3$ – гориз. асимптота; $x = -\frac{3}{4}$ – вертикальная асимптота

$-8x^2-30x-17$ – парабола с ветвями вниз. $x_0 = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$ – вершина.

$-\frac{15}{8} \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$; $y_0 = -\cancel{8}\cdot\frac{15^2}{8^2} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 = \frac{225-17\cdot8}{8} = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -\cancel{8}\cdot\frac{11^2}{\cancel{16}} + 30\cdot\frac{11}{4} - 17 = \frac{11}{4}\cdot8 - 17 = 5$

$f\left(-\frac{11}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} < g\left(-\frac{11}{4}\right) \Rightarrow$ крайний случай:

$a\left(-\frac{11}{4}\right) + b = f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4}$. ; $f(x) < g(x)$ при $x \in \left[-\frac{11}{4}; \frac{3}{4}\right)$

a_1x+b_1: $a_1\left(-\frac{3}{4}\right) + b_1 = g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\cancel{8}\cdot\frac{9}{\cancel{16}} + 30\cdot\frac{3}{4} - 17 = \frac{72}{4} - 17 = 1$

$a_1\left(\frac{11-3}{4}\right) = 1 - \frac{11}{4} = -\frac{7}{4} \to a_1 = -\frac{7}{8} \to b_1 = 1 - \frac{7}{8}\cdot\frac{3}{4} = 1 - \frac{21}{32} = +\frac{11}{32}$

прод. на стр 7

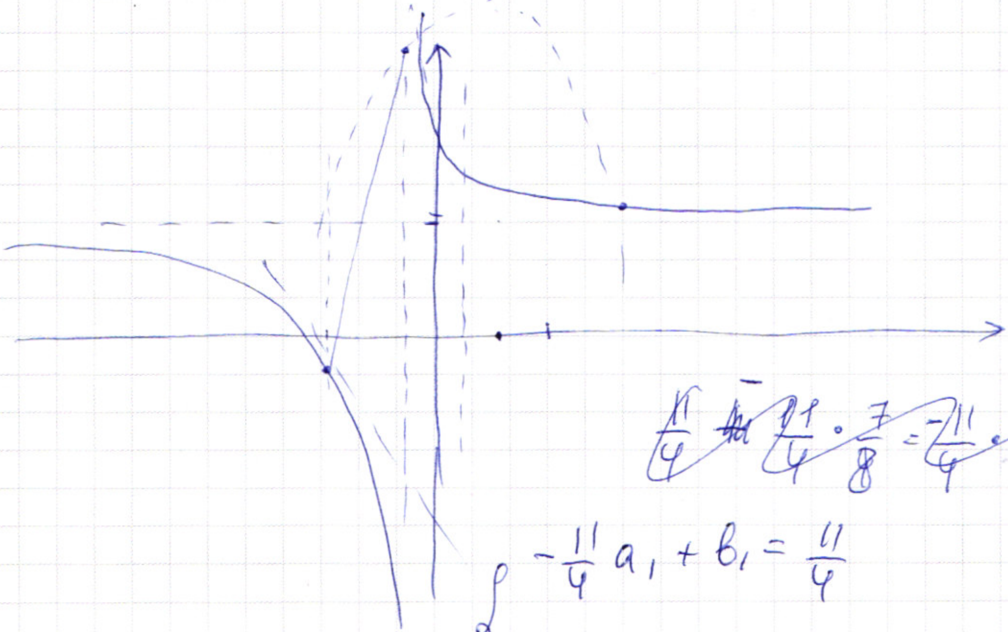
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



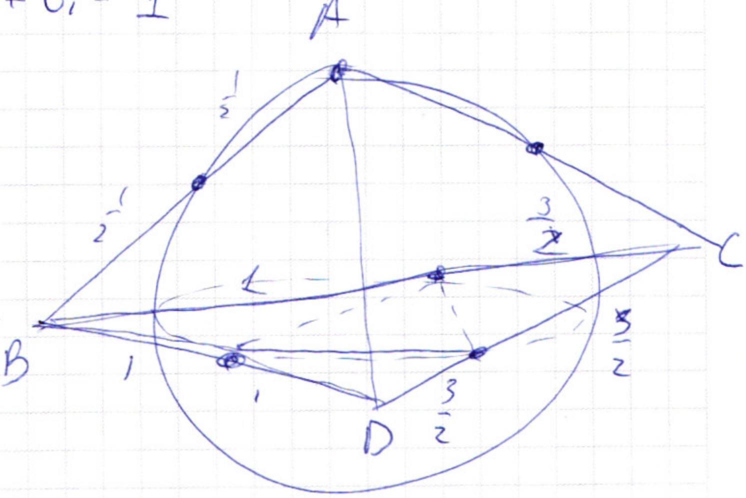
$\cancel{\frac{11}{4} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{8} = -\frac{11}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{33}{16}}$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a_1 + b_1 = \frac{11}{4} \\ -\frac{3}{4}a_1 + b_1 = 1 \end{cases}$$

$$a_1\left(\frac{-3+11}{4}\right) = \frac{4-11}{4} = -\frac{7}{8}$$

$$b_1 = \frac{11}{4}\left(1 - \frac{7}{8}\right) = \frac{11}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{32}$$

$$b_1 = 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{32-21}{32}$$

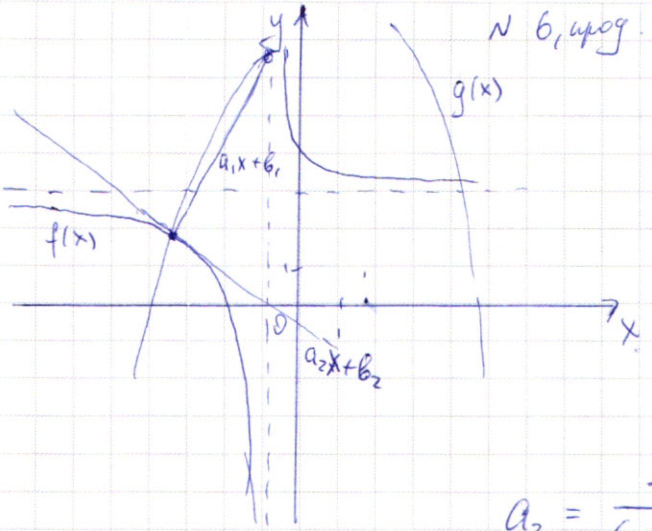


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



N 6, прод.

a_2x+b_2 : касат. к $f(x)$ в точке $x=-\frac{11}{4}$.

$a_2 = \left(\frac{2}{4x+3}\right)' = 2\cdot\left((4x+3)^{-1}\right)' =$

$= -2\cdot\frac{1}{(4x+3)^2}\cdot 4 = \frac{-8}{(4x+3)^2}$;

$a_2 = \frac{-8}{(-11+3)^2} = -\frac{1}{8}$

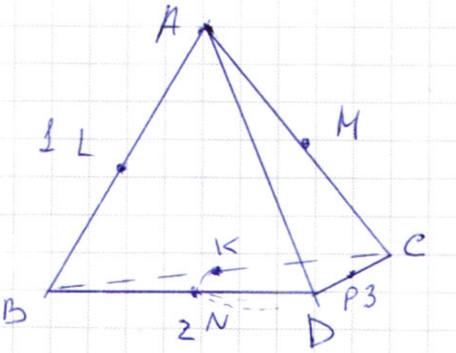
$b_2 = \frac{11}{4} - \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{8} = \frac{7}{8}\cdot\frac{11}{4} = \frac{77}{32}$

т. обр. $a \in \left[-\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}\right]$, $b = \frac{11}{4}(1+a)$;

$b \in \left[\frac{11}{32}; \frac{77}{32}\right]$

Ответ: $a \in \left[-\frac{7}{8}; -\frac{1}{8}\right]$; $b = \frac{11}{4}(1+a)$; $b \in \left[\frac{11}{32}; \frac{77}{32}\right]$

N 7

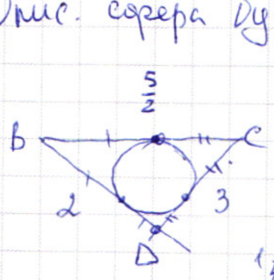


BC, CD и BD ~~Все стороны пирамиды, кроме AD~~ касаются сферы.

$BC = BK + KC$.

~~KC~~ B, C, D, K, N, P лежат в одной плоскости $\Rightarrow CP = CK = \frac{3}{2}$ по св. ву касательных; $BK = BN = 1 \Rightarrow BC = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Опис. сфера будет иметь, если ΔBCD вписан в большее сечение.



$\frac{3}{\sin\angle DBC} = 2R \rightarrow R \rightarrow \min$, если $\sin\angle DBC \rightarrow \max$

$\angle DBC$ из т. косинусов: $3^2 = \frac{25}{4} + 4 - 2\cdot 2\cdot\frac{5}{2}\cdot\cos\angle DBC$

$9 = \frac{25}{4} - 10\cos\angle DBC \rightarrow \cos\angle DBC = \frac{1}{8}$; $\sin\angle DBC = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

$R = \frac{3\cdot 8}{2\cdot 3\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$

Ответ: $BC = \frac{5}{2}$; $R = \frac{4}{\sqrt{7}}$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$;

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f(y')$; $f(17)=4$; $f(19)=4$; $f(23)=5$

$f(4)=0$; $f(6)=0$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(12)=0$; $f(14)=1$

$f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(18)=0$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(24)=0$

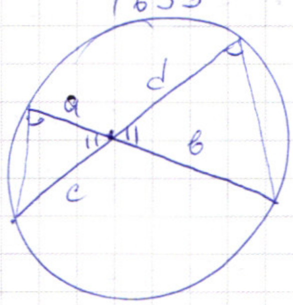
$f(b^{-1})=-f(b)$

$f(ab)=f\left(a\cdot\frac{1}{c}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{c}\right)$

$2400+100=2500$

$\frac{867}{633}$

$289\cdot 3 = 867$



$a+1-2(b+1)=\sqrt{ab}$; $a-2b=\sqrt{ab}$

$\begin{cases} a^2+4b^2-4ba=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$; $a^2-5ab+4b^2=0$

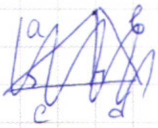
$3+\frac{2}{-11+3}=3+\frac{2}{8_4}=\frac{11}{4}$

$9b^2+5ab-4b^2=25$

$\frac{a}{d}=\frac{c}{b} \Rightarrow a\cdot b=c\cdot d$

$5b^2+5ab=25$; $b^2+ab=5$; $a=\frac{5-b^2}{b}$

$\alpha+\beta=$

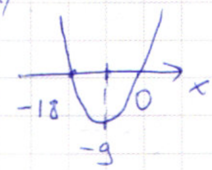


$\frac{25}{b^2}+b^2-\frac{10}{}+9b^2=25$; $\frac{25}{b^2}+10b^2-10=25$

$10(b^2-1)=25\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$

$17\cdot 17=119$

$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$



$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

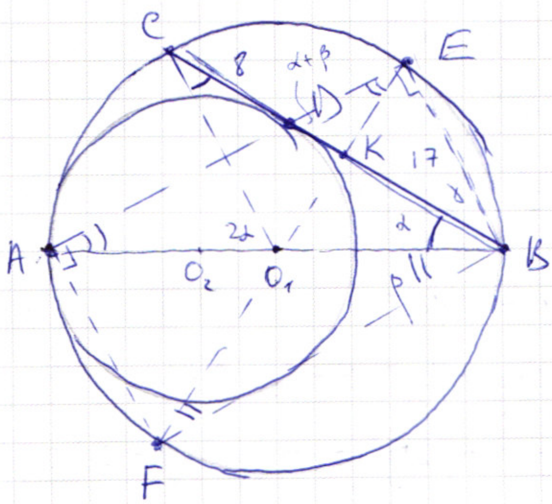
O_1D

$17\cdot 8 = 136$

$90-\beta+\gamma=90^\circ$

$t=x^2+18x$: $5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

~~$5^{\log_{12}t}+t(1-t^{(\log_{12}(13)-1)})\geq 0$~~ $\log_{12}t \geq \log_5(t^{\log_{12}13}-t)$



$CK=KB=12{,}5$ (EF - диам)

$ED\cdot DA=8\cdot 17$

$90-\beta=\alpha+\gamma+\beta+\beta$

$(R+R-r)^2+r^2=17^2$

$\alpha+3\beta+\gamma=90^\circ$

$\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$

$4R^2+r^2-4Rr+r^2=17^2$

$2\beta=90^\circ$

$\alpha+\beta+\beta=90^\circ$

$4\cdot\frac{25^2}{3}-17^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta + \frac{\pm 2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1+\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

1) $\underline{tg\,\alpha = 0} \to \sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \underline{\sin 4\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot 2\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{4}{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{(\alpha+\beta)}{2}\cdot\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ ''

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

'' $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$-\frac{1}{\sqrt5} - \frac{4}{5} = 2\sin(4\alpha+6\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4+\sqrt5}{5}$

$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt5}$; $\cos\gamma = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\gamma = \pm\frac{4}{5}$; $\cos 2\gamma = \pm\frac{3}{5}$

$\sin(2\alpha + 2(-\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - 2\alpha)) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

'' γ

$\sin(2\alpha - 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - 4\alpha) + \sin 2\alpha = -\sin(2\alpha + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) + \sin 2\alpha =$

$= -(\sin 2\alpha\cdot\cos(2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}) + \cos 2\alpha\cdot\sin(2\arcsin\frac{1}{\sqrt5})) + \sin 2\alpha =$

$= -\sin 2\alpha\cdot(\pm\frac{3}{5}) + \cos 2\alpha\cdot(\pm\frac{4}{5}) + \sin 2\alpha = \frac{-4}{5}$

$\sin 2\alpha(1\pm\frac{3}{5}) \pm \frac{4}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

1) $\frac{\pm}{+}$: $\frac{2}{8}\sin 2\alpha + \frac{4}{8}\cos 2\alpha = -\frac{4}{8}$ -1

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$; $2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2\cos^2\alpha + 4\cos\alpha\sin\alpha = 0$, $2\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$9(y^2 - 2y + 1)$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y = 16 \end{cases}$$

$x^2 + 4y^2 - 4xy = xy - 2y - x + 2$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \\ x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \end{cases}$$

$x^2 - 3xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$x(x - y + 1) + 2y(-x + 2y + 1) - 2 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}$

$x^2-18x-144=0$

$\begin{cases} x^2-18x > 0 \\ x^2-18x \leqslant 144 \end{cases}$

$\log_{12} t \uparrow$, $t \uparrow$

$D_1 = 81+144 = \underline{225} = 15^2$

при $t>1$ очевидно верно.

$24; -6$

$25+144 \geqslant 12^{2\log_{12} 13} = 169$

$125 + 12^3 \geqslant 13^3$

$13^3-12^3 = a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) = 1\cdot(144+169$

$5^{-1} + \frac{1}{12} \geqslant 12^{\log_{12}\frac{1}{13}}$

$\frac{1}{25} + \frac{1}{144} \geqslant \frac{1}{169}$

$169^2 \geqslant 144\cdot 25 = 60^2$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$x^2-18x \in (0;144]$

$0<x^2-18x \leqslant 144$

$f(a^k) = k\cdot f(a)$

$f(a^{-(k+1)}) = f(a^{-k}\cdot a^{-1}) = -k\cdot f(a) + (-1)\cdot f(a)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)